

Пара фотонов в волноводе с кубитами:  
излучение, локализация, топологические состояния

Александр Пошакинский, Janet Zhong, Никита Олехно,  
Yongguan Ke, Chaohong Lee, Yuri Kivshar,  
Александр Поддубный

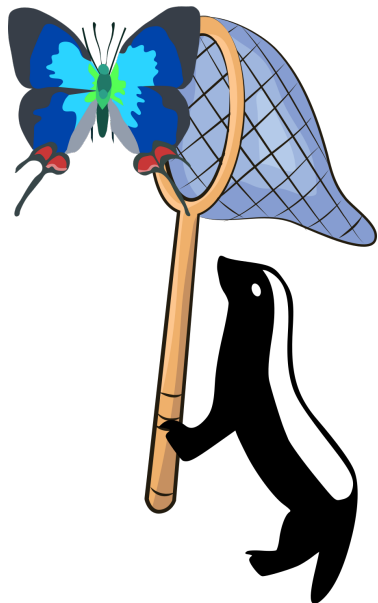


**ФТИ им. А.Ф. Иоффе, Санкт-Петербург**  
**Australian National University**  
**Университет ИТМО**  
**Sun Yat-Sen University, China**

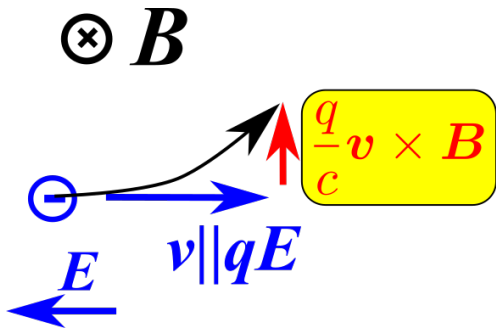
Нелинейные волны, Нижний Новгород, 29 февраля 2020

# Охота на квантовых бабочек

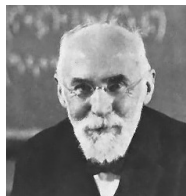
- 1 Электрон в магнитном поле
  - Уровни Ландау
  - Квантовый эффект Холла
  - Топологические состояния
  - Топологические изоляторы
  - Бабочка Хофштадтера
  - Бабочка из графена
- 2 Квантовая двухфотонная бабочка
  - Локализация
  - Квантовый эффект Холла
  - Хаос против бабочек



# Электрон в магнитном поле. Эффект Холла



Edwin Hall  
(1879)

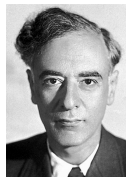
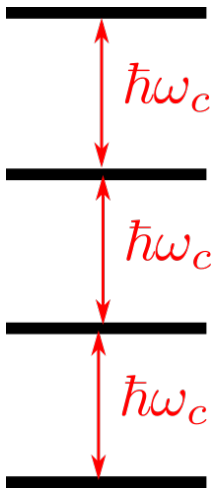


Hendrik  
Lorentz  
(1895)

Сила Лоренца

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

# Квантовый электрон. Уровни Ландау



Л.Д. Ландау (1930)

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{(p_y - eBx/c)^2}{2m}$$

$$E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\omega_c = \frac{eB}{mc}$$

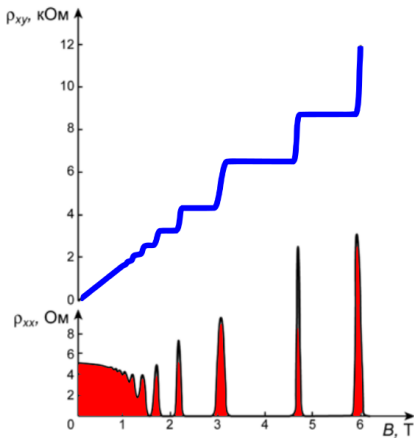
# Квантовый эффект Холла

## Целочисленный квантовый эффект Холла



Physics Nobel Prizes,  
1985 & 1998

Klaus von Klitzing (1980)



$$\sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

## Дробный квантовый эффект Холла



Photo from the Nobel Foundation archive.  
Robert B. Laughlin



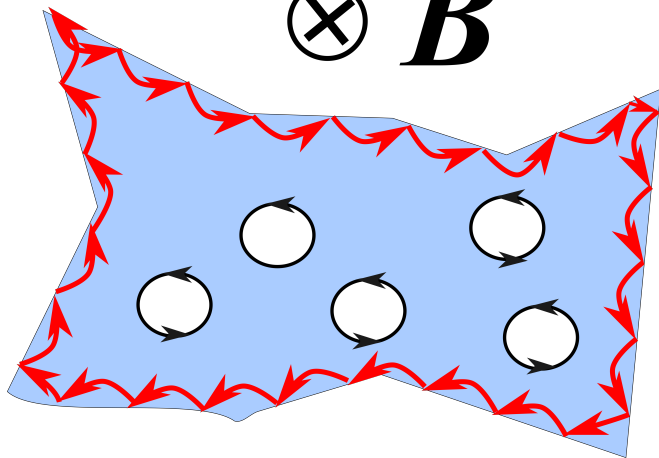
Photo from the Nobel Foundation archive.  
Horst L. Störmer



Photo from the Nobel Foundation archive.  
Daniel C. Tsui

# Топологические краевые состояния

$\otimes B$



D.J. Thouless, M. Kohmoto, M.P. Nightingale, and M. den Nijs,  
"Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential", PRL **49**, 405  
(1982)

# Топологические изоляторы

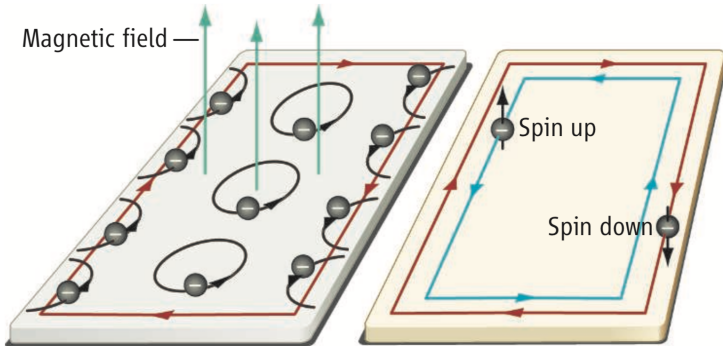
## Квантовый эффект Холла

- требует магнитного поля

## Спиновый

## квантовый эффект Холла

- без магнитного поля
- со спин-орбитальным взаимодействием



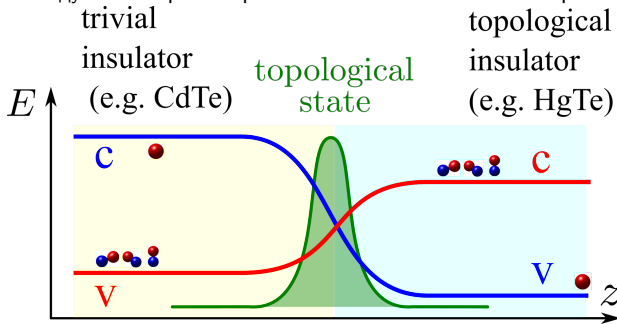
C.L. Kane and E.J. Mele; PRL **95**, 146802(2005); **95**, 226801(2005);

# Топологические изоляторы и зонная структура

Блоховские состояния  $\psi_{nk} = e^{ik \cdot r} u_{nk}(\mathbf{r})$ .

