Международная конференция «XIX научная школа "Нелинейные волны – 2020"»

Методы вариационной ассимиляции данных в моделях геофизической гидродинамики

Залесный В.Б., Пармузин Е.И.

Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук

4.03.2020

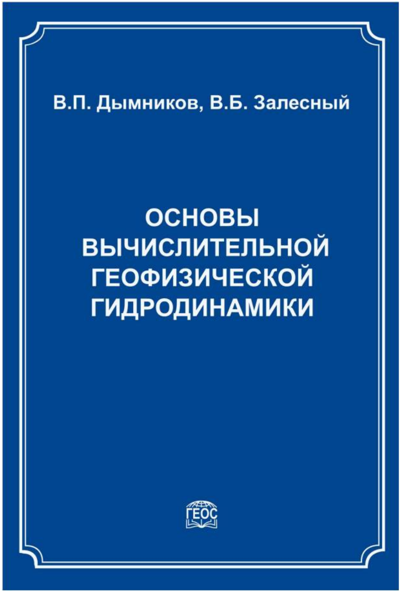
Краткое содержание доклада

1. Исторические сведения и практические идеи ассимиляци
2. Общая постановка задачи
3. Обзор методов ассимиляции
   - Объективный аналализ
   - Метод подгонки
   - Оптимальная интерполяция
   - Фильтры Калмана
4. Вариационная ассимиляция данных
   - Модель гидротермодинамики моря
   - Постановка задачи вариационной ассимиляции
   - Система оптимальности и сопряженные уравнения
   - Особенности реализации алгоритма
5. Применение вариационной ассимиляции для решения задач гидротермодинамики
   - Мировой океан
   - Черное море
   - Балтийское море

Посвящается 95-летию Г.И. Марчука

и

40-летию Института вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН



Издано при финансовой поддержке РФФИ, проект 19-15-00019

Исторические сведения

Admiral Fitzroy, XIX: субъективный анализ погоды в конкретный момент времени.

Richardson, 1922: численный прогноз погоды, используя уравнения движения атмосферы.

Charney, 1950: эксперимент Ричардсона на первом компьютере.

Charney, 1955: предложил лучшую оценку начального состояния, используя нелинейное уравнения состояния.

Phillips, 1960: исследовал проблему шума при инициализации.

Впоследствии объективный анализ заменил ручную графическую интерполяцию данных наблюдений более строгими математическими методами, начиная с полиномиальной интерполяции, последовательных алгоритмов оценивания и заканчивая современными вариационными методами.

Теоретические и практические идеи ассимиляции

В инженерной литературе: (Bucy and Joseph, 1987; Gelb, 1974; Jazwinski, 1970)
в математической: (Lions, 1968; Марчук Г.И., 1995; Gill et al, 1987)
в геофизической литературе: (Bennet, 1992; Daley, 1991; Ghil and Malanotte-Rizzoli, 1991; Kalnay, 2003)

VII международный симпозиум ВМО по ассимиляции данных наблюдений в метеорологии и океанографии (Бразилия, сентябрь 2017г.: http://www.cptec.inpe.br/das2017/) показал существенный прогресс в практическом применении современных методов усвоения, основанных как на подходе оптимального управления (вариационной ассимиляции данных), так и на подходе последовательного оценивания (статистические методы), а также на комбинации обоих подходов (гибридный метод).

Основные понятия и обозначения

Рассмотрим математическую модель, описывающую эволюцию гидродинамической системы в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = M(x, t), \quad t > 0 \\ x\big|_{t=0} = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

где x – вектор состояния модели, M – динамический оператор модели, x_0 – вектор начального состояния. При численном моделировании или прогнозе динамический оператор M в общем случае нелинейный и детерминированный, в то время как истинное поле отличается от модельного на случайную или систематическую ошибку.
Как правило, в геофизической гидродинамике (1) есть система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, которую в математической литературе часто называют системой с распределенными параметрами. Зависимую переменную x называют "полем".

Наблюдения

Наблюдения задаются некоторой вектор-функцией $y^0(t)$, которая удовлетворяет уравнению

$$y^0(t) = H\left(x^t, t\right) + \varepsilon, \tag{2}$$

где H – оператор наблюдений, x^t - истинное поле, ε - функция ошибки (шум). Функция $y^0(t)$ считается заданной, в то время как информация о ε, как правило, отсутствует. Оператор H, так же как M, может быть нелинейным, а также зависеть в общем случае от вектора состояния x. Он задает отображение вектора состояния в пространство наблюдений.

Дискретизация

При дискретизации непрерывной модели по времени часто приходят к дискретной модели, описывающей переход от момента времени t_i в момент t_{i+1}:

$$x\left(t_{i+1}\right) = M_i\left(x\left(t_i\right)\right), \tag{3}$$

где $x\left(t_i\right)$ - вектор состояния размерности n, i – номер шага по времени, M_i - разностный оператор перехода со слоя на слой.
При рассмотрении дискретной модели наблюдения y^0 в момент времени t_i задаются уравнением

$$y_i^0 = H_i\left(x^t\left(t_i\right)\right) + \varepsilon_i, \tag{4}$$

где H_i - оператор наблюдений в момент времени $t = t_i$, x^t - истинное поле течений, ε_i - функция ошибки. Векторы y_i^0 имеют размерности p_i. В большинстве практических задач p_i много меньше n.

Задача об усвоении данных

Для предсказания эволюции течений в задачах геофизической гидродинамики требуется дополнительная информация о модели (например, начальные условия, неизвестные параметры модели). Эту информацию можно получить с помощью данных наблюдений.

Задача об усвоении данных: *при заданной функции наблюдений $y^0(t)$ требуется найти неизвестные параметры модели (например, начальное условие), так, чтобы вектор состояния x удовлетворял исходной непрерывной задаче, а вектор $H(x)$ был близок в каком-либо смысле к $y^0(t)$*.

Найденное в результате решение x называется оценкой состояния и обозначается x^a.

Объективный анализ

Первая попытка объективного анализа данных была выполнена Пановски (Panosky, 1949). Суть его метода – двумерная (2-D) полиномиальная интерполяция данных наблюдений (Кибель, 1949). В дальнейшем этот подход был развит Гилкристом и Крессманом (Gilchrist and Cressman, 1954), которые ввели область влияния для каждого наблюдения и предложили использовать так называемое поле "бэкграунда" (поле из предыдущего прогноза).

