

**Влияние турбулентности на  
столкновения капель в облаках и  
образование дождя**

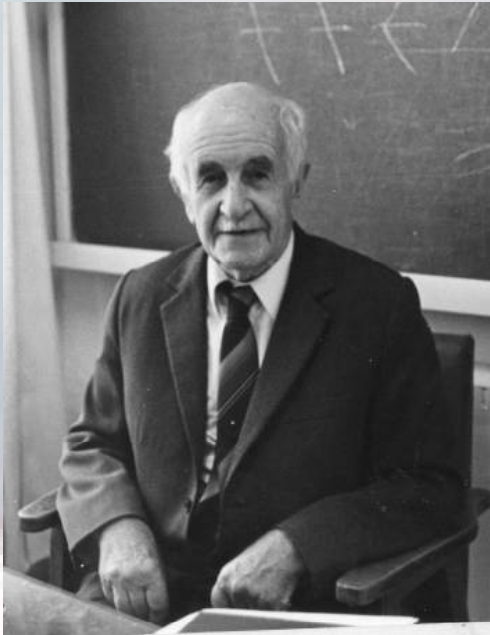
**Александр Хайн и Марк Пинский**

**The Hebrew University of Jerusalem, Israel**

**XIX ШКОЛА НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ -2020**

## Немного истории

## Школа Физики облаков



Александр Христофорович Хргиан



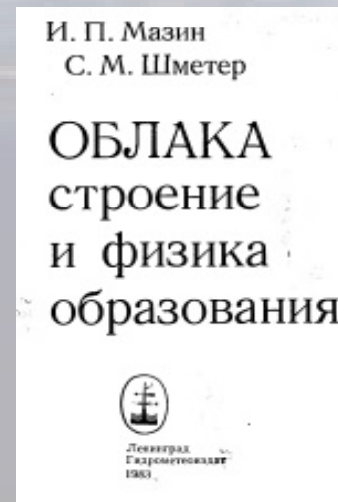
Молодые Александр Моисеевич Боровиков,  
Соломон Моисеевич Шметер, Илья Павлович Мазин



Самолёт-  
метеолаб  
оратория  
ЦАО  
Ил-18Д №  
75442  
«Циклон».



Анатолий Николаевич  
Невзоров



# О чем будет лекция:

**1. Некоторые сведения об облаках**

**3. Проблемы с образованием дождя.**

**4. Уравнение стохастической коагуляции.**

**Как турбулентность влияет на образование дождевых капель.**

**Метод**

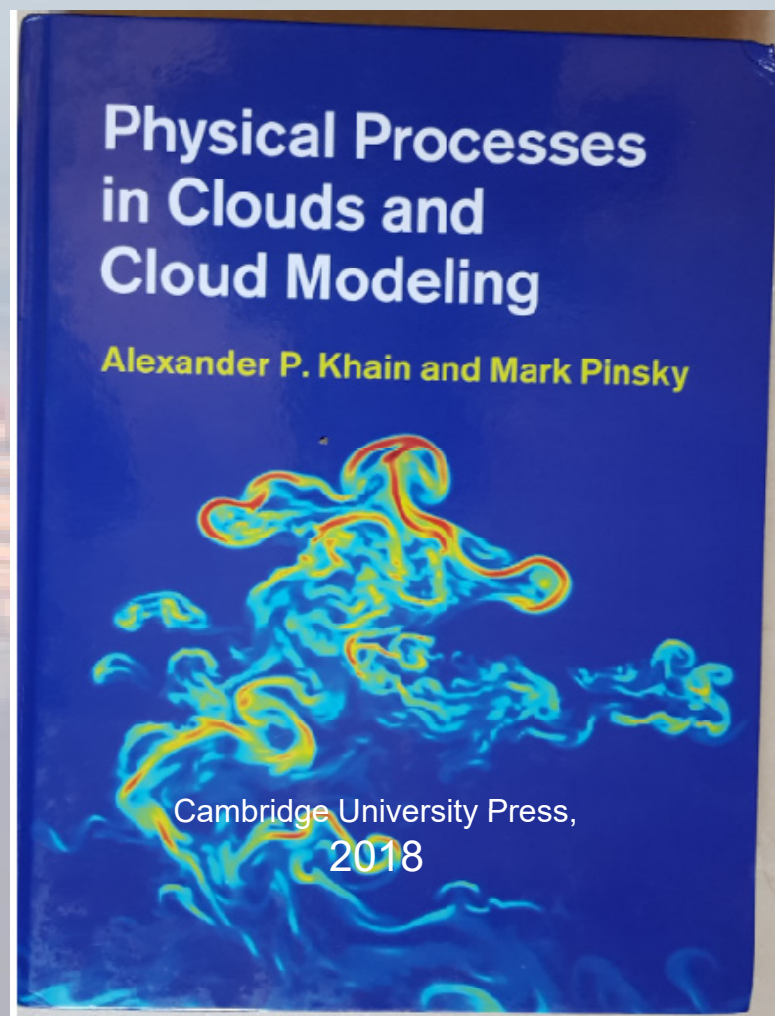
**5. Генератор турбулентных сдвигов и ускорений**