Зоны характеризуются целыми числами — топологическими инвариантами

Состояния между изоляторами с разными топологическими инвариантами



HgTe М.И. Дьяконов, А.В. Хаецкий, "Поверхностные состояния в бесщелевом полупроводнике",  
Письма в ЖЭТФ 33, 115 (1981)

CdHgTe Б.А. Волнов, О.А. Панкратов, "Двумерные безмассовые электроны в инвертированном  
контакте", Письма в ЖЭТФ 42, 145 (1985)

M.Z. Hasan and C.L. Kane, Rev. Mod. Phys. 82, 3045 (2010)

X.-L. Qi and Sh.-Ch. Zhang, Rev. Mod. Phys. 83, 1057 (2011)

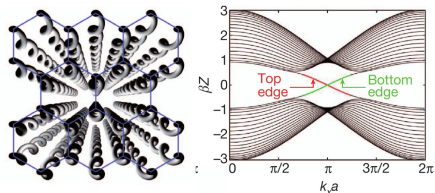
L. Fu, Phys. Rev. Lett. 106, 106802 (2011)

Свет: F.D.M. Haldane and S. Raghu, "Possible Realization of Directional Optical Waveguides in  
Photonic Crystals with Broken Time-Reversal Symmetry", PRL 100, 013904 (2008)



### Photonic Floquet topological insulators

Mikael C. Rechtsman<sup>1\*</sup>, Julia M. Zeuner<sup>1,4</sup>, Yonatan Plotnik<sup>1,4</sup>, Yaakov Lumer<sup>1</sup>, Daniel Podolsky<sup>1</sup>, Felix Dreisow<sup>2</sup>, Stefan Nolte<sup>2</sup>, Mordechai Segev<sup>2</sup> & Alexander Szameit<sup>1</sup>



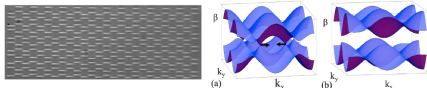
PRL 111, 103901 (2013)

PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending  
6 SEPTEMBER 2013

### Topological Creation and Destruction of Edge States in Photonic Graphene

Mikael C. Rechtsman,<sup>1,4\*</sup> Yonatan Plotnik,<sup>1</sup> Julia M. Zeuner,<sup>2</sup> Daohong Song,<sup>3</sup> Zhigang Chen,<sup>3,4</sup> Alexander Szameit,<sup>2</sup> and Mordechai Segev<sup>1</sup>



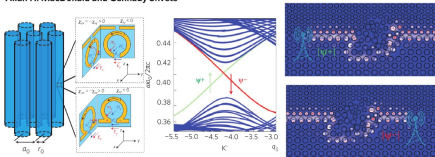
### Weyl points and line nodes in gyroid photonic crystals

Ling Lu<sup>1</sup>, Liang Fu, John D. Joannopoulos and Marin Soljačić



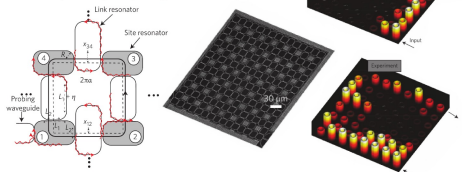
### Photonic topological insulators

Alexander B. Khanikaev<sup>1,2</sup>, S. Hossein Mousavi<sup>1</sup>, Wang-Kong Tse, Mehdi Kargarian, Allan H. MacDonald and Gennady Shvets<sup>1\*</sup>



### Imaging topological edge states in silicon photonics

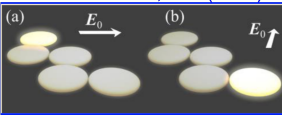
M. Hafezi<sup>1</sup>, S. Mittal, J. Fan, A. Migdall and J. M. Taylor



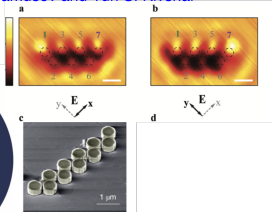
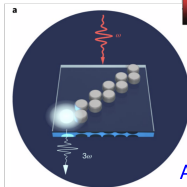
# Краевые состояния в зигзагах

ANP, Andrey Miroshnichenko, Alexey Slobzhanyuk, and Yuri Kivshar

ACS Photonics 1, 101 (2014)



Ivan S. Sinev, I.S. Mukhin, A.P. Slobzhanyuk, ANP, A.E. Miroshnichenko, A.K. Samusev and Yuri S. Kivshar  
Nanoscale, 2015, 7, 11904



nature  
nanotechnology

LETTERS

<https://doi.org/10.1038/nnano.2014.247>

## Nonlinear light generation in topological nanostructures

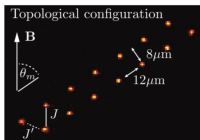
Sergey Kruk<sup>1</sup>, Alexander Poddubny<sup>1,2,3</sup>, Daria Smirnova<sup>1,4</sup>, Lei Wang<sup>1</sup>, Alexey Slobzhanyuk<sup>2</sup>, Alexander Shorokhov<sup>2</sup>, Ivan Kravchenko<sup>6</sup>, Barry Luther-Davies<sup>2</sup> and Yuri Kivshar<sup>1,2\*</sup>

RESEARCH ARTICLE

## Observation of a symmetry-protected topological phase of interacting bosons with Rydberg atoms

Sylvain de Léséleuc<sup>1,†</sup>, Vincent Lienhard<sup>1,†</sup>, Pascal Scholl<sup>1</sup>, Daniel Barredo<sup>1</sup>, Sebastian Weber<sup>2,†</sup>, Nicolas Lang<sup>3,†</sup>, Hans Peter Büchler<sup>2</sup>

Science 365, 775 (2019)



nature  
photonics

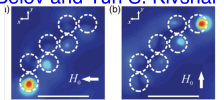
ARTICLES

DOI: 10.1038/nphoton.2016.017-0006-2

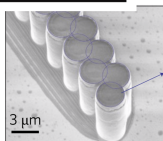
## Lasing in topological edge states of a one-dimensional lattice

P. St-Jean<sup>1</sup>, V. Goblot<sup>1</sup>, E. Galopin<sup>1</sup>, A. Lemaître<sup>1</sup>, T. Ozawa<sup>2</sup>, L. Le Gratiet<sup>1</sup>, I. Sagnes<sup>1</sup>, J. Bloch<sup>1</sup> and A. Amo<sup>1</sup>

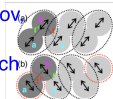
A.P. Slobzhanyuk, ANP, A.E. Miroshnichenko, P.A. Belov and Yuri S. Kivshar



PRL 114, 123901 (2015)



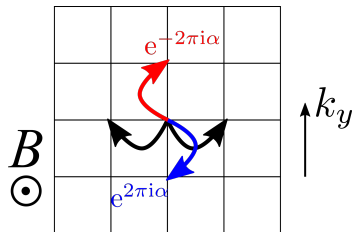
D. Solnyshkov, A. Nalitov & G. Malpuech



PRL 116, 046402 (2016)

# Очень сильные магнитные поля ( $B \gtrsim 10^4$ T)

Циклотронная энергия  $\hbar\omega_c = \frac{\hbar e B}{mc} \sim 1$  eV  
и сопоставима с шириной разрешенных зон



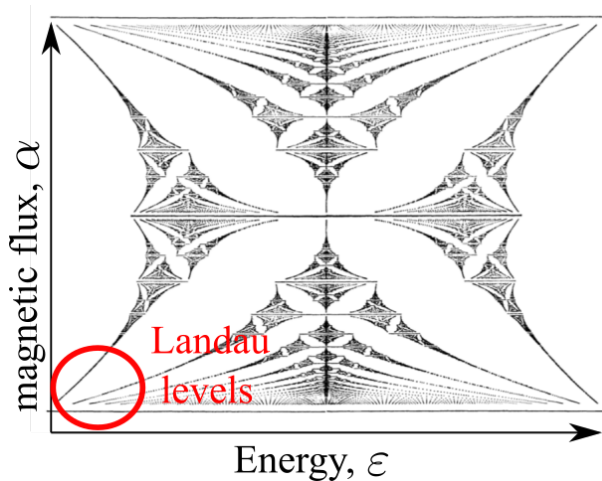
модель сильной связи в квадратной решетке  
в магнитном поле

$$\psi_{m+1} + \psi_{m-1} + \psi_m (e^{2\pi i \alpha + i k_y} + e^{-2\pi i m \alpha - i k_y}) = \varepsilon \psi_m$$