В подходе Бергторссона и Дуза (Bergthorsson and Doos, 1955) поле "бэкграунда" играет более важную роль – их методика усвоения основана на анализе разности данных наблюдений и "бэкграунда", а не самих значений функции наблюдений. Они попытались оптимизировать веса, приписанные каждому наблюдению. Впоследствии модификация этого подхода была дана Крессманом (Cressman, 1959) и состояла в нескольких итерациях анализа – так называемый *метод последовательных поправок*, или SCM-метод (Successive Correction Method).

Обобщения: метод подгонки (Nudging)

В метеорологии: (Hoke, Anthens, 1976).

В океанографии: (Verron, 1990; Blayo et al, 1994).

BFN-алгоритм (back and forth nudging): (Blum, Auroux, 2005).

Основная идея:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = M(x,t) + K\left(y^0 - H(x)\right), \ t \in (0,T) \\ x\big|_{t=0} = x_0, \end{cases} \tag{5}$$

где K – весовой оператор (nudging or gain matrix).

Статистическая интерполяция

Этот подход восходит к Колмогорову (Колмогоров А.Н., 1941), работам Винера (Wiener, 1949), а в науках о Земле он стал известен благодаря монографии Гандина (Гандин Л.С., 1963). Такой подход обычно называют *оптимальной интерполяцией* (OI – Optimal Interpolation) (Lorenc, 1981; McPherson et al, 1979). Наблюдениям присваивают веса, которые связаны с ошибками наблюдений. В тоже время поле "бэкграунда" не является первым приближением для анализа, как ранее, а вместо этого оно является дополнительным полезным источником информации вместе со своей характеристикой ошибки.

Приложения метода

Метод оптимальной интерполяции применялся во многих оперативных центрах, начиная с конца 1970-х годов (ECMWF, Lorenc, 1981; Met Office, Lyne et al., 1982). В дальнейшем этот метод получил развитие в работах Лоренца (Lorenc, 1986; Lorenc et al., 1991), который использовал различные аппроксимации для решения уравнений состояния. Лоренц (Lorenc et al., 1991) предложил "гибрид" двух методов – оптимальной интерполяции и последовательных поправок Метод оптимальной интерполяции и его модификации до настоящего времени наиболее широко используются для оперативного анализа данных при предсказании погоды (Lorenc, 1986; Thiebaux and Pedder 1987; Douville et al., 2000), а также при ассимиляции океанографических данных (Carton and Hackert, 1989; Derber and Rosati, 1989; Smith, Cummings, 2012). Большую популярность приобрел метод ансамблевой оптимальной интерполяции (EnOI) (Evensen, 2003; Sakov et al., 2015), который позволяет построить параллельные алгоритмы усвоения данных (Кауркин М.Н., Ибраев Р.А., Беляев К.П., 2016).

Фильтр Калмана и его обобщения

Статистический метод ассимиляции был предложен Калманом в 1960 г., который и стали называть *фильтром Калмана*. Непрерывный аналог данного метода называют фильтром Калмана-Бьюси (Kalman and Bucy, 1961). Существуют различные обобщения этого метода на нелинейный случай (Jazwinski, 1970). В настоящее время большим успехом пользуется *расширенный фильтр Калмана* – метод EKF (extended Kalman filter) (Ghil et al, 1982; Budgell, 1986), который использует линеаризацию модели около некоторого состояния, а также *ансамблевый фильтр Калмана* – метод EnKF (ensemble Kalman filter) (Evensen, 2003, 2007; Kalnay et al., 2007; Fertig et al., 2007; Zhang et al., 2009). Многоэлементный четырехмерный анализ гидрофизических полей на основе динамико-стохастических моделей разрабатывался в МГИ (Саркисян А.С., Кныш В.В., Демышев С.Г., Коротаев Г.К., 1986, 1987). Модификации алгоритма Калмана на основе аппроксимаций ковариационных матриц использовались при моделировании циркуляции Черного моря (Кныш В.В., Коротаев Г.К., Мизюк А.И., Саркисян А.С., 2012).

Вариационные методы

Значительным прорывом в решении задач усвоения данных было применение вариационных методов и, в частности, методов оптимального управления. Очень плодотворной оказалась идея минимизировать некоторый функционал, связанный с данными наблюдений, на траекториях (решениях) рассматриваемой модели. Тем самым, задача об усвоении данных формулируется как задача оптимального управления. Теоретические основы исследования и решения таких задач заложены в классических работах (Р. Беллман, 1957; Л.С. Понтрягин, 1962; Н.Н. Красовский, 1969; Ж.-Л. Лионс, 1968; Г.И. Марчук, 1975).
Впервые вариационный формализм был использован в метеорологии Сасаки (Sasaki, 1970), а в задачах динамической океанографии – Прово и Сальмоном (Provost and Salmon, 1986).

Сопряженные уравнения

Как известно, при решении задач минимизации возникает необходимость вычислять градиент исходного функционала. Важным шагом в этом направлении было использование теории сопряженных уравнений (Марчук, 1964; Лионс, 1968). Начиная с известных работ (Марчук Г.И., Пененко В.В., 1978; Le Dimet and Talagrand, 1986; Lewis and Derber, 1985), применение сопряженных уравнений для исследования и численного решения задач об усвоения данных (в том числе для вычисления градиента функционала) широко практикуется многими исследователями (Courier and Talagrand, 1987; Lorenc, 1988; Navon, 1986; Агошков В.И., Марчук Г.И., 1993; Марчук Г.И., Залесный В.Б., 1993; Венцель М., Залесный В.Б., 1996; Шутяев В.П., 2001; Агошков В.И., Пармузин Е.И., Шутяев В.П., 2008, 2013, и др.).

3D-VAR и 4D-VAR

Первые применения трехмерного вариационного усвоения данных (3D-VAR) для операционного анализа были сделаны в Национальном Центре предсказаний NCEP (Parrish and Derber, 1992), а позднее в Европейском Центре прогноза погоды ECMWF и NASA Data Assimilation Office (Cohn et al, 1998).

В настоящее время все больший интерес вызывает четырехмерное усвоение данных (4D-VAR), при котором линеаризованные модели и сопряженные к ним используются для ассимиляции данных наблюдений не в конкретный момент времени, а на заданном временном интервале. Впервые система 4D-VAR была применена в Европейском Центре прогноза погоды (Courtier et al, 1994).