**6. Расчет заметаемого объема и эффективности столкновений.**

**7. Применение в моделях облаков**

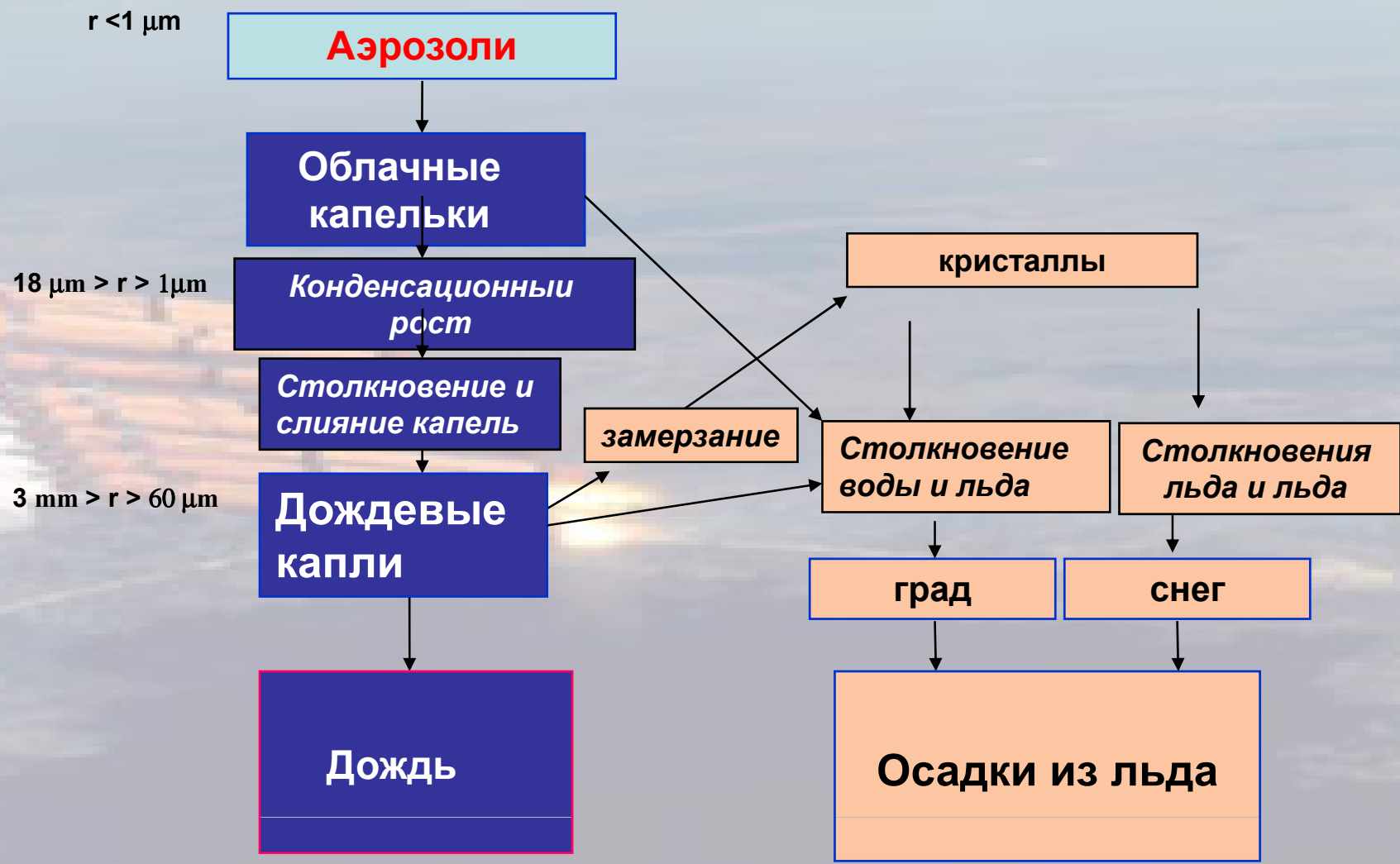
**8. Нерешенные проблемы**

Более детально проблема рассматривается в книге



# Некоторые сведения об облаках

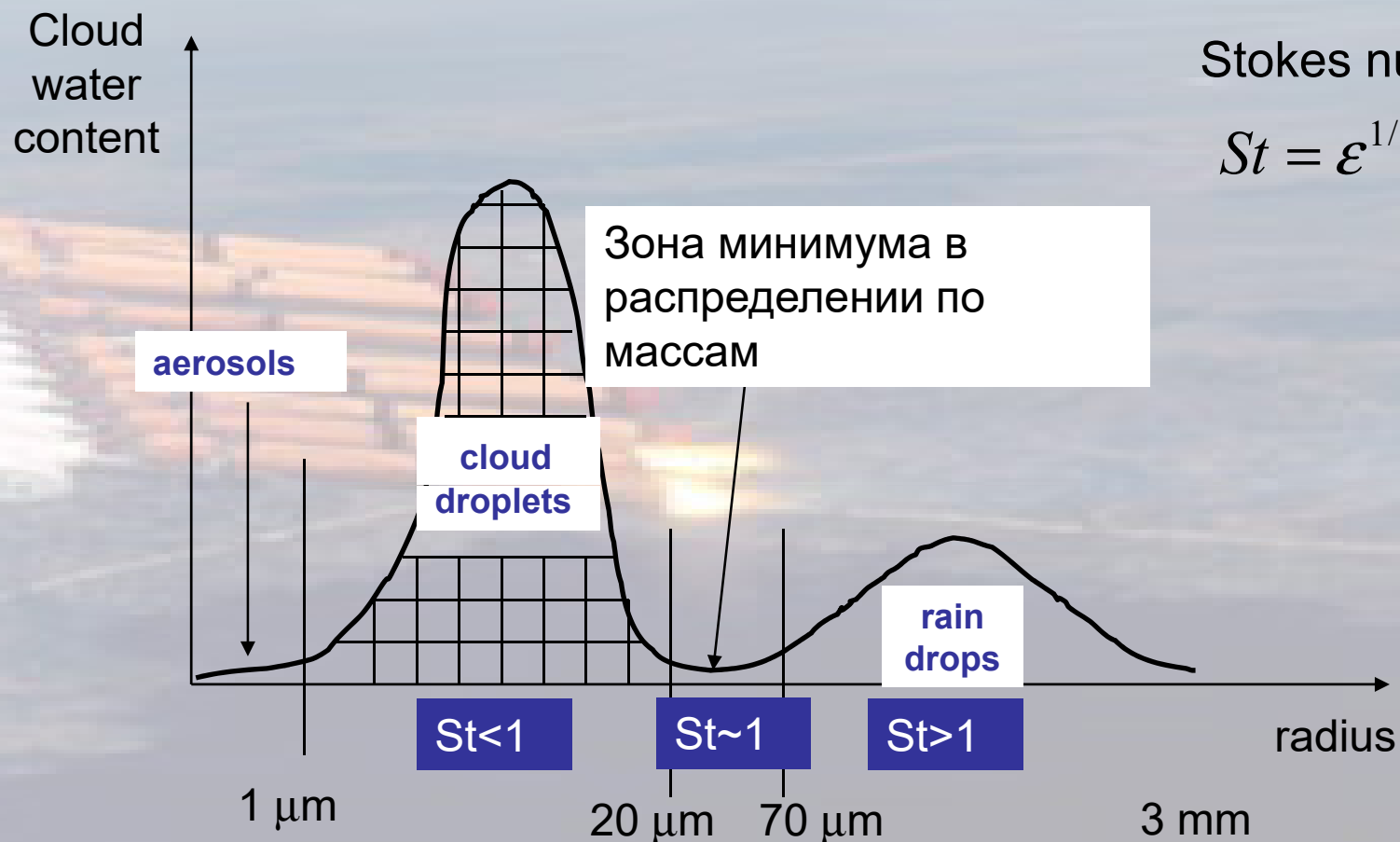
## Микрофизические процессы ведущие к образованию осадков



## Некоторые сведения об облаках

# Типичное распределение капель по размерам (по массе)

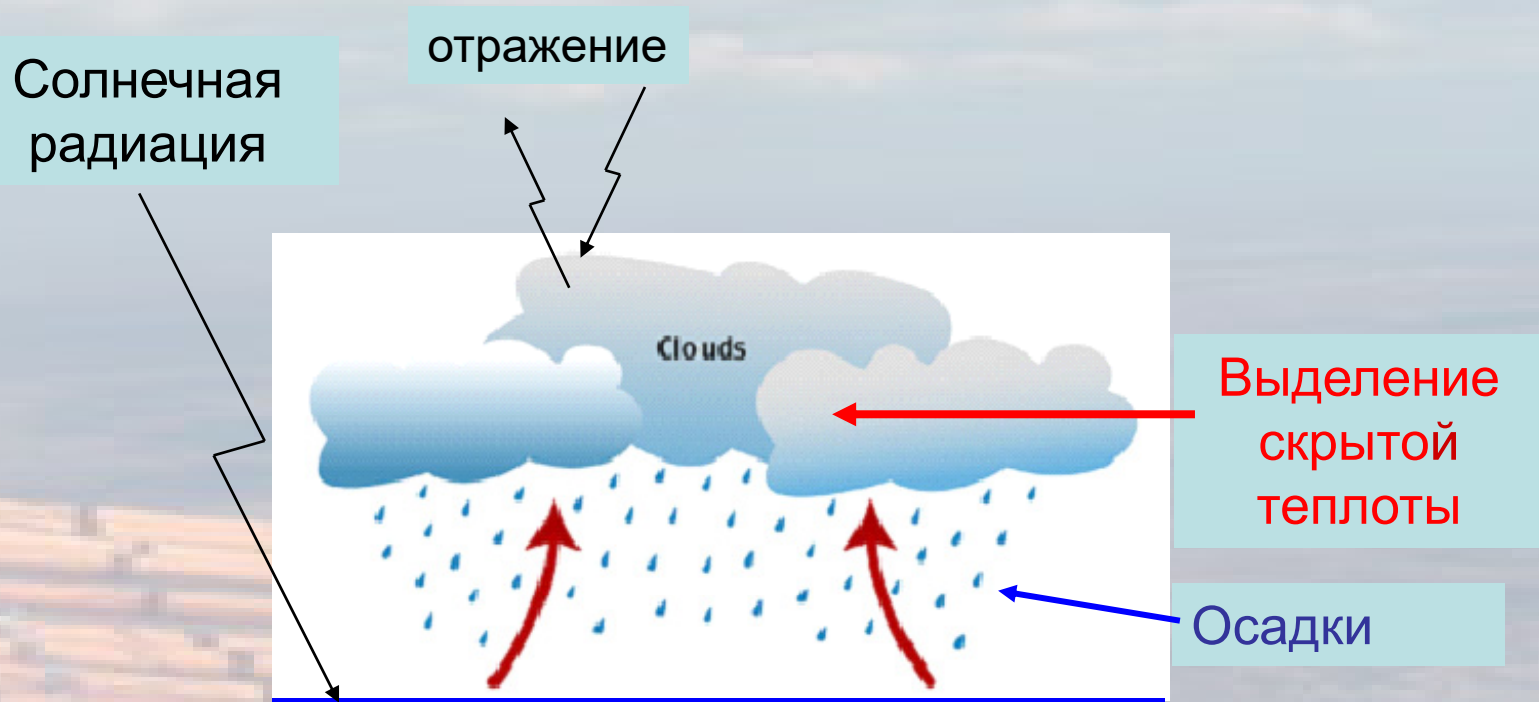
Концентрация капель от  $100 \text{ cm}^{-3}$  до  $1000 \text{ cm}^{-3}$



Stokes number

$$St = \varepsilon^{1/2} \nu^{-1/2} \tau$$

## 1. Некоторые сведения об облаках



Облака определяют:

1. **Осадки**
2. Радиационный баланс
3. Выделение скрытого тепла – главного источника атмосферных движений.