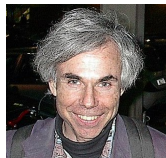
$$\psi_{m+1} + \psi_{m-1} + 2 \cos(\underbrace{2\pi m \alpha + k_y}_{\text{magnetic flux}}) \psi_m = \varepsilon \psi_m$$

P.G. Harper, Proc. Phys. Soc. Lond. A **68**, 874(1955)

# Бабочка Хофштадтера



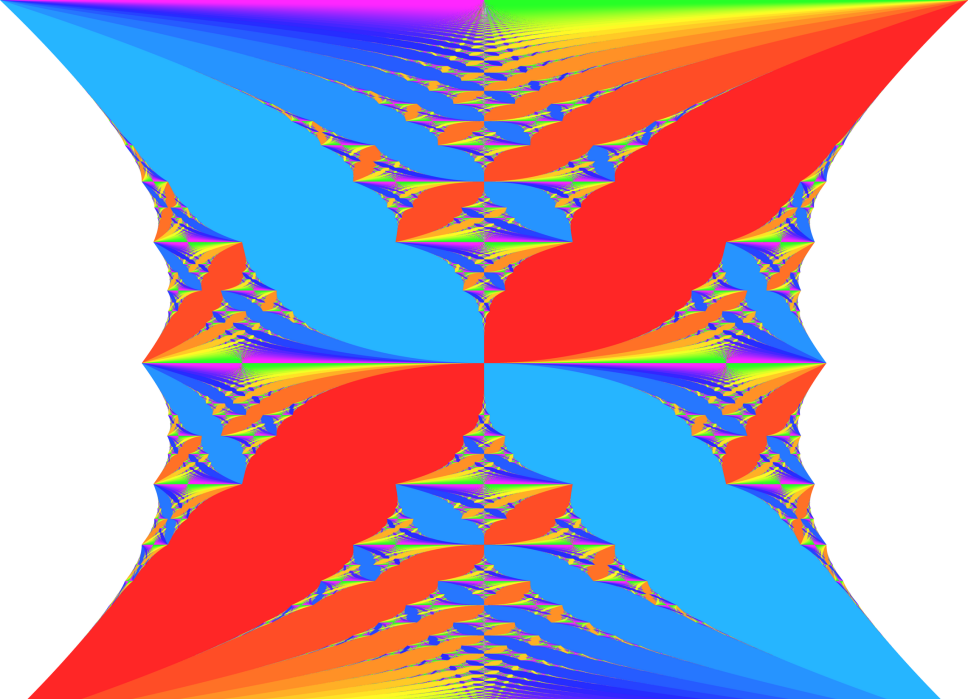
М.Я. Азбель



D.Hofstadter

М.Я. Азбель, ЖЭТФ **46**, 929 (1964)

D.R. Hofstadter, PRB **14**, 2239(1976)



## Gplot's grace

По милости Джиплота

*What happens if a crystal's laced with  
The lines of a magnetic field?  
What spectrum will the world be graced with?  
What energies will nature yield?*

*It turns out that the matter's crux is  
Determined by how great the flux is—  
p-over-q q bands begets;  
Non-ratios, though, give Cantor sets!*

*On hearing this, a physicist'll  
Declare it numerology;  
But once shown Gplot, all agree  
Deep magic's lurking in a crystal!*

*This gem I found by luck. That's why  
There but for Gplot's grace go I.*

Douglas Hofstadter

Возьмём кристалл. Вот он блистает.  
В магнитном поле блеск разлит.  
Какой нам спектр обещает?  
Каких энергий нам дарит?

Раскрою тайну всю потомкам.  
Все дело в буйности потока.  
Рациональность победит —  
q-зон отпразднует пиит.  
А если чувства торжествуют,  
тут Кантор с множеством гарцует.

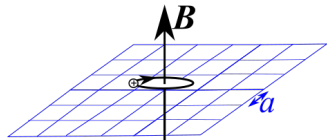
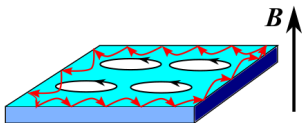
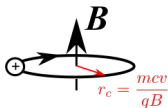
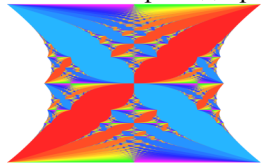
На первый взгляд, все это тянет  
На ахинею, русский вздор.  
Но на GPlot направив взор,  
В магический кристалл заглянем.

Счастливый случай и оплот,  
Благодарю тебя, GPlot.

Перевод Марии Поддубной

# Где живут бабочки?

Бабочка Хофштадера



Классически слабое  
магнитное поле

Квантующее  
магнитное поле

**Магнитное поле,  $B$**   
ультра-квантовый режим

$$\hbar\omega_c \ll 1/\tau, r_c \gg a$$

$$\hbar\omega_c \gg 1/\tau, r_c \gg a$$

$$\hbar\omega_c \gg 1/\tau, r_c \sim a$$

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Топологические краевые состояния.

Радиус орбиты

Циклотронное движение

Квантовый эффект Холла

$$\sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}$$

порядка постоянной решетки

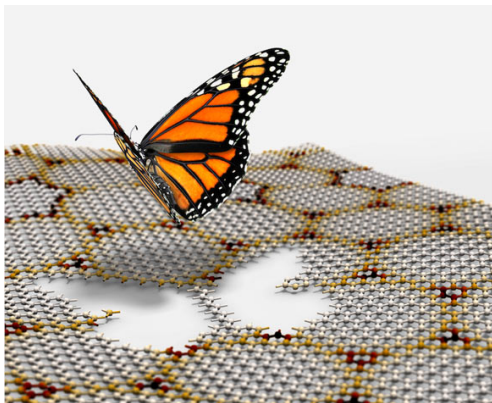
Уровни Ландау

$$E_n = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

**Бабочка Хофштадера**

# Охота на квантовых бабочек

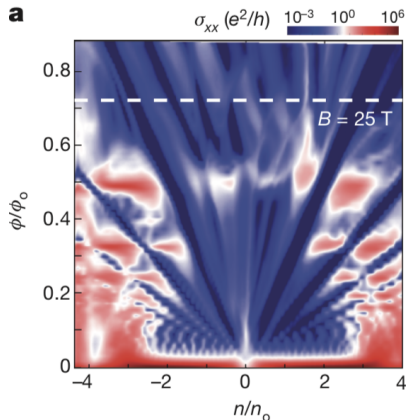
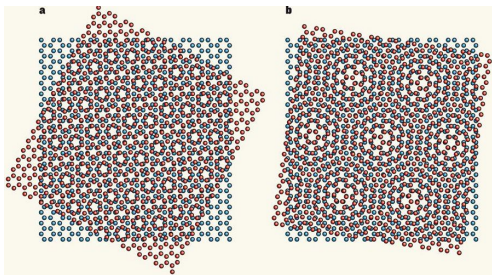
- 1 Электрон в магнитном поле
  - Уровни Ландау
  - Квантовый эффект Холла
  - Топологические состояния
  - Топологические изоляторы
  - Бабочка Хофштадтера
  - Бабочка из графена
- 2 Квантовая двухфотонная бабочка
  - Локализация
  - Квантовый эффект Холла
  - Хаос против бабочек



Dean et al., Nature **497**, 598 (2013)