Задачи оптимального управления

Задачи об усвоении данных, решаемые как задачи оптимального управление

- Задача о восстановление начального условия – задача инициализации: $dx/dt = M(x,t), \quad x\big|_{t=0} = u, \quad \inf\limits_{u} J(x,u)$

Задачи оптимального управления

Задачи об усвоении данных, решаемые как задачи оптимального управление

- Задача о восстановление начального условия – задача инициализации: $dx/dt = M(x,t), \quad x\big|_{t=0} = u, \quad \inf\limits_{u} J(x,u)$
- Задача о восстановление или уточнении правой части: $dx/dt = M(x,t) + f, \quad \inf\limits_{f} J(x,f)$

Задачи оптимального управления

Задачи об усвоении данных, решаемые как задачи оптимального управление

- Задача о восстановление начального условия – задача инициализации: $dx/dt = M(x,t), \quad x\big|_{t=0} = u, \quad \inf\limits_{u} J(x,u)$
- Задача о восстановление или уточнении правой части: $dx/dt = M(x,t) + f, \quad \inf\limits_{f} J(x,f)$
- Задача об уточнении граничных условий: $dx/dt = M(x,t), \quad x\big|_{\partial\Omega} = u, \quad \inf\limits_{u} J(x,u)$

Задачи оптимального управления

Задачи об усвоении данных, решаемые как задачи оптимального управление

- Задача о восстановление начального условия – задача инициализации: $dx/dt = M(x,t), \quad x\big|_{t=0} = u, \quad \inf\limits_u J(x,u)$
- Задача о восстановление или уточнении правой части: $dx/dt = M(x,t) + f, \quad \inf\limits_f J(x,f)$
- Задача об уточнении граничных условий: $dx/dt = M(x,t), \quad x\big|_{\partial\Omega} = u, \quad \inf\limits_u J(x,u)$
- Задача о восстановлении параметров модели: $dx/dt = \mu_1 M_1(x,t) + \nu M_2(x,t), \quad \inf\limits_\mu J(x,\mu)$

4D-VAR: Постановка задачи

Рассмотрим задачу на интервале $(0, T)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = M(x, t), \quad t \in (0, T) \\ x\big|_{t=0} = x_0 \end{cases} \tag{6}$$

и введем функционал от ее решения:

$$J(x_0) = \frac{1}{2}\left(C_1\left(x_0 - x_0^b\right), x_0 - x_0^b\right) + \frac{1}{2}\int\limits_0^T \left(C_2\left(Hx - y^0\right), Hx - y^0\right) dt,$$

где H – (линейный) оператор наблюдений, y^0 – функция наблюдений, x_0^b – заданный вектор, C_1, C_2 – весовые операторы, $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение. Как правило, C_1, C_2 выбираются в виде: $C_1 = B^{-1}$, $C_2 = R^{-1}$, где B, R – ковариационные матрицы векторов $\xi = x_0^b - x^t\big|_{t=0}$ и ε, соответственно: $B = E(\xi\xi^T)$, $R = E(\varepsilon\varepsilon^T)$. Такие весовые операторы (или их приближения) часто выбираются в практических задачах (Ghil and Malanotte–Rizzoli, 1991; Ide et al, 1997).

Предположим, что начальное условие x_0 нам неизвестно. Тогда *задача об усвоении данных* формулируется следующим образом: найти x_0, x такие, что они удовлетворяют системе и на множестве решений функционал J достигает своего наименьшего значения:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = M\left(x, t\right), \quad t \in (0, T) \\ x\big|_{t=0} = x_0, \\ J\left(x_0\right) = \inf\limits_{v} J\left(v\right). \end{cases} \tag{7}$$

Градиент функционала

По определению

$$J'\delta x_0 = \left(C_1\left(x_0 - x_0^b\right), \delta x_0\right) + \int\limits_0^T \left(C_2\left(Hx - y^0\right), H\delta x\right) dt,$$

где δx удовлетворяет системе TLM (tangent linear model):

$$\begin{cases} \dfrac{d\delta x}{dt} = M'(x,t)\,\delta x, \quad t \in (0,T) \\ \left.\delta x\right|_{t=0} = \delta x_0. \end{cases} \tag{8}$$

Сопряженная задача

Пусть

$$\begin{cases} -\dfrac{dx^*}{dt} = \left(M'\left(x,t\right)\right)^* x^* - p, \\ x^*\big|_{t=T} = 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $p = H^* C_2 \left(Hx - y^0\right)$. Тогда из соотношения сопряженности

$$\int\limits_0^T \left(p, \delta x\right) dt = -\left(x^*|_{t=0}, \delta x_0\right)$$

получаем градиент

$$J'\delta x_0 = \left(C_1\left(x_0 - x_0^b\right), \delta x_0\right) + \int\limits_0^T \left(p, \delta x\right) dt = \left(C_1\left(x_0 - x_0^b\right) - x^*|_{t=0}, \delta x_0\right)$$

Система оптимальности

Необходимое условие оптимальности (Lions, 1968) приводит задачу к системе для трех неизвестных x_0, x, x^*:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = M\left(x, t\right), \quad t \in (0, T) \\ x\big|_{t=0} = x_0, \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{dx^*}{dt} = \left(M'\left(x, t\right)\right)^* x^* - H^* C_2 \left(Hx - y^0\right), \\ x^*\big|_{t=T} = 0, \end{cases} \tag{11}$$

$$C_1 \left(x_0 - x_0^b\right) - x^*\big|_{t=0} = 0, \tag{12}$$

где $\left(M'\left(x, t\right)\right)^*$ – оператор, сопряженный к производной оператора модели M.

Эта система может быть получена также из принципа максимума Понтрягина, сформулированного для исходной задачи минимизации (Marchuk, Zalesny, 1993), или методом множителей Лагранжа (Евтушенко Ю.Г. и др., 1997).