## Некоторые сведения об облаках

### Typical characteristics of cloud turbulence

Turbulent parameters:	STRATIFORM CLOUDS	CUMULUS CLOUDS	Cb	
Dissipation rate, $\varepsilon$	$\varepsilon = 10^{-3} m^2 s^{-3}$	$\varepsilon = 2 \cdot 10^{-2} m^2 s^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-1} m^2 s^{-3}$	Shmeter S. (1987) Mazin et al (1989) Weil et al (1973) Panchev (1971) Pinsky and Khain (2003)
Taylor microscale Reynolds number*				
$Re_\lambda = 15\tilde{w}\lambda/\nu$	$Re_\lambda = 5 \cdot 10^3$	$Re_\lambda = 2 \cdot 10^4$	$Re_\lambda = 2 \cdot 10^4$	

### Специфические свойства облаков:

- a) Турбулентность довольно сильная;
- b) Большие Re



### 3. Проблемы с образованием дождя

#### а) Проблема времени

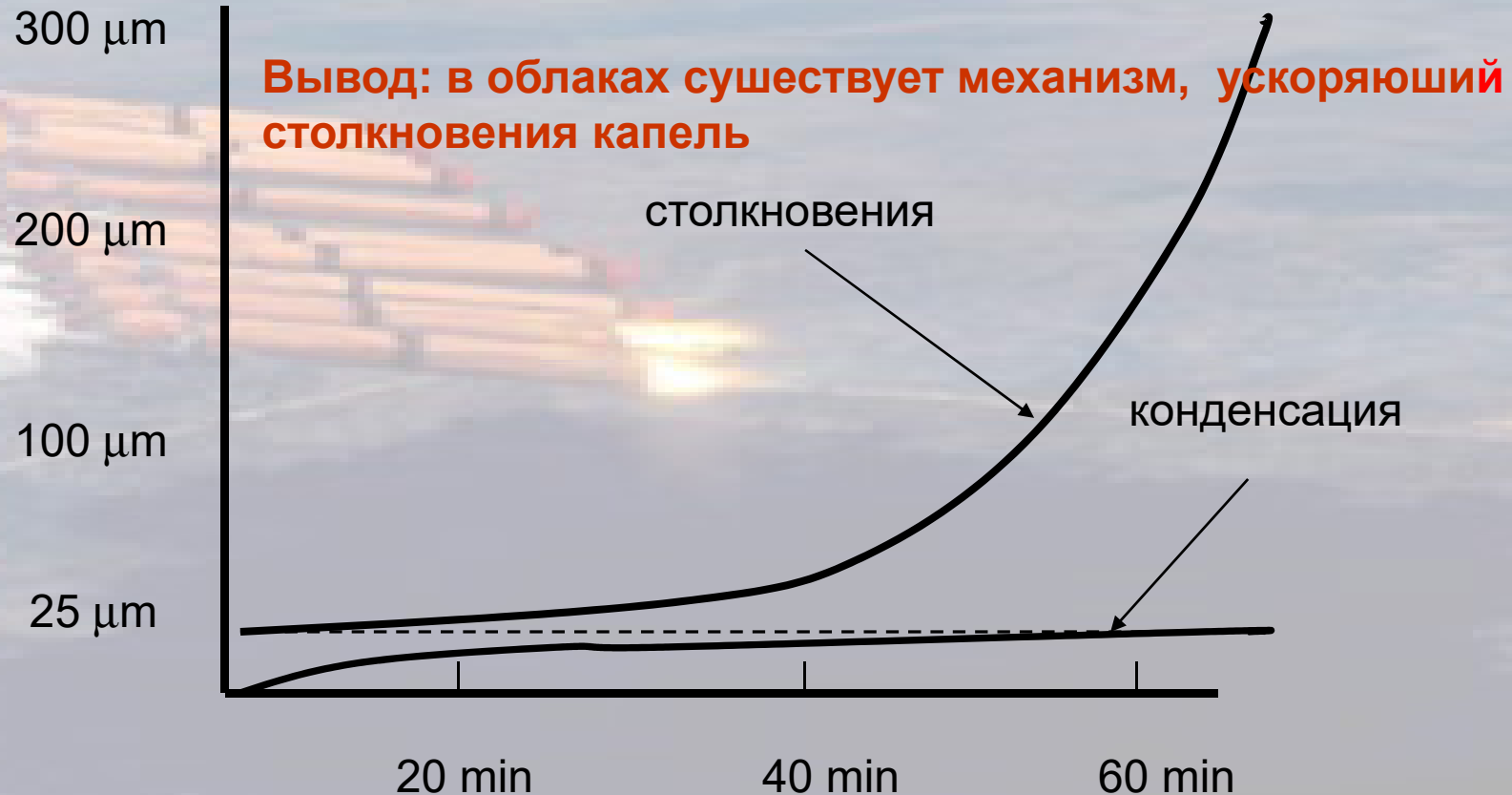
Конденсационный рост: 40-60 мин

Столкновения (до 300 микрон) 40 мин

40 min+40 min=80 min.

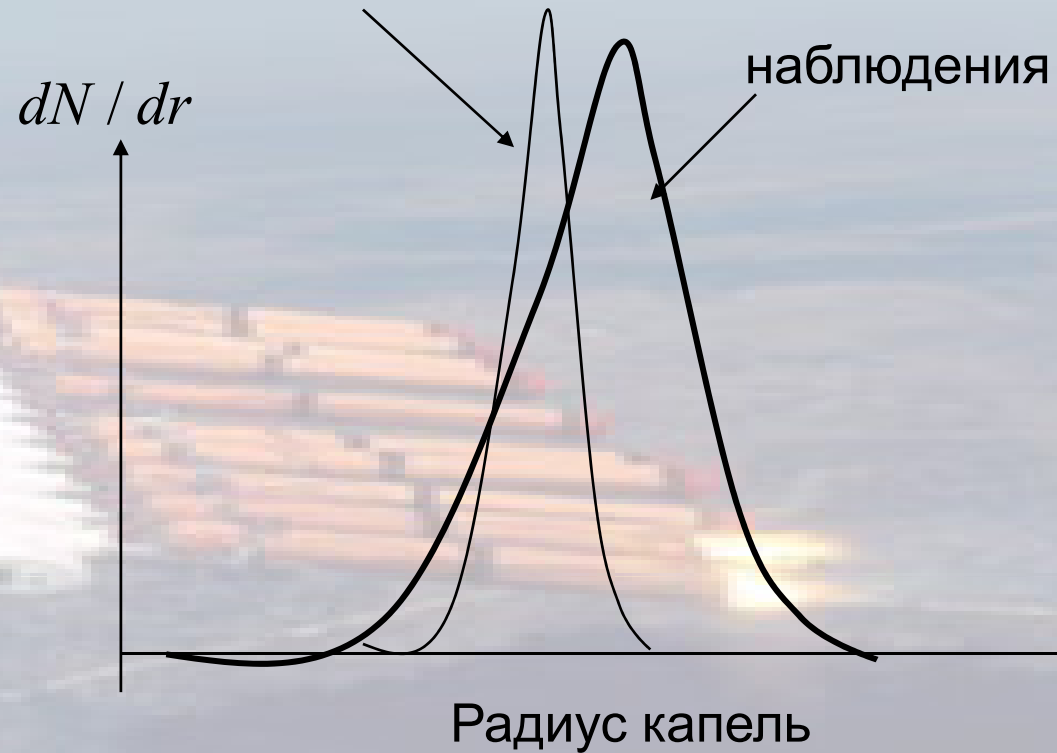
В реальных облаках: 15 min

#### Время формирования дождя



## б) Проблема с шириной распределения по размерам

Теория гравитационной коагуляции



**Вывод: в облаках существует механизм, расширяющий распределение капель**

# Уравнение стохастической коагуляции

Уравнение стохастической коагуляции:

$$\frac{\partial N(m,t)}{\partial t} = \underbrace{\int_0^{m/2} N(m_c,t)K(m_c,m-m_c)N(m-m_c,t)dm_c}_{\text{Gain}} - \underbrace{N(m,t)\int_0^{\infty} K(m,m_c)N(m_c,t)dm_c}_{\text{Loss}}$$