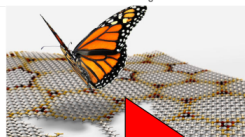
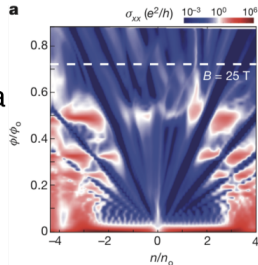
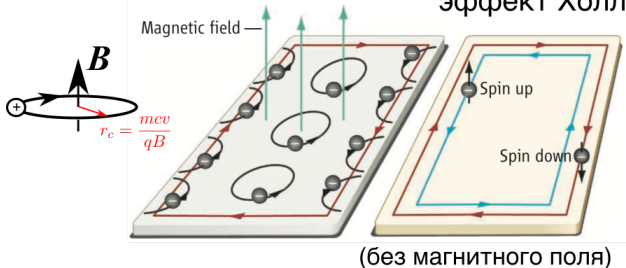
# Муар в графене



Dean et al., “Hofstadter’s butterfly and the fractal quantum Hall effect in moiré superlattices”, Nature **497**, 598 (2013)

# Квантовый эффект Холла

# Спиновый квантовый эффект Холла



Классически слабое магнитное поле

Квантующее магнитное поле

**Магнитное поле,  $B$**   
ультра-квантовый режим

$$\hbar\omega_c \ll 1/\tau, r_c \gg a$$

$$\hbar\omega_c \gg 1/\tau, r_c \gg a$$

$$\hbar\omega_c \gg 1/\tau, r_c \sim a$$

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Циклотронное движение

Топологические краевые состояния.

Квантовый эффект Холла  $\sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}$

Уровни Ландау

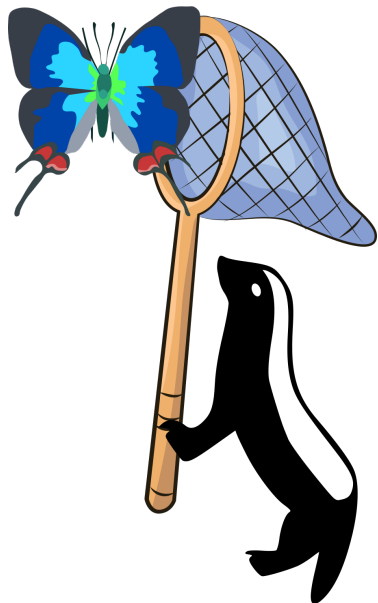
$$E_n = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

Радиус орбиты порядка постоянной решетки

**Бабочка Хофштадтера**

# Охота на квантовых бабочек

- 1 Электрон в магнитном поле
  - Уровни Ландау
  - Квантовый эффект Холла
  - Топологические состояния
  - Топологические изоляторы
  - Бабочка Хофштадтера
  - Бабочка из графена
- 2 Квантовая двухфотонная бабочка
  - Локализация
  - Квантовый эффект Холла
  - Хаос против бабочек



Superconducting qubits

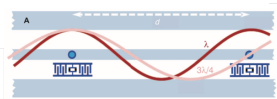
Cold atoms

Exciton-polaritons



Photon-Mediated Interactions Between Distant Artificial Atoms

Arjan F. van Loo *et al.*  
*Science* **342**, 1494 (2013);  
 DOI: 10.1126/science.1244324



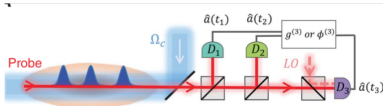
QUANTUM OPTICS

Observation of three-photon bound states in a quantum nonlinear medium

Qi-Yu Liang,<sup>1</sup> Aditya V. Venkatramani,<sup>2</sup> Sergio H. Cantu,<sup>1</sup> Travis L. Nicholson,<sup>1</sup> Michael J. Gullans,<sup>2,4</sup> Alexey V. Gorshkov,<sup>5</sup> Jeff D. Thompson,<sup>6</sup> Cheng Chin,<sup>6</sup> Mikhail D. Lukin,<sup>2,4</sup> Vladan Vuletić<sup>1,4</sup>

LETTER

<https://doi.org/10.1038/n41586-019-0902-3>



Waveguide-coupled single collective excitation of atomic arrays

SCIENCE ADVANCES | RESEARCH ARTICLE

CONDENSED MATTER PHYSICS

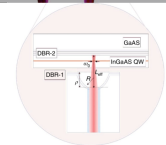
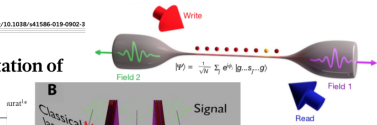
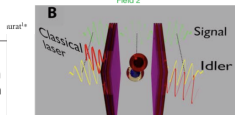
First observation of the quantized exciton-polariton field and effect of interactions on a single polariton

Álvaro Cuevas,<sup>1,2,4</sup> Juan Camilo López Carreño,<sup>3,4\*</sup> Bianca Silva,<sup>1,3</sup> Milena De Giorgi,<sup>1†</sup> Daniel G. Suárez-Foreiro,<sup>3</sup> Carlos Sánchez Muñoz,<sup>3</sup> Antonio Fieramosca,<sup>1</sup> Filippo Cardano,<sup>6</sup> Lorenzo Marrucci,<sup>4</sup> Vittorianna Tasco,<sup>7</sup> Giorgio Biasoni,<sup>7</sup> Elena del Valle,<sup>3</sup> Lorenzo Dominici,<sup>7</sup> Dario Ballarín,<sup>1</sup> Giuseppe Gigli,<sup>1</sup> Paolo Mataloni,<sup>2</sup> Fabrice P. Laussy,<sup>4,8†</sup> Fabio Sciarrino,<sup>2</sup> Daniele Sanvitto<sup>1,9†</sup>

nature materials LETTERS  
<https://doi.org/10.1038/nmat4503>

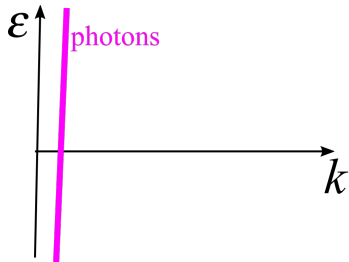
Emergence of quantum correlations from interacting fibre-cavity polaritons

Guillermo Muñoz-Matutano<sup>1,2,†</sup>, Andrew Wood<sup>1,2</sup>, Mattias Johansson<sup>1,2,3</sup>, Xavier Vidal<sup>1,2</sup>, Ben Q. Baragola<sup>1,2,4</sup>, Andreas Reinhardt<sup>2</sup>, Aristide Lemaitre<sup>1,2</sup>, Jacqueline Bloch<sup>1</sup>, Alberto Amo<sup>1,5</sup>, Gilles Noguez<sup>2</sup>, Benjamin Besga<sup>1,2</sup>, Maxime Richard<sup>1,2,6</sup> and Thomas Volz<sup>1,2,6</sup>



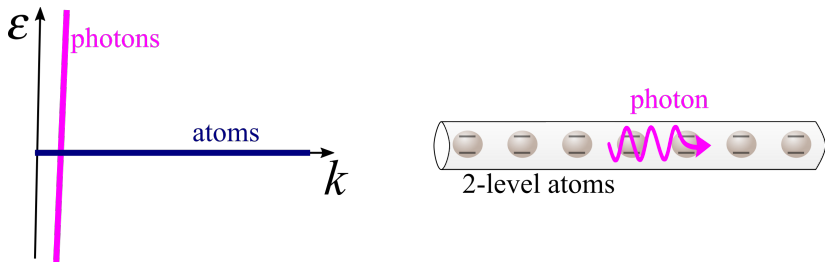
arXiv:1404.1501

## Два поляритона в волноводе



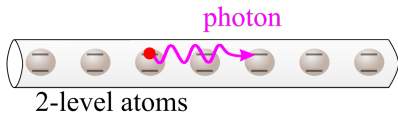
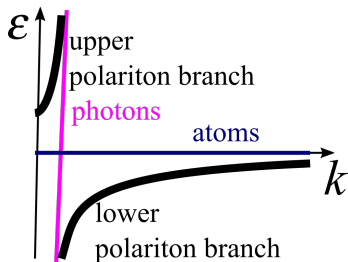
$$\mathcal{H} = \underbrace{\sum_k \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k}_{\text{photons}}$$