Численные алгоритмы

Численное решение задач вариационной ассимиляции осуществляется в настоящее время известными алгоритмами оптимизации, разработанными в классических трудах (Красовский Н.Н., 1969; Ж. Лионс, 1968; Моисеев Н.Н., 1971; Черноусько Ф.Л. и Баничук В.П., 1973; Самарский А.А., 1997; Васильев Ф.П., 1988; Р. Федоренко, 1978; Евтушенко Ю.Г., 1982; и др.). Ряд новых итерационных алгоритмов решения задач об усвоении данных с использованием сопряженных уравнений предложены в работах В.И. Агошкова и Г.И. Марчука (1993), Г.И. Марчука и В.Б. Залесного (1993), В.П. Шутяева (2001), Агошкова В.И., Пармузина Е.И., Шутяева В.П. (2008) и др.

Для построения численного алгоритма решения задачи об усвоении данных можно использовать известные методы минимизаци, либо решать систему оптимальности. При численном решении задачи часто необходимо вычислять градиент исходного функционала J. Это можно делать с помощью выбранной подходящим образом сопряженной задачи. В нашем примере градиент функционала вычисляется следующим образом: при заданном v находим последовательно решения прямой и сопряженной задач:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = M(x,t), \quad t \in (0,T) \\ x\big|_{t=0} = v, \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{dx^*}{dt} = (M'(x,t))^* x^* - H^* C_2 \left(Hx - y^0\right), \\ x^*\big|_{t=T} = 0 \end{cases} \tag{14}$$

и полагаем

$$J'(v) = C_1 \left(v - x_0^b\right) - x^*\big|_{t=0}. \tag{15}$$

4D-Var: обобщения

Алгоритмы четырехмерного усвоения данных (Bennett, 1991; Kalney E., 2003; Daley, 1991) представляются в настоящее время наиболее эффективными. В последние годы появилось много работ по сравнению ансамблевого метода Калмана и вариационного усвоения данных (Kalnay et al., 2007; Caya et al., 2005; Fertig et al., 2007; Zhang et al., 2009), кроме того появился так называемый гибридный подход, сочетающий в себе ансамблевый метод и вариационную ассимиляцию данных (Kalnay et al., 2007; Caya et al., 2005; Fertig et al., 2007; Tian et al., 2008; Zhang et al., 2009), а также ансамблевый метод 4D-Var (Talagrand, Jardak, 2012) .

Приложение к задачам гидротермодинамики

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + \left[\begin{array}{cc} 0 & -f \\ f & 0 \end{array} \right] \vec{u} - g \cdot grad\xi + A_u\vec{u} + (A_k)^2\vec{u} =$$

$$= \vec{f} - \tfrac{1}{\rho_0} grad P_a - \tfrac{g}{\rho_0} grad \int\limits_0^z \rho_1(T,S)dz',$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} - m\frac{\partial}{\partial x}(\int\limits_0^H \Theta(z)udz) - m\frac{\partial}{\partial y}(\int\limits_0^H \Theta(z)\frac{n}{m}vdz) = f_3,$$

$$\frac{dT}{dt} + A_T T = f_T,\ \frac{dS}{dt} + A_S S = f_S,$$

где

$$\bar{f} = g \cdot grad G,\ \Theta(z) \equiv \frac{r^2(z)}{R^2}, \quad r = R - z, \quad 0 < z < H.$$

Граничные условия на поверхности моря

$$
\begin{cases}
\left(\int\limits_0^H \Theta \vec{u} dz \right) \vec{n} + \beta_0 m_{op} \sqrt{gH}\, \xi = m_{op} \sqrt{gH}\, d_s \text{ на } \partial\Omega, \\
U_n^{(-)} u - \nu \dfrac{\partial u}{\partial z} - k_{33} \dfrac{\partial}{\partial z} A_k u = \tau_x^{(a)} \Big/ \rho_0, \;\; U_n^{(-)} v - \nu \dfrac{\partial v}{\partial z} - k_{33} \dfrac{\partial}{\partial z} A_k v = \tau_y^{(a)} \\
A_k u = 0, \quad A_k v = 0, \\
U_n^{(-)} T - \nu_T \dfrac{\partial T}{\partial z} + \gamma_T (T - T_a) = Q_T + U_n^{(-)} d_T, \\
\qquad U_n^{(-)} S - \nu_S \dfrac{\partial S}{\partial z} + \gamma_S (S - S_a) = Q_S + U_n^{(-)} d_S,
\end{cases}
$$

где $\vec{U} = (u, v, w) \equiv (\vec{u}, w)$, $U_n^{(-)} = (|U_n| - U_n)/2$.

Граничные функции d_T, d_S or Q_T, Q_S тоже могут быть неизвестными.

Получив решение системы $\phi = (u, v, \xi, T, S)$ можно вычислить остальные параметры системы

$$w(x, y, z, t) = \frac{1}{r}(m\frac{\partial}{\partial x}(\int\limits_z^H rudz')+m\frac{\partial}{\partial y}(\frac{n}{m}\int\limits_z^H rvdz')), (x, y, t) \in \Omega\times(0,\ \bar{t}),$$

$$P(x, y, z, t) = P_a(x, y, t) + \rho_0 g(z - \xi) + \int\limits_0^z g\rho_1(T, S)dz'.$$

Рассматриваются устойчивые неявные алгоритмы

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (A_1\varphi + A_3\varphi + \cdots + A_n\varphi) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi^0, \quad A_i \geq 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi^{j+1/n}}{\partial t} + A_1\varphi^{j+1/n} = 0, \quad \varphi^{j+1/n} = \varphi^0 \\ -------------- \\ \dfrac{\partial\varphi^{j+1}}{\partial t} + A_n\varphi^{j+1} = 0, \quad \varphi^{j+1} = \varphi^{j+(n-1)/n} \end{cases}$$

Схема расщепления. Температура.

Шаг 1.

$$
\begin{cases}
T_t + (\bar{U}, \mathbf{Grad})T - \mathbf{Div}(\hat{a}_T \cdot \mathbf{Grad}\ T) = f_T \text{ в } D \times (t_{j-1}, t_j),\\
T = T_{j-1} \text{ при } t = t_{j-1} \text{ в } D,\\
\bar{U}_n^{(-)} T - \nu_T \dfrac{\partial T}{\partial z} + \gamma_T (T - T_a) = Q_T + \bar{U}_n^{(-)} d_T \text{ на } \Gamma_S \times (t_{j-1}, t_j),\\
\dfrac{\partial T}{\partial N_T} = 0 \text{ на } \Gamma_{w,c} \times (t_{j-1}, t_j),\\
\bar{U}_n^{(-)} T + \dfrac{\partial T}{\partial N_T} = \bar{U}_n^{(-)} d_T + Q_T \text{ на } \Gamma_{w,op} \times (t_{j-1}, t_j),\\
\dfrac{\partial T}{\partial N_T} = 0 \text{ на } \Gamma_H \times (t_{j-1}, t_j),\\
T_j \equiv T \text{ на } D \times (t_{j-1}, t_j),
\end{cases}
$$

Схема расщепления. Соленость.