$N(m,t)$  – Функция распределения капель по массам

$$K(m_1,m_2) = \pi(r_1+r_2)^2 |\mathbf{V}_{t1} - \mathbf{V}_{t2}| E_g(r_1,r_2)$$

Collision kernel

Кернел  
столкновений

Probability of  
collision of droplets  
 $m_1$  and  $m_2$  per unit  
of time

Геометрическое  
поперечное  
сечение

$S_1$

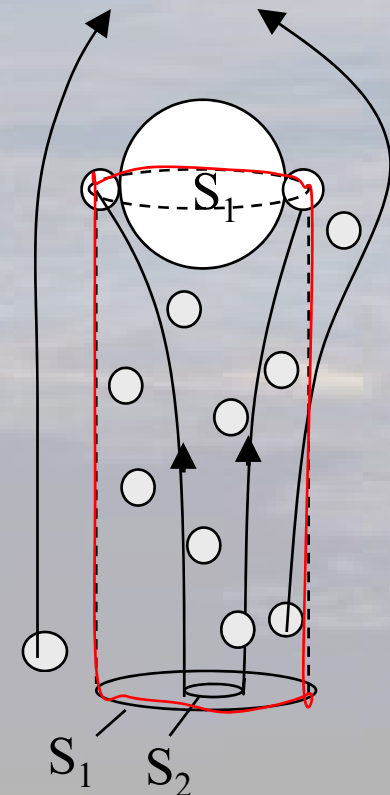
Swept volume

Заметаемый  
объем

Разность в  
скоростях  
падения

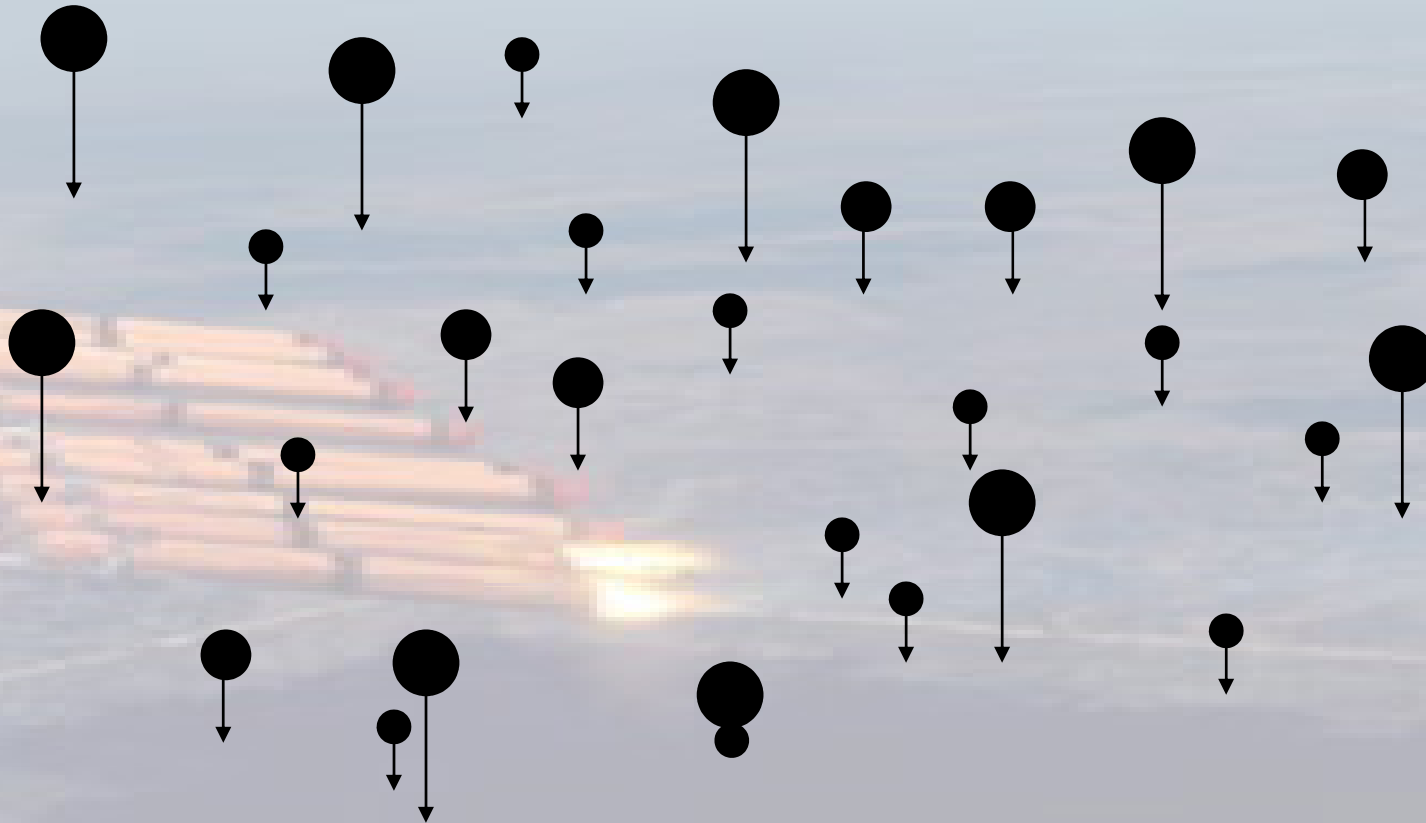
Эффективность  
столкновений

$$E_g = S_2/S_1 \ll 1$$

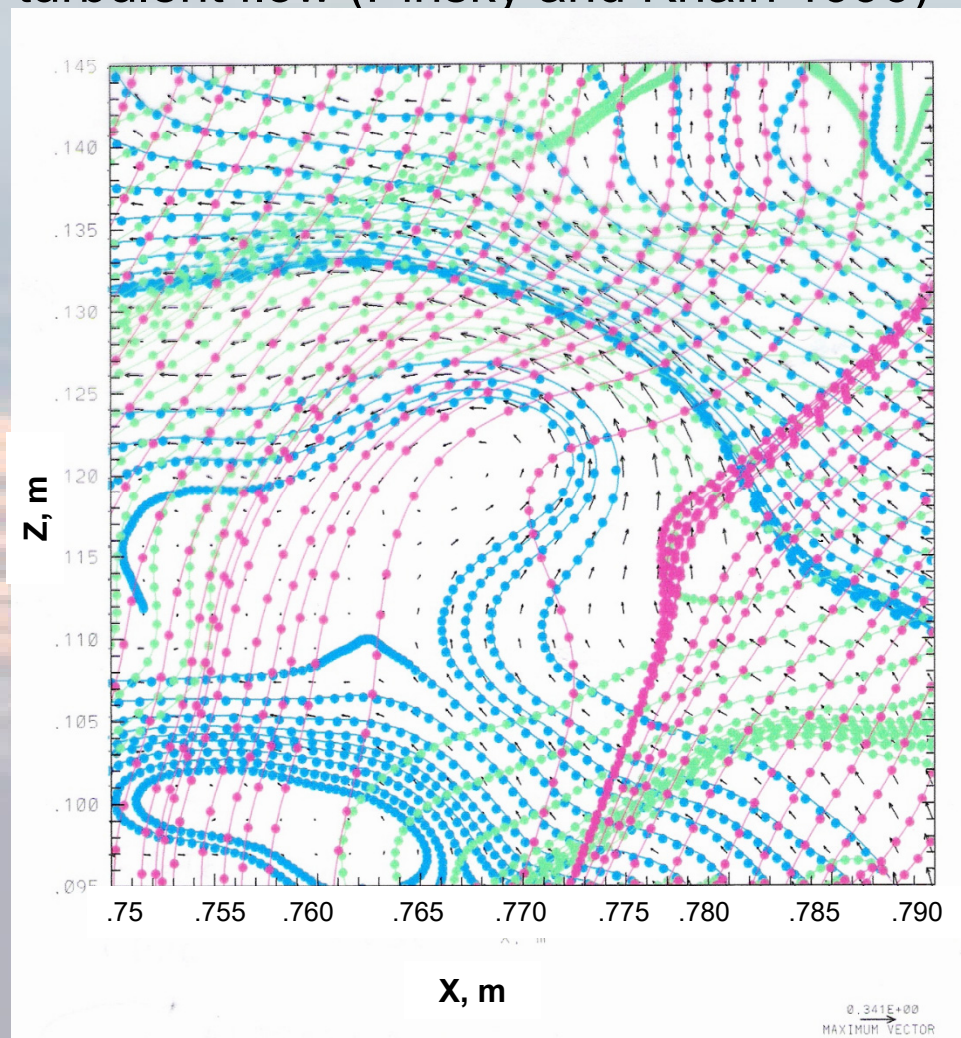


### 3. Гравитационная коагуляция

Падение капель в нетурбулентном воздухе



Tracks of 10  $\mu\text{m}$ , 30  $\mu\text{m}$  and 50  $\mu\text{m}$  –radii droplets in a model of turbulent flow (Pinsky and Khain 1996)



Турбулентность-наиболее вероятный механизм  
увеличения скорости столкновений.

Как турбулентность влияет на столкновения капель?