# Два поляритона в волноводе



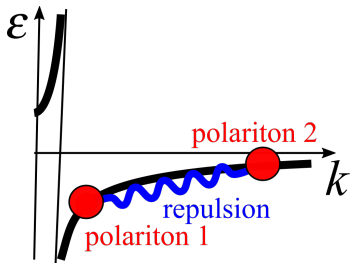
$$\mathcal{H} = \underbrace{\sum_k \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k}_{\text{photons}} + \underbrace{\sum_j \hbar\omega_0 \sigma_j^\dagger \sigma_j}_{\text{2-level atoms}}$$

# Два поляритона в волноводе

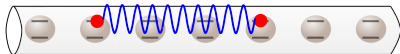


$$\mathcal{H} = \underbrace{\sum_k \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k}_{\text{photons}} + \underbrace{\sum_j \hbar\omega_0 \sigma_j^\dagger \sigma_j}_{\text{2-level atoms}} + \underbrace{g \sum_{j,k} (\sigma_j^\dagger a_k e^{ikz_j} + \text{H.c.})}_{\text{light-atom coupling}}.$$

# Два поляритона в волноводе



contact repulsion  
due to polariton blockade



$$\mathcal{H} = \underbrace{\sum_k \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k}_{\text{photons}} + \underbrace{\sum_j \hbar\omega_0 \sigma_j^\dagger \sigma_j}_{\text{2-level atoms}} + \underbrace{g \sum_{j,k} (\sigma_j^\dagger a_k e^{ikz_j} + \text{H.c.})}_{\text{light-atom coupling}}.$$

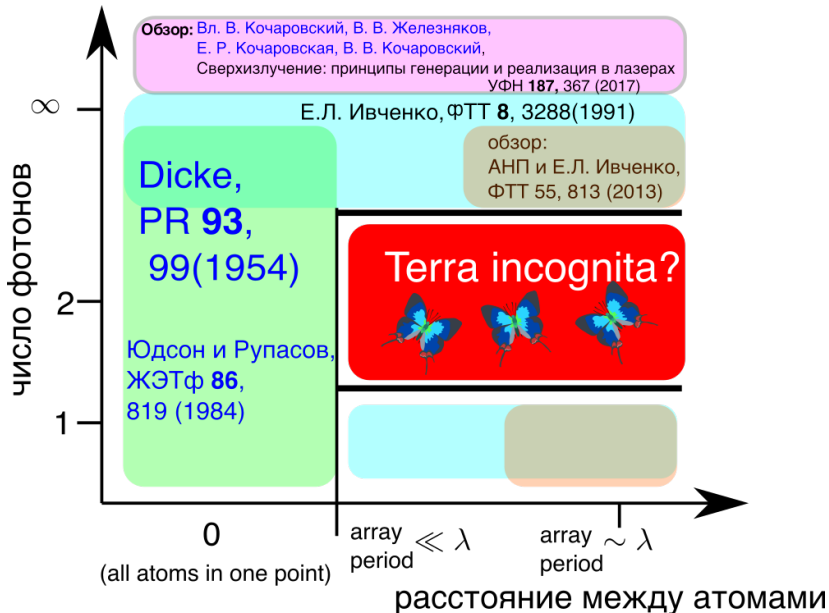
- приближения: двухуровневые атомы, вращающаяся волна
- эффективное отталкивание из-за поляритонной блокады

Возбуждения системы:

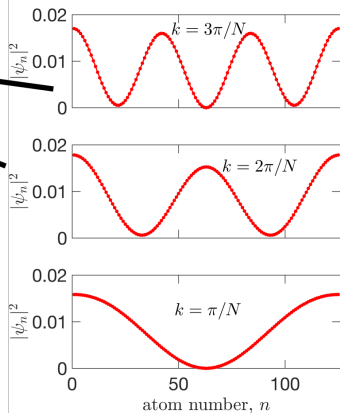
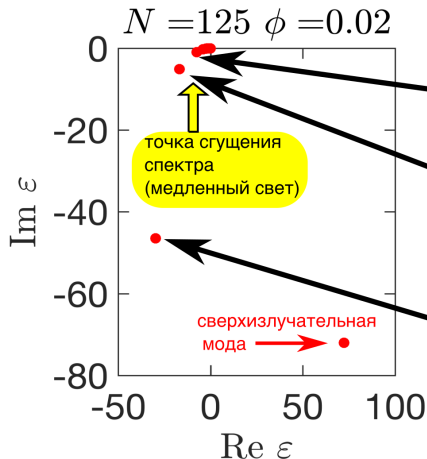
$$\Psi = \sum_{nm} \Psi_{nm} \sigma_n^\dagger \sigma_m^\dagger |0\rangle, \Psi = \sum_{nm} \Psi_{nm} \sigma_n^\dagger \sigma_m^\dagger |0\rangle, \dots$$



# К истории вопроса



# Комплексный спектр одночастичных мод



Одночастичные моды — стоячие волны,

$$\psi_n^k \propto \cos k\left(n - \frac{1}{2}\right), \quad \omega_n^k \approx -\frac{2\varphi\Gamma_0}{k^2} - \frac{8i\varphi^2}{k^4 N}, \quad k = \frac{\pi}{N}, \frac{2\pi}{N}, \dots$$

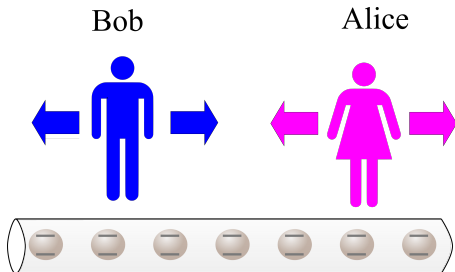
Детали: М.Р. Владимирова, Е.Л. Ивченко, А.В. Кавокин, ФТП **32**, 101 (1998)

Обзор про сверхизлучение: Вл.В. Кочаровский, В. В. Железняков,

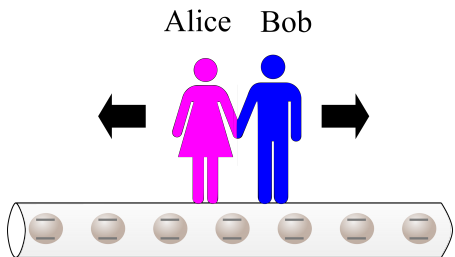
Е.Р. Кочаровская, В.В. Кочаровский, УФН **187**, 367 (2017)

# Двухполяритонные состояния

- 1 Два свободных квази-независимых поляритона

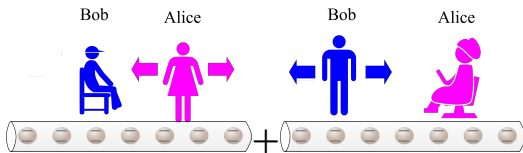


- 2 Связанное состояние двух поляритонов

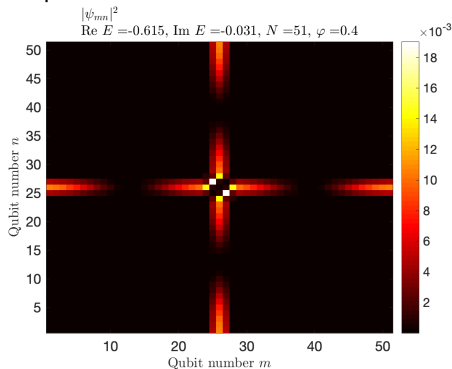


Есть ли еще интересные двухполяритонные состояния??