Шаг 2.

$$\begin{cases} S_t + (\bar{U}, \mathbf{Grad})S - \mathbf{Div}(\hat{a}_S \cdot \mathbf{Grad}\ S) = f_S \text{ в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ S = S_{j-1} \text{ при } t = t_{j-1} \text{ в } D, \\ \bar{U}_n^{(-)} S - \nu_S \dfrac{\partial S}{\partial z} + \gamma_S (S - S_a) = Q_S + \bar{U}_n^{(-)} d_S \text{ на } \Gamma_S \times (t_{j-1}, t_j), \\ \dfrac{\partial S}{\partial N_S} = 0 \text{ на } \Gamma_{w,c} \times (t_{j-1}, t_j), \\ \bar{U}_n^{(-)} S + \dfrac{\partial S}{\partial N_S} = \bar{U}_n^{(-)} d_S + Q_S \text{ on } \Gamma_{w,op} \times (t_{j-1}, t_j), \\ \dfrac{\partial S}{\partial N_S} = 0 \text{ на } \Gamma_H \times (t_{j-1}, t_j), \\ S_j \equiv S \text{ в } D \times (t_{j-1}, t_j). \end{cases}$$

Схема расщепления. Скорости.

Шаг 3.

$$
\begin{cases}
\underline{u}_t^{(3)} + (\bar{U}, \mathbf{Grad})\underline{u}^{(3)} - \mathbf{Div}(\hat{a}_u \cdot \mathbf{Grad}\ )\underline{u}^{(3)} + (A_k)^2\underline{u}^{(3)} = 0 \text{ в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\
\underline{u}^{(3)} = \underline{u}^{(2)} \text{ при } t = t_{j-1} \text{ в } D, \\
\bar{U}_n^{(-)}\underline{u}^{(3)} - \nu_u \frac{\partial \underline{u}^{(3)}}{\partial z} - k_{33}\frac{\partial}{\partial z}(A_k\underline{u}^{(3)}) = \frac{\tau^{(a)}}{\rho_0}, A_k\underline{u}^{(3)} = 0 \text{ на} \Gamma_S \times (t_{j-1}, t_j), \\
U_n^{(3)} = 0, \frac{\partial U^{(3)}}{\partial N_u} \cdot \bar{\underline{\tau}}_w + \left(\frac{\partial}{\partial N_k} A_k\underline{u}^{(3)}\right) \cdot \underline{\tau}_w = 0, A_k\underline{u}^{(3)} = 0 \text{ на } \Gamma_{w,c} \times (t_{j-1}, t_j), \\
\bar{U}_n^{(-)}(\tilde{U}^{(3)} \cdot \underline{N}) + \frac{\partial \tilde{U}^{(3)}}{\partial N_u} \cdot \bar{N} + \left(\frac{\partial}{\partial N_k} A_k\underline{u}^{(3)}\right) \cdot \bar{N} = \bar{U}_n^{(-)}d, A_k\underline{u}^{(3)} = 0 \text{ на } \Gamma_{w,op} \times (t_{j-1}, t_j), \\
\bar{U}_n^{(-)}(\tilde{U}^{(3)} \cdot \bar{\tau}_w) + \frac{\partial \tilde{U}^{(3)}}{\partial N_u} \cdot \bar{\tau}_w + \left(\frac{\partial}{\partial N_k} A_k\underline{u}^{(3)}\right) \cdot \underline{\tau}_w = 0, A_k\underline{u}^{(3)} = 0 \text{ на } \Gamma_{w,op} \times (t_{j-1}, t_j), \\
\dfrac{\partial \underline{u}^{(3)}}{\partial N_u} = \dfrac{\tau^{(b)}}{\rho_0} \text{ на } \Gamma_H \times (t_{j-1}, t_j),
\end{cases}
$$

где

$$
\underline{u}^{(3)} = (u^{(3)}, v^{(3)}),\ \ \tau^{(a)} = (\tau_x^{(a)}, \tau_y^{(a)}),
$$
$$
U^{(3)} = (u^{(3)}, w^{(3)}(u^{(3)}, v^{(3)})),\ \ \tilde{U}^{(3)} = (u^{(3)}, 0),\ \ \ \tau^{(b)} = (\tau_x^{(b)}, \tau_y^{(b)}).
$$

Расщепление температурного блока

Рассматриваем уравнение для температуры T в операторной форме

$$(T)_t + LT = \mathcal{F} + BQ, \quad t \in (t_{j-1}, t_j),$$
$$T = T_{j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, J,$$

дальнейшее применении схемы расщепление приводит к следующим шагам:

Шаг 1.1:

$$(T_1)_t + L_1 T_1 = \mathcal{F}_1, \quad t \in (t_{j-1}, t_j),$$
$$T_1 = T_{j-1} \quad \text{при} \quad t = t_{j-1}$$

Шаг 1.2:

$$(T_2)_t + L_2 T_2 = \mathcal{F}_2 + BQ, \quad t \in (t_{j-1}, t_j),$$
$$T_2(t_{j-1}) = T_1(t_j).$$

$$T_2(t_j) \equiv T_j \cong T \quad \text{при} \quad t = t_j.$$

Задача для температуры

$$
\begin{cases}
T_t + (\bar{U}, \mathbf{Grad})T - \mathbf{Div}(\hat{a}_T \cdot \mathbf{Grad}\ \ T) = f_T \text{ в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\
T = T_{j-1} \text{ при } t = t_{j-1} \text{ в } D, \\
-\nu_T \dfrac{\partial T}{\partial z} = Q \quad \text{на} \quad \Gamma_S \times (t_{j-1}, t_j), \\
\dfrac{\partial T}{\partial N_T} = 0 \text{ на } \Gamma_{w,c} \times (t_{j-1}, t_j), \\
\bar{U}_n^{(-)} T + \dfrac{\partial T}{\partial N_T} = \bar{U}_n^{(-)} d_T + Q_T \text{ на } \Gamma_{w,op} \times (t_{j-1}, t_j), \\
\dfrac{\partial T}{\partial N_T} = 0 \text{ на } \Gamma_H \times (t_{j-1}, t_j), \\
T_j \equiv T \text{ на } D \times (t_{j-1}, t_j).
\end{cases}
$$