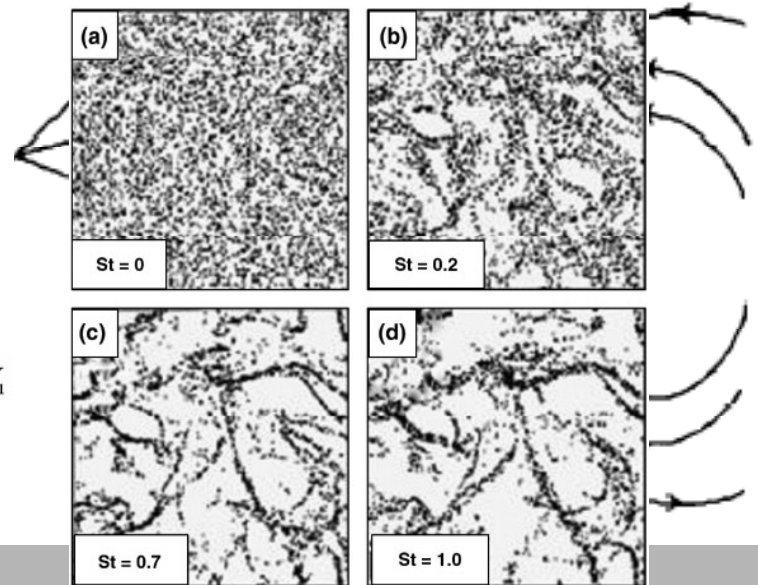
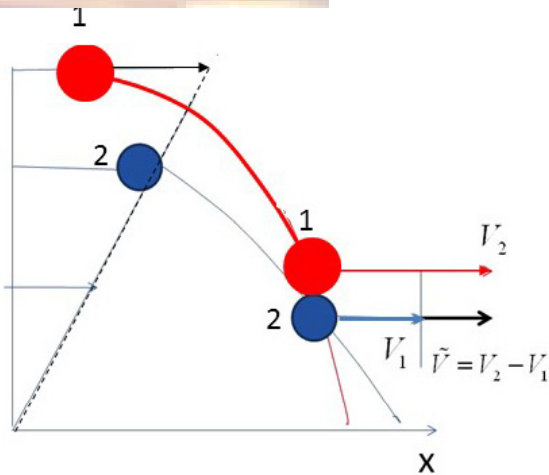
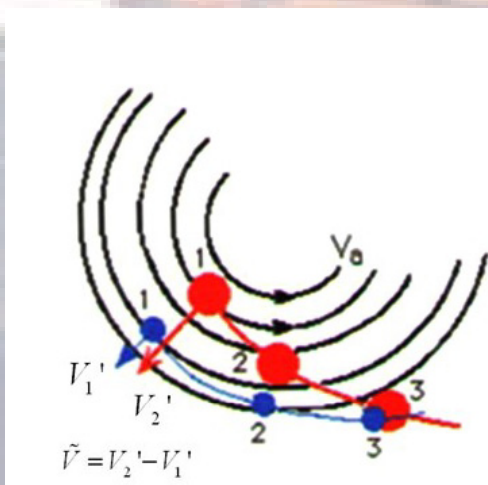
$$\frac{\partial N(m, t)}{\partial t} = \int_0^{m/2} N(m_c, t) K(m_c, m - m_c) N(m - m_c, t) dm_c - \int_0^{\infty} N(m, t) K(m, m_c) N(m_c, t) dm_c,$$

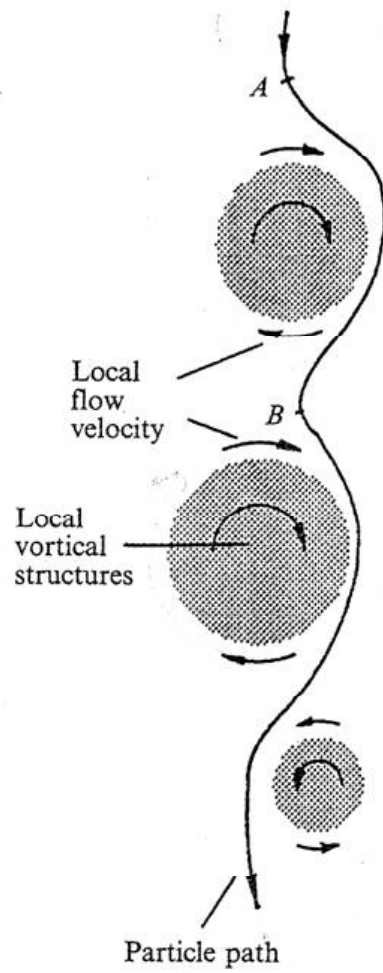
$K(r_1, r_2) = \pi(r_1 + r_2)^2 |\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2| E(r_1, r_2)$  is the collision kernel

1) Swept volume:  
Эффект относительной скорости

2) Collision efficiency:  
Гидродинамическое взаимодействие

3) Fluctuations of concentration  
Увеличение частоты столкновений из-за эффекта кластеризации





*y*

**Мы рассмотрим все три механизма**

- 1. Как турбулентность влияет на относительную скорость капель (так называемый TRANSPORT EFFECT)?**





## Уравнение движения одной капли (малой)

$$\frac{dV_i}{dt} = -\frac{1}{\tau} (V_i - W_i(x_i, t)) + g \delta_{3i}; \quad (1)$$

$V_i$  и  $W_i$  – компоненты скорости капли и окружающего потока (i-velocity component)

Компонента скорости капли, связанная с турбулентностью :

$$V_i' = V_i - W_i(x_i, t) - V_t \delta_{3i} \quad (2)$$

Можно показать, что

В каждом элементарном объеме воздуха (масштабом меньшим или порядка Колмогоровского масштаба) скорость капли равна:

$$V_i = W_i(x_i, t) + V_t \delta_{3i} + V_i'^{ad} \quad (4)$$

↑  
Турбулентная добавка

где  $V_i'^{ad}$  зависит от Лагранжевого ускорения потока

$$A_i(x_i, t) = \frac{\partial W_i(x_i, t)}{\partial t} + W_j(x_i, t) \frac{\partial W_i(x_i, t)}{\partial x_j}$$

и компонентов сдвигов (strains)  $S_{ij}$

### Относительная скорость двух невзаимодействующих капель

$$\tilde{V}_i = \frac{d\tilde{x}_i}{dt} = S_{ij} \tilde{x}_j + \tilde{V}_i'$$

(5)

a)  $\tilde{V}_i' = V_{2i}'^{ad} - V_{1i}'^{ad} = const$

b)  $S_{ij} = const$

c) *Относительная скорость между каплями зависит только от сдвигов ветра и Лагранжевого ускорения. Мы должны генерировать сдвиги и ускорения в турбулентном потоке.*

## Генерация турбулентных сдвигов и ускорений THE CONCEPT:

Statistical properties of turbulent flow at scales of hydrodynamic droplet interaction can be represented as a set of non-correlated samples of turbulent strains and acceleration pairs.

Мы считаем, что весь объем можно разделить на малые объемчики с масштабами меньше Колмогоровского, которые можно характеризовать сдвигом и ускорением

Мы разработали два генератора:

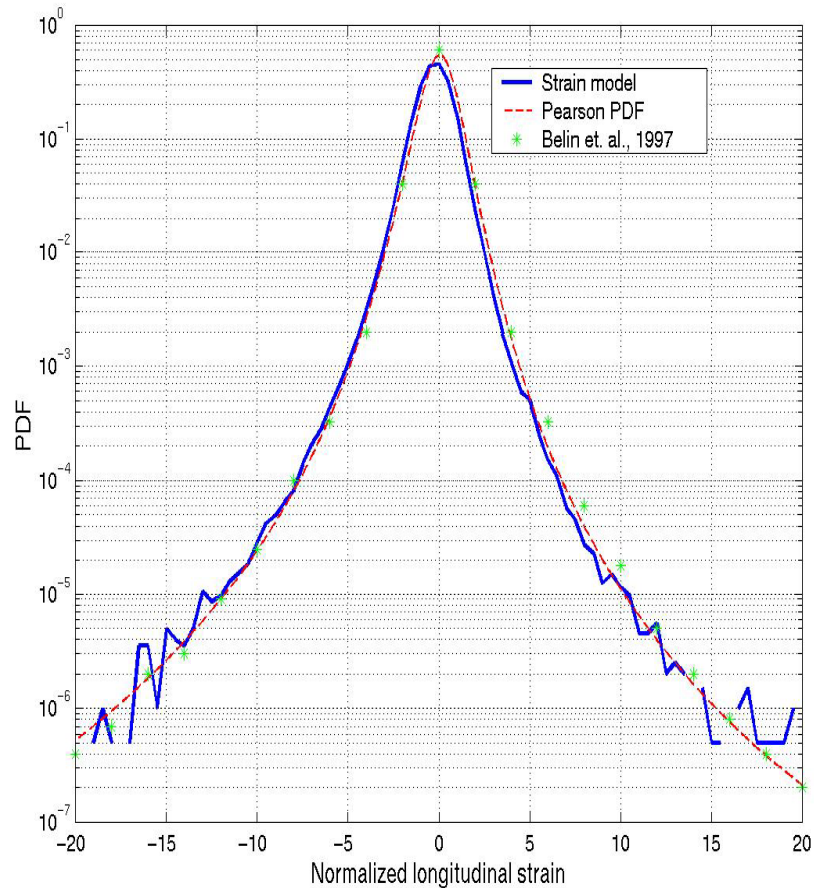
Генератор сдвигов  $S_{ij}$

Генератор ускорений.  $A_k$

.