# Индукцированная взаимодействием локализация



## Two-particle wavefunction



$$\Psi_{nm} \approx \psi_n^{(\text{loc})} \psi_m^{(\text{free})} + \psi_m^{(\text{loc})} \psi_n^{(\text{free})}$$

- Одночастичные состояния – делокализованные стоячие волны

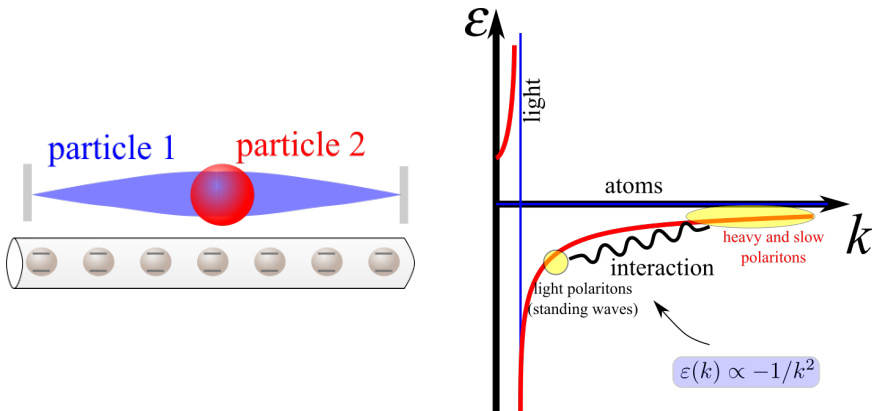
$$\psi_n \propto \cos \frac{\pi j (n - 1/2)}{N},$$

$$j = 1, 2 \dots$$

- Взаимодействие индуцирует локализацию

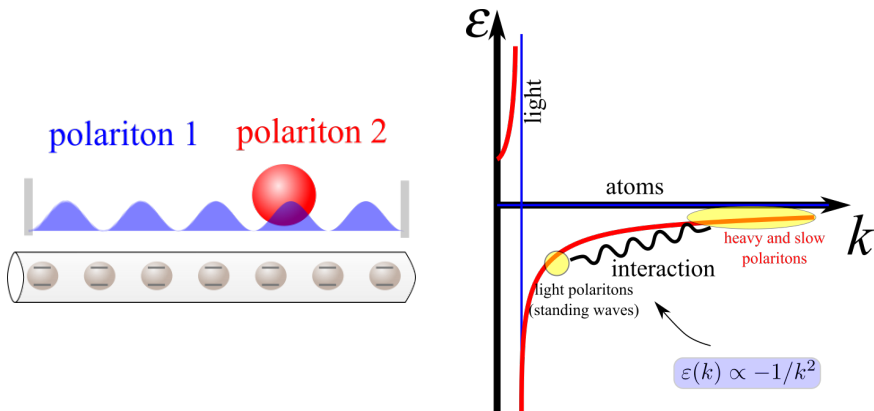
J. Zhong, N.A. Olekhno, Y. Ke, A.V. Poshakinskiy, C. Lee, Yu.S. Kivshar, and ANP, PRL 123, 253601 (2020)

# Интерпретация локализации



Тяжелый поляритон выталкивается в максимум стоячей волны, образованной легким поляритоном (аналог самоиндуцированной оптической решетки)

# Потенциал стоячей волны



- Легкий поляритон — стоячая волна
- Тяжелый поляритон движется в потенциале решетки и стоячей волны

# Движение в потенциале стоячей волны

2-частичное уравнение Шредингера

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)\psi - \underbrace{\delta_{x,y}(\partial_x^2 + \partial_y^2)}_{\text{interaction}}\psi = \frac{\varepsilon}{\varphi\Gamma_0} \underbrace{\partial_x^2 \partial_y^2}_{\text{flat dispersion}}\psi, \quad \partial^2 \equiv \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & -2 & 1 & \dots \\ & & \ddots & \\ \dots & 1 & -2 & 1 \\ \dots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Один из поляритонов — стоячая волна:

$$\psi(x, y) \approx \psi_0(x)\chi(y) + \psi_0(y)\chi(x)$$

$$\psi_0(x) \propto \cos k_j(x - \frac{1}{2}), \quad k_j = \frac{\pi j}{N}, \quad \omega_j = -\frac{2\varphi}{k_j^2}$$

Движение в потенциале стоячей волны:

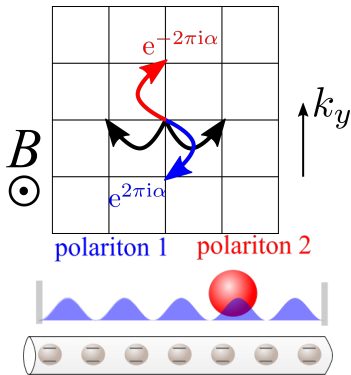
$$\chi(x+1) + \chi(x-1) - 2\chi(x) + \frac{2\varphi\Gamma_0}{\omega_j - 2\varepsilon - 2\omega_j\psi_0^2(x)}\chi(x) = 0$$

# Эффективное магнитное поле

модель сильной связи для состояний  
в квадратной решетке в магнитном поле

$$\psi_{m+1} + \psi_{m-1} + 2 \underbrace{\cos(2\pi m\alpha - k_y)}_{\text{magnetic flux}} \psi_m = \varepsilon \psi_m$$

P.G. Harper, Proc. Phys. Soc. Lond. A **68**,  
874(1955)



$$\psi(x, y) \approx \psi_0(x)\chi(y) + \psi_0(y)\chi(x), \quad \psi_0(x) \propto \cos k_j(x - \frac{1}{2}), \quad k_j = \frac{\pi j}{N}, \omega$$

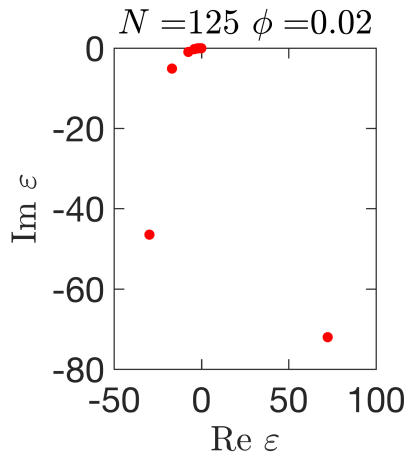
Поляритон в потенциале стоячей волны:

$$\chi(x+1) + \chi(x-1) - 2\chi(x) + \frac{2\varphi\Gamma_0}{\omega_j - 2\varepsilon - 2\omega_j\psi_0^2(x)}\chi(x) = 0$$



# Спектр одно- и двух-частичных мод

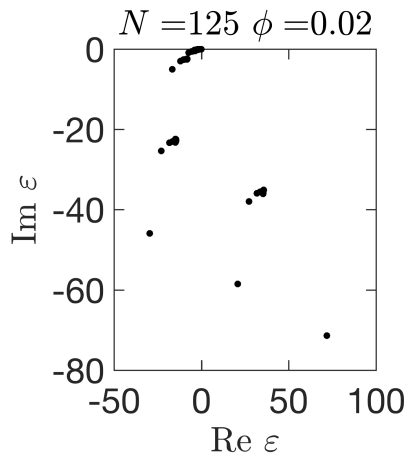
Одночастичные  
состояния,



$$\omega_j \approx -2\phi\Gamma_0/k_j^2 - 8i\phi^2/(k_j^4 N),$$

$$k_j = \pi j/N, \quad j = 1, 2, \dots$$

Два взаимодействующих  
поляритона



$$\varepsilon_{jj'} \approx (\omega_j + \omega_{j'})/2$$

# Ищем бабочек в сгущениях спектра

## Dark fermionized photons

$$\psi_{nm}^{\text{dark}} = (-1)^{n>m} [\psi_n^{\text{dark}} \psi_m^{\text{dark}} - \psi_m^{\text{dark}} \psi_n^{\text{dark}}]$$