Вариационная ассимиляция поверхностной темепартуры

Пусть дополнительной неизвестной ("управлением") является функция полного потока Q. Введем функционал стоимости вида:

$$J_\alpha \equiv J_\alpha(Q,\phi) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\bar t}\int\limits_\Omega \alpha|Q - Q^{(0)}|^2 d\Omega dt + J_0(\phi),$$

$$J_0(\phi) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\bar t}\int\limits_\Omega m_0|T - T_{obs}|^2 d\Omega dt.$$

Здесь: $\alpha \equiv \alpha(\lambda,\theta,t)$ – функция, играющая роль регуляризатора (возможен случай, когда $\alpha(\lambda,\theta,t)$ =const≥ 0) и которая может быть размерной величиной, а $Q^{(0)} \equiv Q^{(0)}(\lambda,\theta,t)$ – заданная функция (которая может быть также и тривиальной).

Задача вариационной ассимиляции формулируется следующим образом: *требуется найти решение ϕ Задачи и функцию Q, такие, чтобы на них функционал принимал наименьшее значение.*

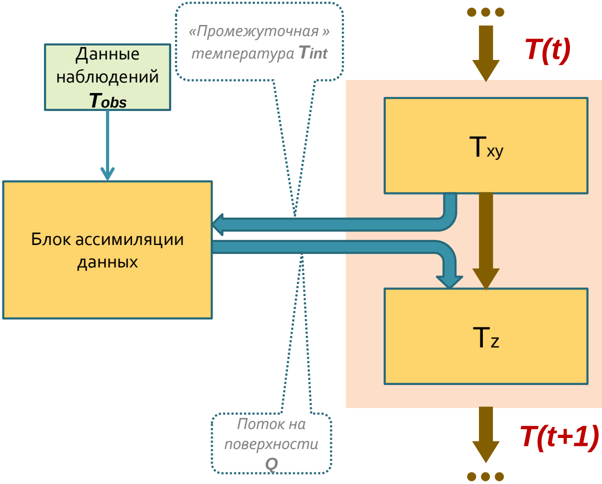
Система оптимальности для решения задачи о ТПМ

$$\begin{cases} T_t + \dfrac{1}{2}\left(w_1 \dfrac{\partial T}{\partial z} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial (r^2 w_1 T)}{\partial z}\right) - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial z} r^2 \nu_T \dfrac{\partial T}{\partial z} = f_T, \quad T = T_1(t_j) \\ -\nu_T \dfrac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=0} = Q, \qquad \nu_T \dfrac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=H} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_t^* - \dfrac{1}{2}\left(w_1 \dfrac{\partial T^*}{\partial z} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial (r^2 w_1 T^*)}{\partial z}\right) - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(r^2 \nu_T \dfrac{\partial T^*}{\partial z}\right) = 0 \\ \nu_T \dfrac{\partial T^*}{\partial z}\Big|_{z=H} = 0, \quad \left(-w_1 T^* - \nu_T \dfrac{\partial T^*}{\partial z}\right)\Big|_{z=0} = m_0 (T - T_{\mathrm{obs}}), \end{cases}$$

$$\alpha_0 (Q - Q^{(0)}) + T^* = 0$$

Схема ассимиляции

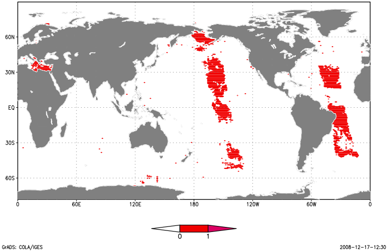


Вариационная ассимиляция. Мировой океан

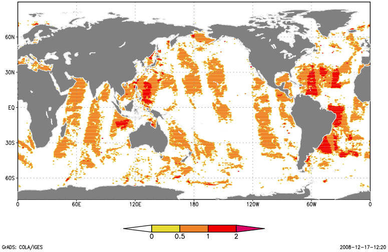
Параметры расчетной области:

- сетка 360x337x40 точек(широта$\times$долгота$\times$глубина);
- первая точка сетки – 22.5 (градусов восточной долготы) и 78.25 (градусов южной широты).
- Шаги сетки по x и по y 1.0 и 0.5 градуса.
- Шаг по времени $\Delta t = 1$ час.
- В качестве T_{obs} использовались данные поверхностной температуры Мирового океана, представленные Лебедевым С.А. (ГЦ РАН) на сетке модели, за январь 2004 г. в каждый момент времени на рассматриваемой сетке (т.е. каждый час).
- В качестве $Q^{(0)}$ использовался среднеклиматический поток за январь 2004 г., полученный по данным реанализа NCEP (National Centers for Environmental Prediction).
- Расчет включал в себя ассимиляцию T_{obs} и расчет сроком до 30 суток (январь 2004 г.).

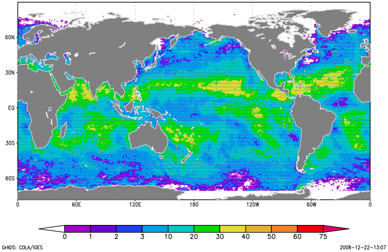
Данные наблюдений. Мировой океан



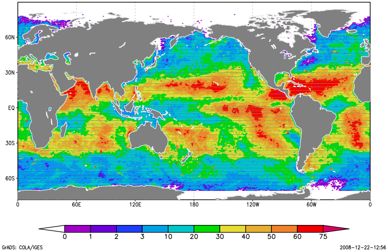
(a) Количество данных за час



(b) Количество данные за 6 часов

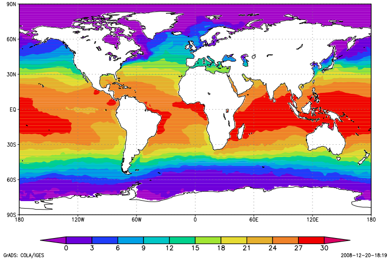


(c) Количество данные за 15 дней

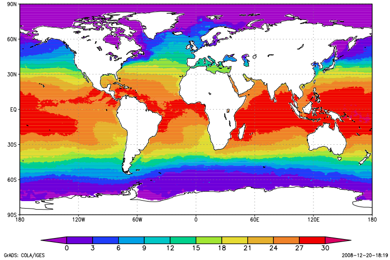


(d) Количество данные за 1 месяц

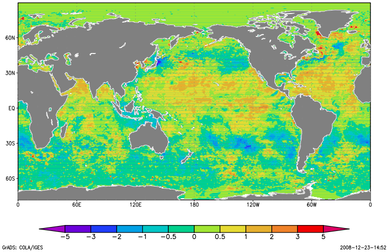
Рис.: Данные наблюдений за определенные моменты времени