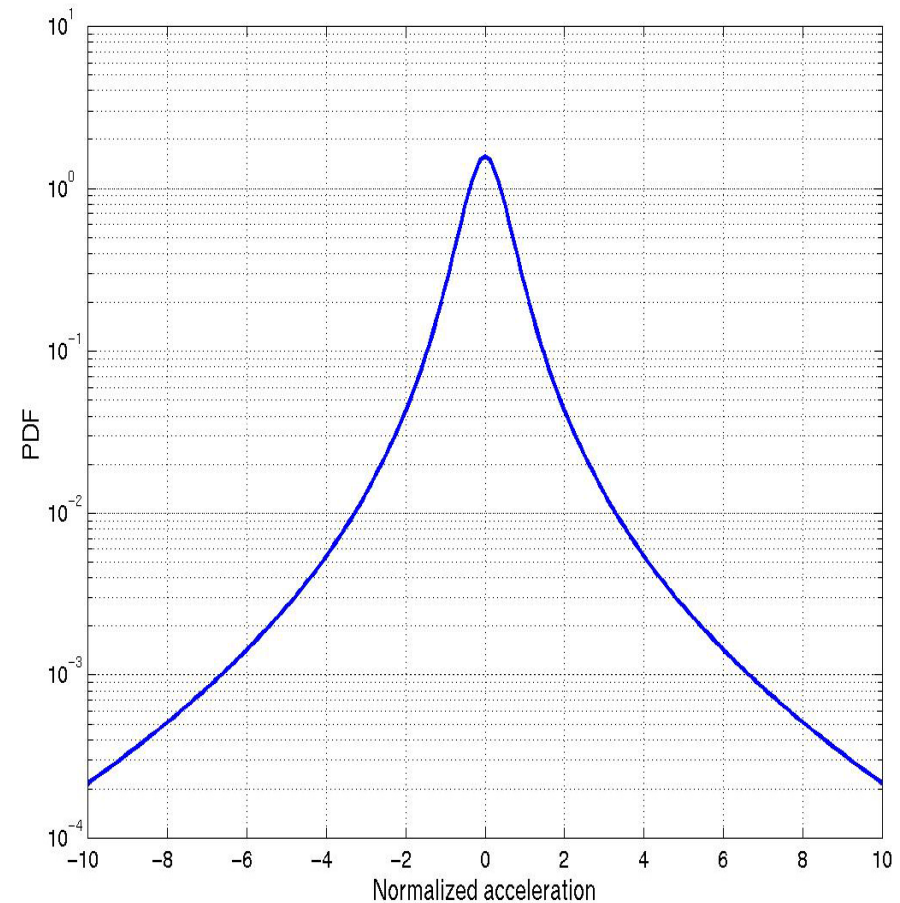
## Turbulent shears

PDF of turbulent shears (Belin et al 1997):  
(measurements at high Re)



## Lagrangian acceleration

PDF of Lagrangian acceleration ( LaPorta et al, 2001; Voth et al, 2002)



Мы рассчитали длинные ряды сдвигов и ускорений (пока без гидродинамического взаимодействия)

## Потоки капель и заметаемый объем

**Collision rate between droplets is determined by the droplet flux through a spherical surface of radius  $(r_1+r_2)$ .**

In case of no hydrodynamic interaction between droplets, the flux can be calculated as

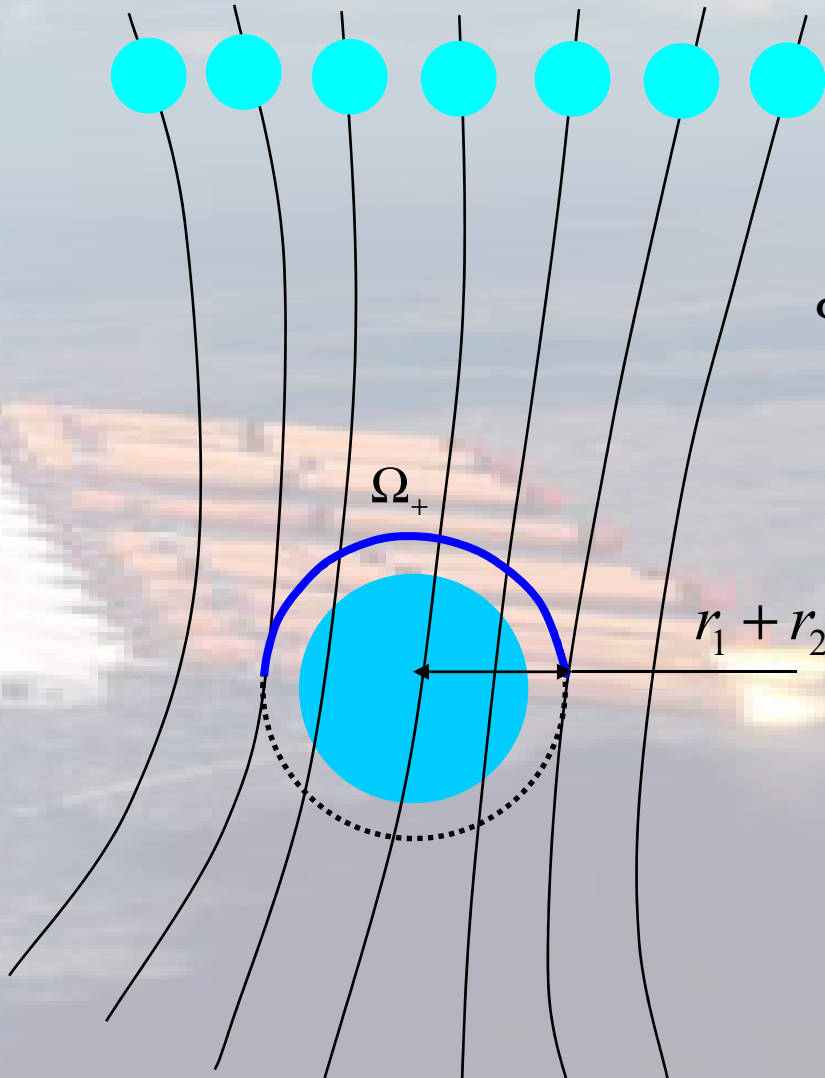
$$\Phi = \frac{1}{r_1 + r_2} \int_{\Omega_+} N \tilde{V}_i \tilde{x}_i d\Omega_+ = \frac{1}{r_1 + r_2} \int_{\Omega_+} N (S_{ij} \tilde{x}_j \tilde{x}_i + \tilde{V}_i' \tilde{x}_i) d\Omega_+$$

where  $N$  is droplet concentration and  $\Omega_+$  is the part of the spherical surface corresponding to the input flux.

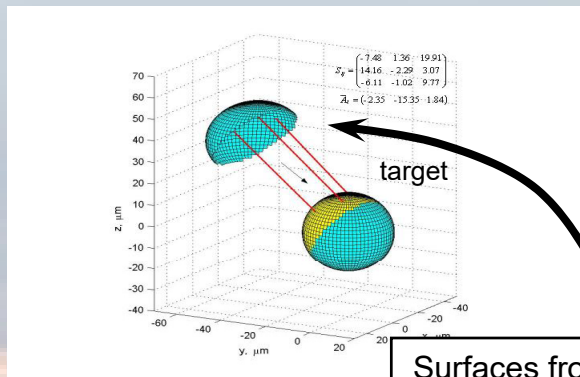
Instead of droplet flux, one can use the value of the swept volume (the flux of relative velocity through the surface). The swept volume of any drop pair does not change within an elementary volume. The turbulent swept volume normalized to swept volume in the pure gravity case is:

$$G = \frac{1}{\pi(r_1 + r_2)^3 |V_{t2} - V_{t1}|} \int_{\Omega_+} (S_{ij} \tilde{x}_j \tilde{x}_i + \tilde{V}_i' \tilde{x}_i) d\Omega_+$$

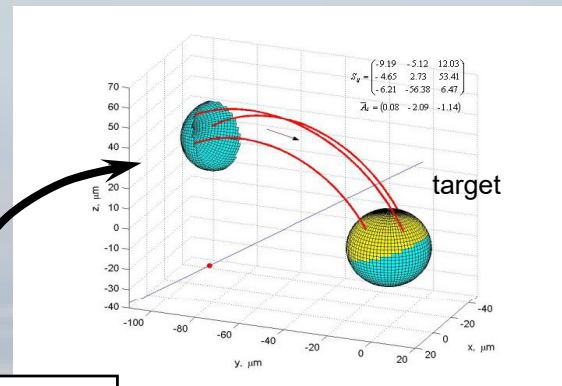
**$G$  показывает насколько турбулентность увеличивает заметаемый объем**