Zhang & Molmer,  
PRL 122, 203605(2019)

Ke, Poshakinskiy, Lee,  
Kivshar & ANP  
PRL 123, 253601 (2019)

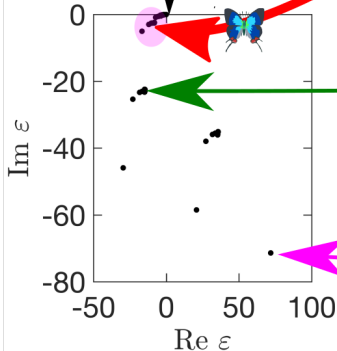
## Edge states & Hofstadter-like butterflies



$$|\Psi\rangle \approx \left| \begin{array}{c} \text{Red and Blue wave packets} \\ \text{+} \\ \text{Blue and Red wave packets} \end{array} \right\rangle$$

without interaction:

$$\epsilon \propto \frac{1}{j^2} - \frac{1}{j'^2}$$



## Interaction-induced localization

$$|\Psi\rangle \approx \left| \begin{array}{c} \text{Blue wave packet with red dot} \\ \text{+} \\ \text{Red wave packet with blue dot} \end{array} \right\rangle$$



Zhong, Olekhno, Ke,  
Poshakinskiy, Lee, Kivshar,  
and ANP, arXiv: 1911.04113,  
PRL (2020, in press)

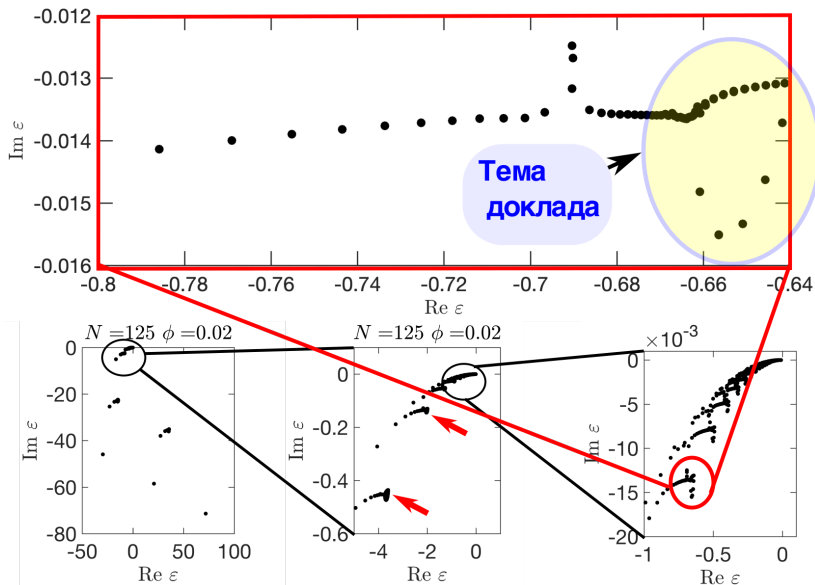
## Superradiant mode

$$\psi_{nm}^{\text{superrad}} \approx \text{const}$$

Dicke, PR 93, 99(1954)

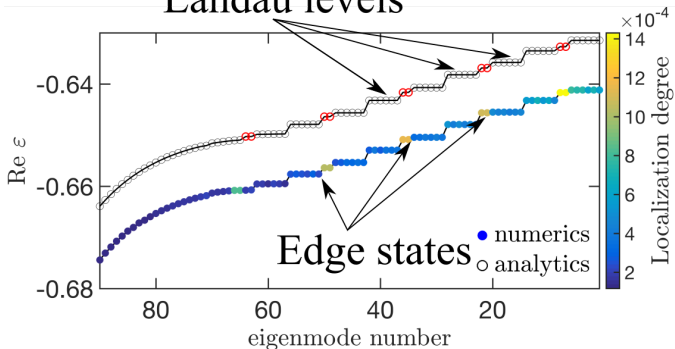
Обзор: Вл. В. Кочаровский, В. В. Железняков,  
Е. Р. Кочаровская, В. В. Кочаровский,  
Сверхизлучение: принципы генерации и реализация в лазерах  
УФН 187, 367 (2017)

# Спектр внутри одного кластера

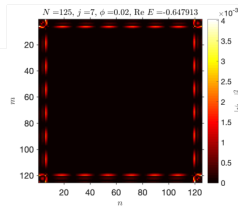


# Разрешенные зоны и краевые состояния

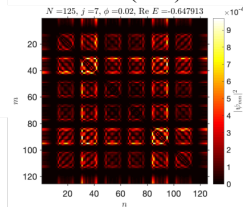
"Landau levels"



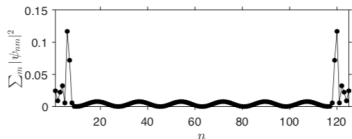
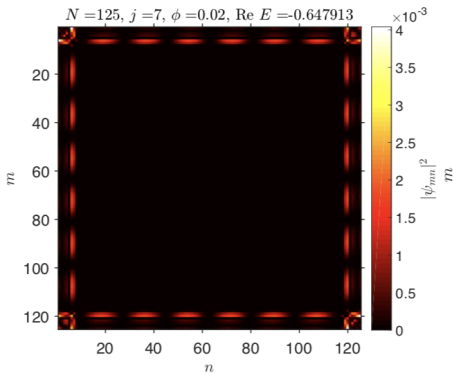
Wavefunction,  $|\Psi_{nm}|^2$   
edge state (#62)



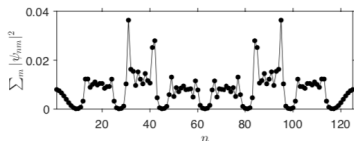
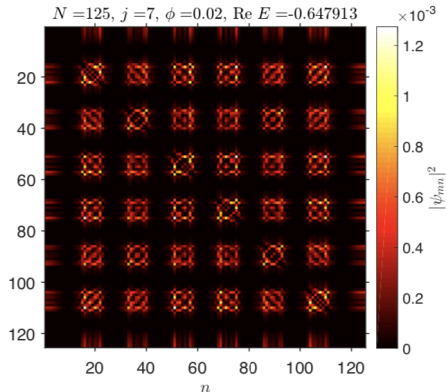
Wavefunction,  $|\Psi_{nm}|^2$   
bulk state (#63)



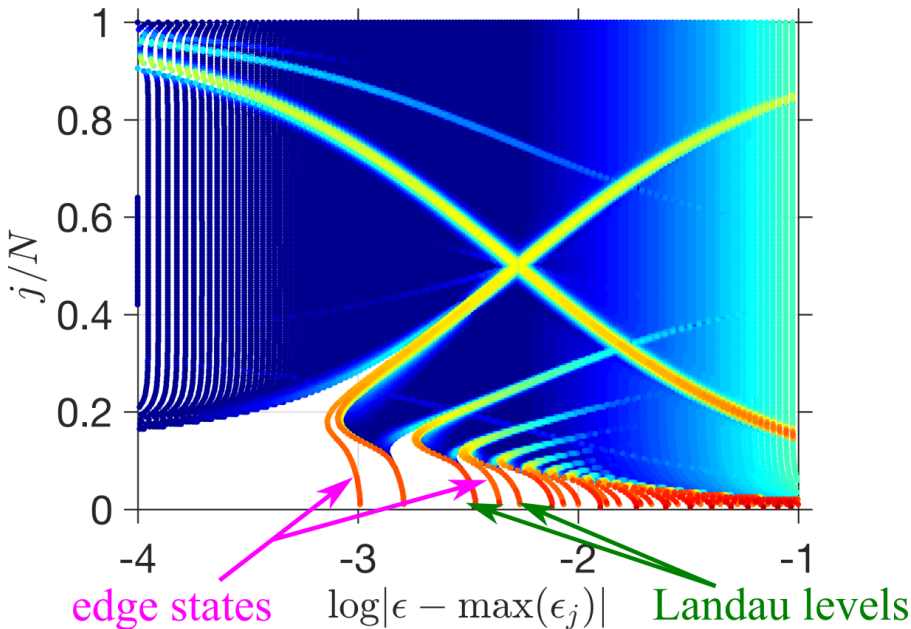
## Edge state



## Bulk state



# Зависимость от магнитного поля



# Мир двух-поляритонных состояний

## Dark fermionized photons

$$\psi_{nm}^{\text{dark}} = (-1)^{n>m} [\psi_n^{\text{dark}} \psi_m^{\text{dark}} - \psi_m^{\text{dark}} \psi_n^{\text{dark}}]$$