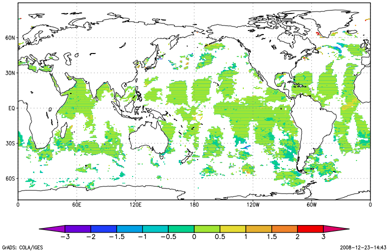
(a) SST. Расчет без блока усвоения



(b) SST. Расчет с блоком усвоения

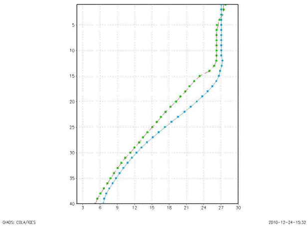


(c) $T_{model} - T_{assim}$

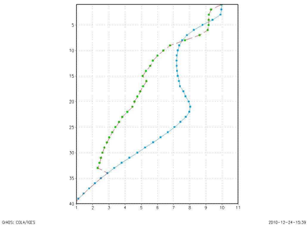


(d) Отклонение T_{assim} от данных наблюдений (усреднение за 20 часов)

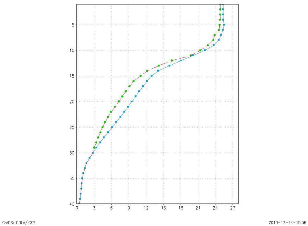
Усвоение данных с буев ARGO



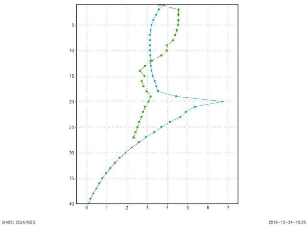
(a) 120 в.д., 10 с.ш.



(b) 180 з.д., 50 ю.ш.



(c) 120 з.д., 10 ю.ш.



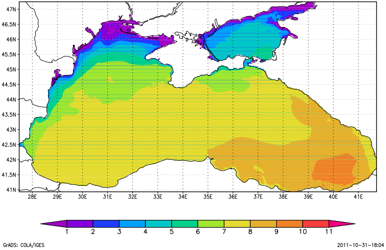
(d) 120 з.д., 60 ю.ш.

Вариационная ассимиляция. Черное море

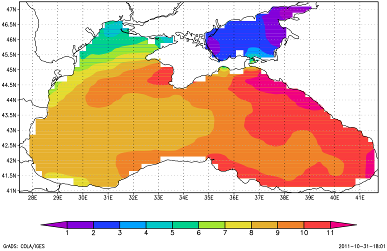
Параметры расчетной области:

- сетка 286x159x27 точек (широта$\times$долгота$\times$глубина);
- первая точка сетки 27.475° восточной долготы и 40.93° северной широты.
- Шаги сетки по x и по y 0.05 и 0.04 градуса.
- Шаг по времени $\Delta t = 5$ минут.
- В качестве T_{obs} использовались данные поверхностной температуры Черного океана, представленные Лебедевым С.А. (ГЦ РАН) интерполированные на сетку модели Захаровой Н.Б.(ИВМ РАН), за январь 2008 г. в каждый момент времени на рассматриваемой сетке (т.е. каждый час).
- В качестве $Q^{(0)}$ использовался среднеклиматический поток за январь 2008 г., полученный по данным реанализа NCEP (National Centers for Environmental Prediction).
- Расчет включал в себя ассимиляцию T_{obs} и расчет сроком от 3 суток до 10 дней (январь-февраль 2008 г.).

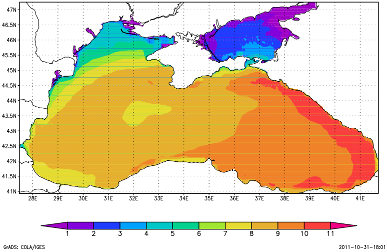
Вариационная ассимиляция. Черное море



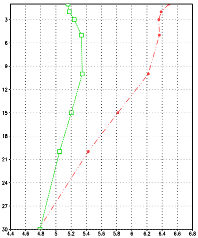
(a) Без усвоения среднее за 1 день)



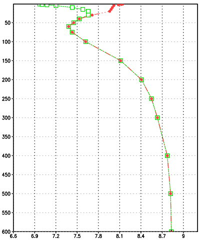
(b) Данные наблюдений (среднее за 1 день)



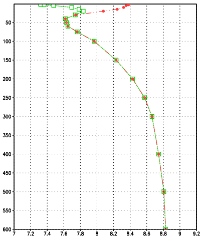
(c) С усвоением (среднее за 1 день)



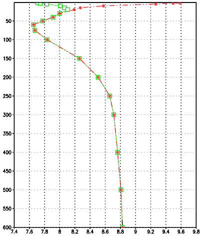
(a) 30° в.д., 45° с.ш.



(b) 32° в.д., 44° с.ш.

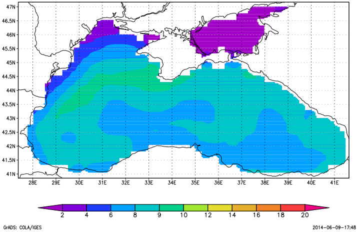


(c) 35° в.д., 43.5° с.ш.

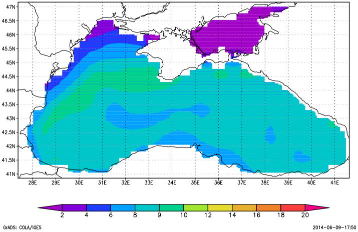


(d) 38° в.д., 43° с.ш.