# ПРИМЕРЫ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИИ И ПОТОКОВ

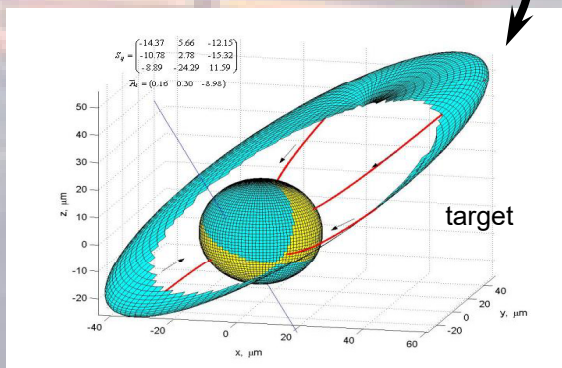


Stagnation point is far from droplets

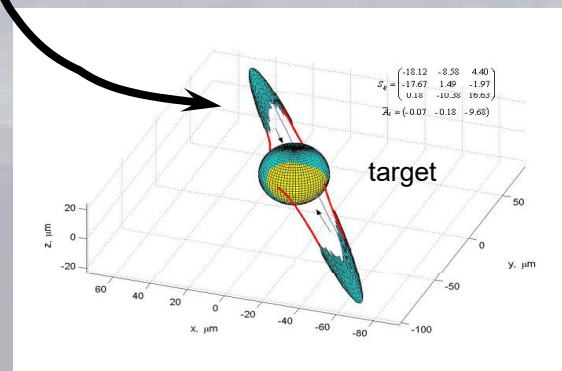


Stagnation point of saddle-focus type

Surfaces from which targets are "fired"

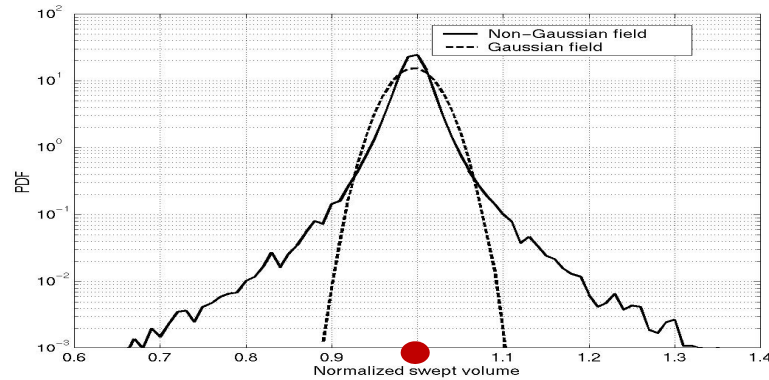


Stagnation point of saddle-node type (convergent tracks)



Stagnation point of saddle-node type (divergent tracks)

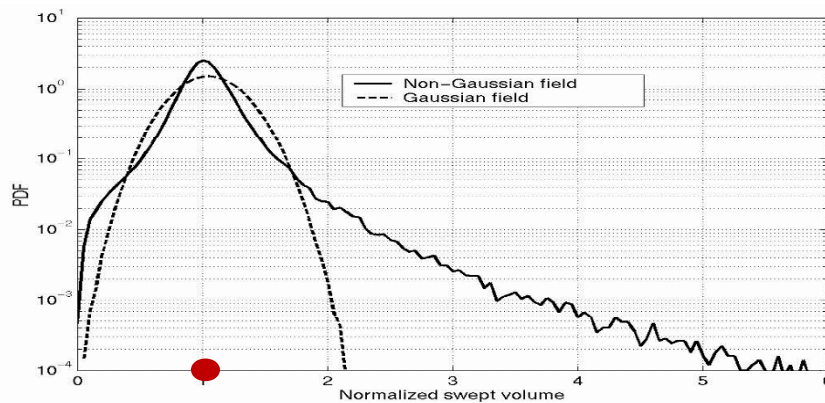
# PDF OF NORMALIZED SWEPT VOLUMES (капли радиусом 10 и 20 микрон)



$$\text{Re } \lambda = 5 \cdot 10^3$$

$$\varepsilon = 0.001 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$$

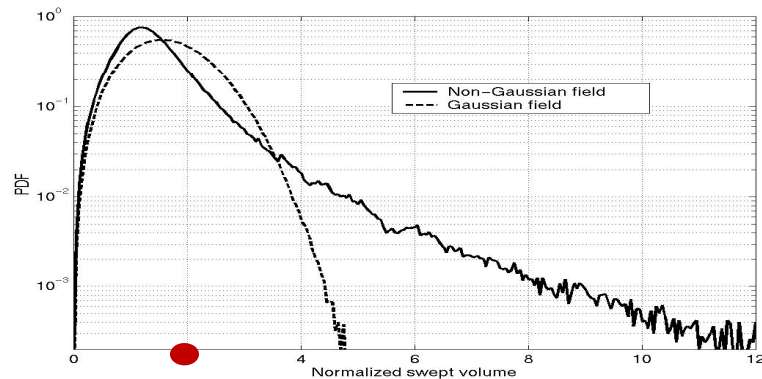
**Stratiform clouds**



$$\varepsilon = 0.02 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$$

$$\text{Re } \lambda = 2 \cdot 10^4$$

**Cumulus clouds**

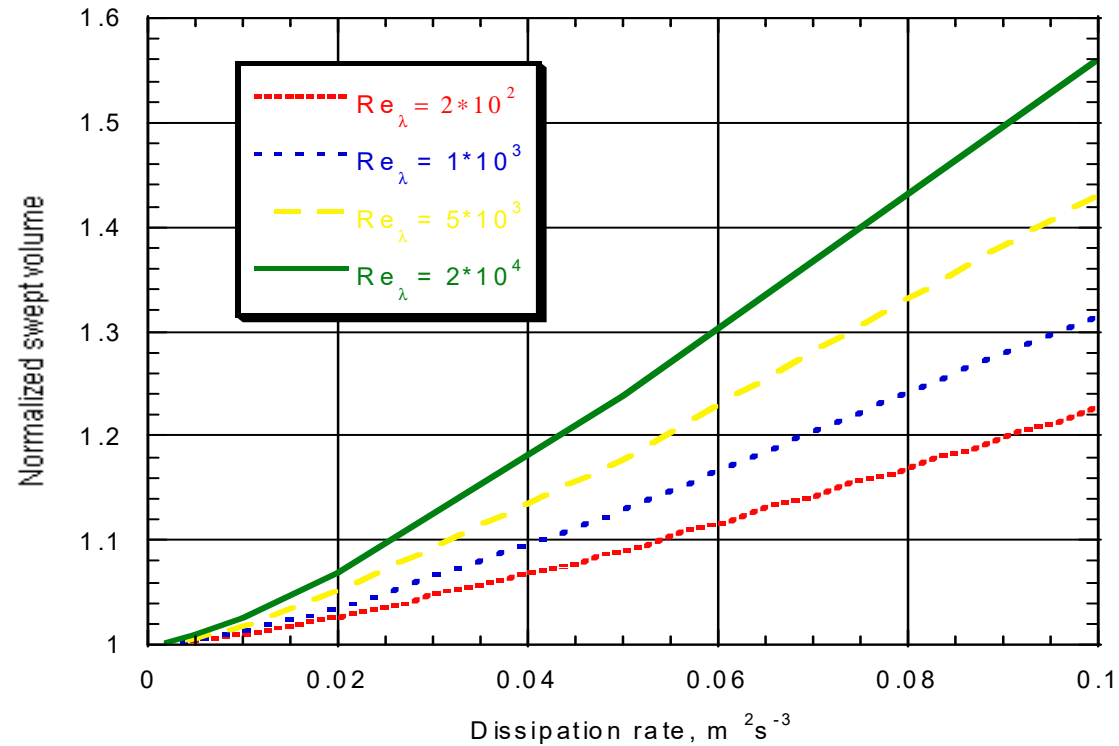


$$\varepsilon = 0.1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$$

$$\text{Re } \lambda = 2 \cdot 10^4$$

**Cumulonimbus clouds**

**Dependence of mean swept volume on the dissipation rate for droplets of radii 20  $\mu\text{m}$  and 10  $\mu\text{m}$**



**Stratiform clouds**

**Cumulus clouds**

**Cumulonimbus**

*The mean swept volumes increase both with  $\varepsilon$  and  $Re_\lambda$ . This increase, however, is quite moderate and does not exceed 60%.*