Zhang & Molmer,  
PRL 122, 203605(2019)

Ke, Poshakinskiy, Lee,  
Kivshar & ANP  
PRL 123, 253601 (2019)

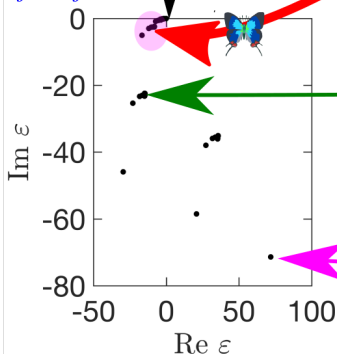
## Edge states & Hofstadter-like butterflies



$$|\Psi\rangle \approx \left| \begin{array}{c} \text{Red wave} \\ \text{Blue wave} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Blue wave} \\ \text{Red wave} \end{array} \right\rangle$$

without interaction:

$$\epsilon \propto \frac{1}{j^2} - \frac{1}{j'^2}$$



## Interaction-induced localization

$$|\Psi\rangle \approx \left| \begin{array}{c} \text{Blue wave} \\ \text{Red wave} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Red wave} \\ \text{Blue wave} \end{array} \right\rangle$$



Zhong, Olekhno, Ke,  
Poshakinskiy, Lee, Kivshar,  
and ANP, arXiv: 1911.04113,  
PRL (2020, in press)

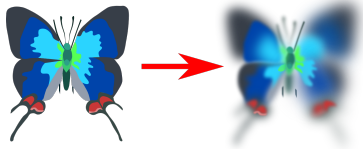
## Superradiant mode

$$\psi_{nm}^{\text{superrad}} \approx \text{const}$$

Dicke, PR 93, 99(1954)

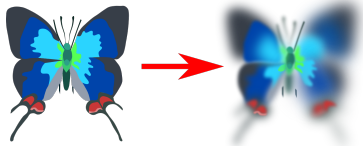
Обзор: Вл. В. Кочаровский, В. В. Железняков,  
Е. Р. Кочаровская, В. В. Кочаровский,  
Сверхизлучение: принципы генерации и реализация в лазерах  
УФН 187, 367 (2017)

# Хаотизация из-за смешивания стоячих волн

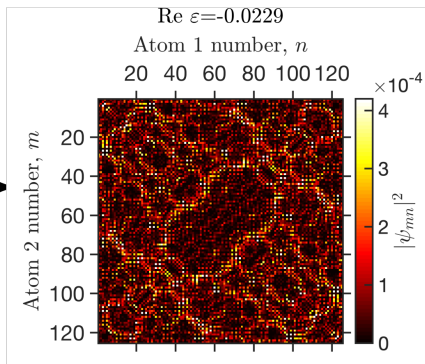
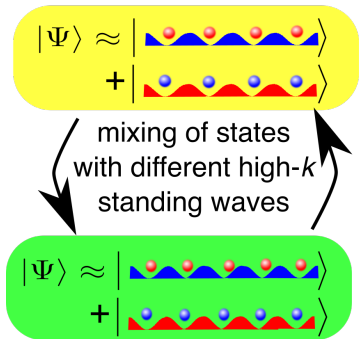




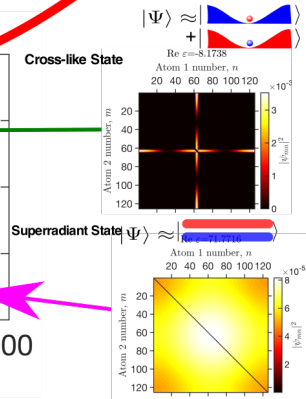
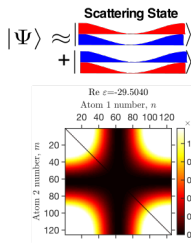
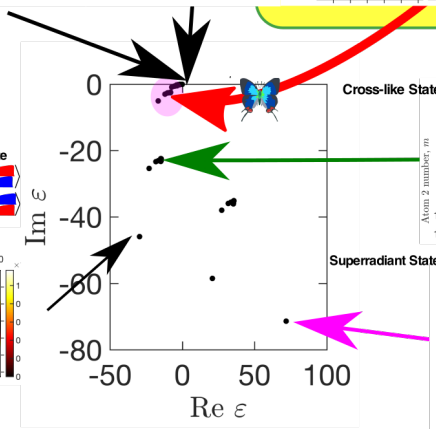
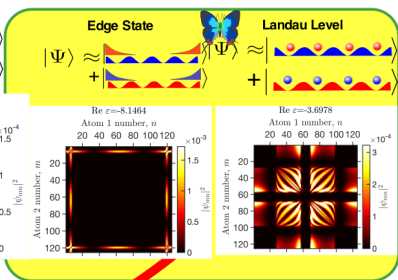
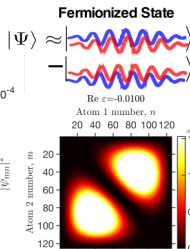
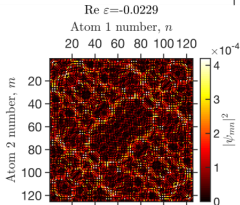
# Хаотизация из-за смешивания стоячих волн



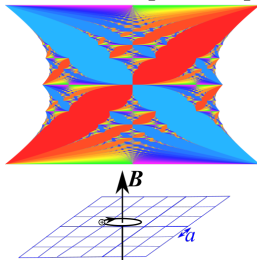
**Chaotic-like State**



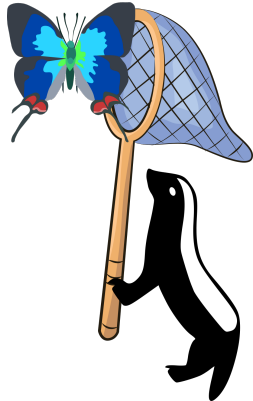
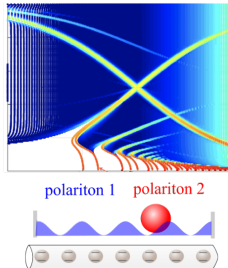
# Chaotized State



## Бабочка Хофштадтера



## двух-поляритонная квантовая бабочка



### Photon-photon interaction:

A.V. Poshakinskiy and ANP, PRA **93**, 033856 (2016)

Y. Ke, A.V. Poshakinskiy, C. Lee, Yu.S. Kivshar & ANP, PRL **123**, 253601 (2019)

ANP, arXiv: 1912.09197

### Interaction-induced localization:

J. Zhong, N.A. Olekhno, Y. Ke, A.V. Poshakinskiy, C. Lee, Yu.S. Kivshar,

### Edge states:

and ANP, PRL **123**, 253601 (2020)

A.V. Poshakinskiy, ANP, L.Pilozzi and E.L. Ivchenko, PRL **112**, 107403 (2014)

Y. Ke, J. Zhong, A.V. Poshakinskiy, Yu.S.Kivshar, ANP, & C. Lee, arXiv:2002.10074

A.V. Poshakinskiy, J. Zhong, N.A. Olekhno, Y. Ke, C. Lee, Yu.S. Kivshar, and ANP,

(2020, in preparation)

Спасибо за внимание!