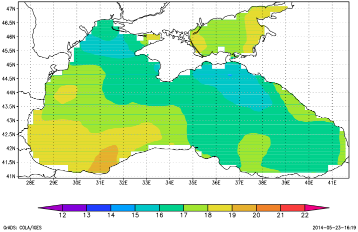
Данные GHRSST – Group for High Resolution Sea Surface Temperature



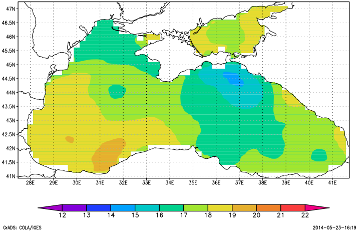
(a) 1 февраля



(b) 2 февраля

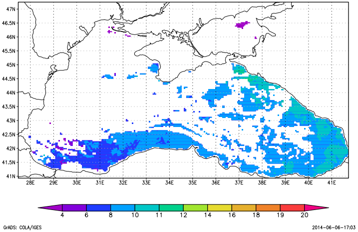


(c) 2 июня

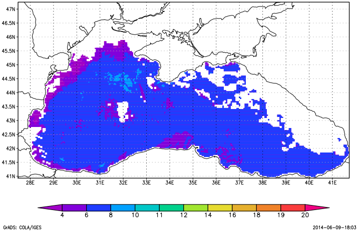


(d) 3 июня

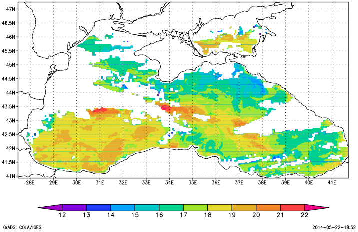
Данные морского портала МГИ (Севастополь)



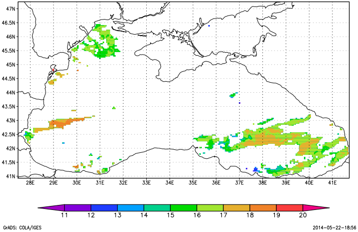
(a) 2 января, 11:10



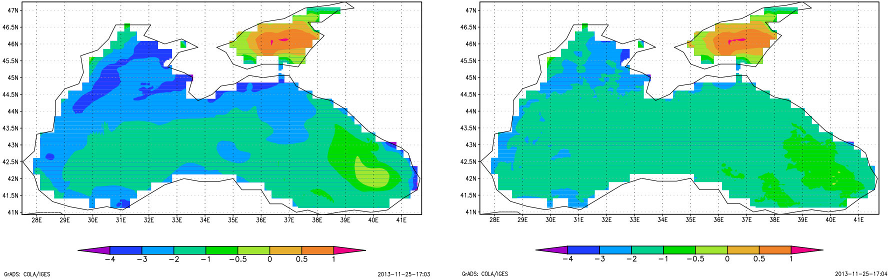
(b) 2 февраля, 10:05



(c) 1 июня, 11:02



(d) 1 июня, 19:27



(a) **Разность** $T_{GHRSST} - T_{model}$. **Расчет на 10 дней**

(b) **Разность** $T_{GHRSST} - T_{assim}$. **Расчет на 10 дней**

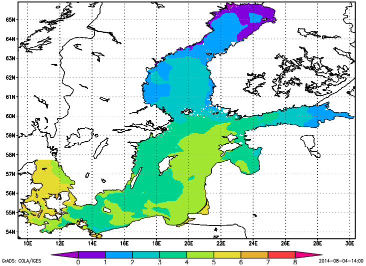
Рис.: Разность ТПМ (средние значения за период расчета). Февраль 2008

Вариационная ассимиляция. Балтийское море

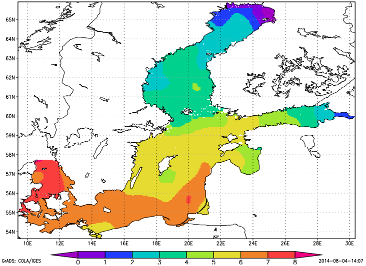
Параметры расчетной области:

- сетка 336x394x27 точек (широта$\times$долгота$\times$глубина);
- первая точка сетки 9.375° в.д. и 53.625° с.ш.
- Шаги сетки по x и по y 0.0625 и 0.03125 градуса.
- Шаг по времени $\Delta t = 5$ минут.
- В качестве T_{obs} использовались использовались среднесуточные данные температуры поверхности Балтийского моря Датского метеорологического института, подготовленные основе измерений радиометров (AVHRR, AATSR и AMSRE) и спектрорадиометров (SEVIRI и MODIS).
- В качестве $Q^{(0)}$ использовался среднеклиматический поток за январь 2008 г., полученный по данным реанализа NCEP (National Centers for Environmental Prediction).
- Расчет включал в себя ассимиляцию T_{obs} и расчет сроком на 5 суток (январь 2008 г.).

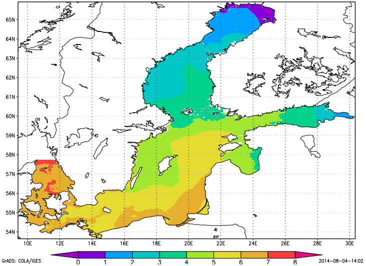
Результаты ассимиляции ТПМ



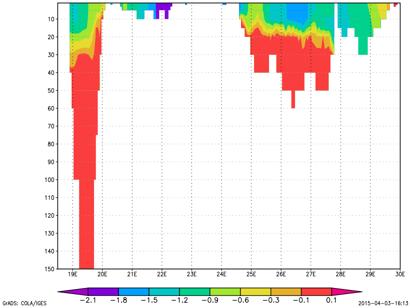
(a) Без усвоения



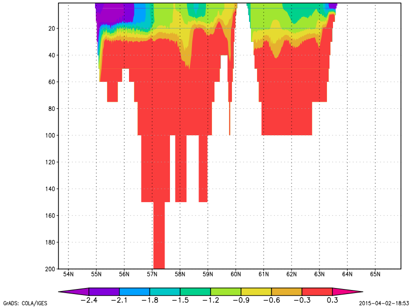
(b) Данные наблюдений



(c) С усвоением



(a) Разрез по 60° северной широты



(b) Разрез по 20° восточной долготы

Рис.: Разность T_{model}-T_{assim}

Спасибо за внимание!