***Гидродинамическое  
взаимодействие***

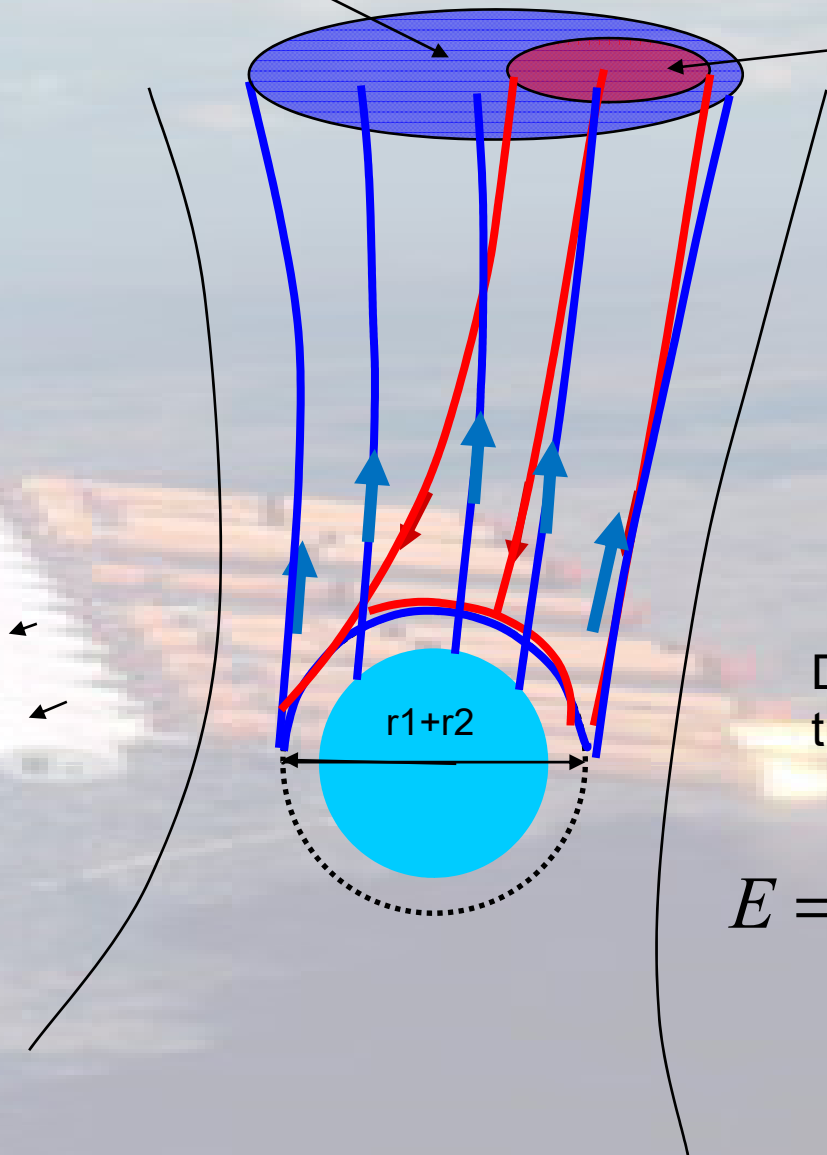
$\Phi_2$

$\Phi_1$

Структура потоков при гидродинамическом взаимодействии

Definition of collision efficiency in a turbulent flow:

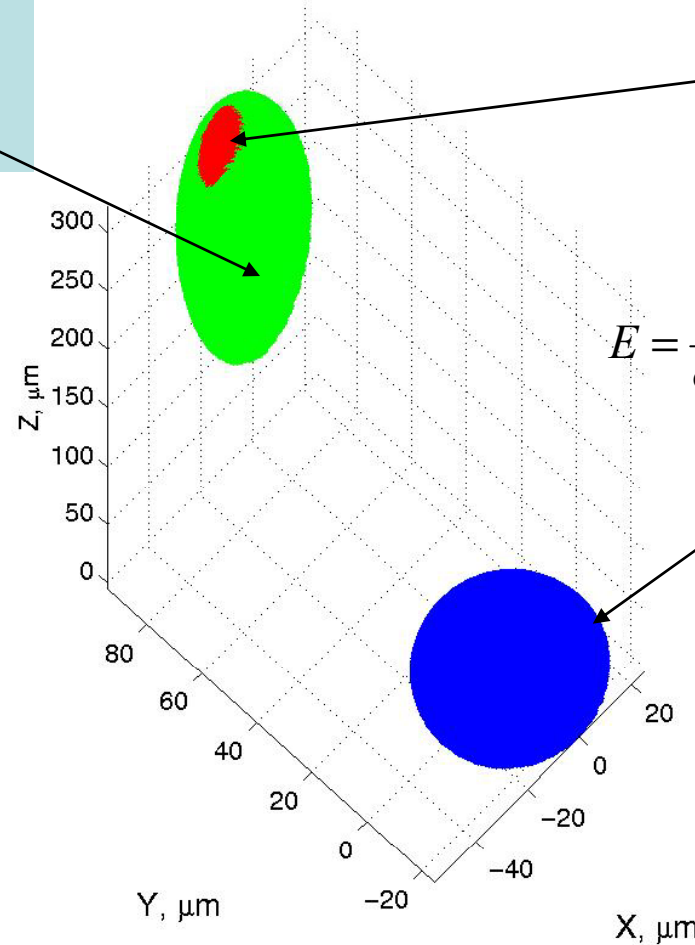
$$E = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{\text{Flux with interaction}}{\text{Flux without interaction}}$$



## EXAMPLE: 10 $\mu\text{m}$ and 20 $\mu\text{m}$ -radii droplets

Droplets starting with the **green surface** collide the target **without** hydrodynamic interaction

Droplets starting from the **red surface** collide the target **with** hydrodynamic interaction taken into account



$$E = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{\text{Flux with interaction}}{\text{Flux without interaction}}$$

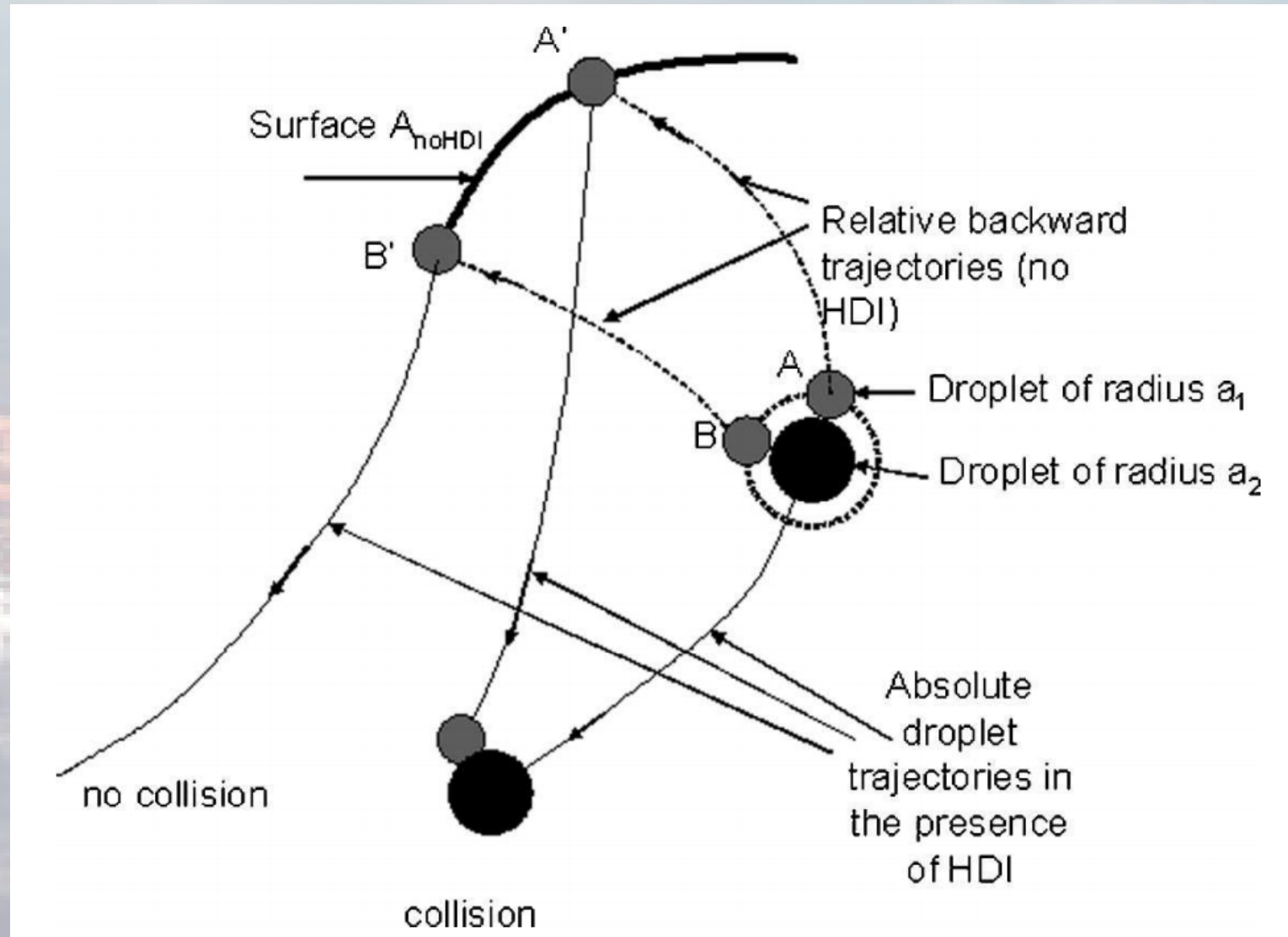


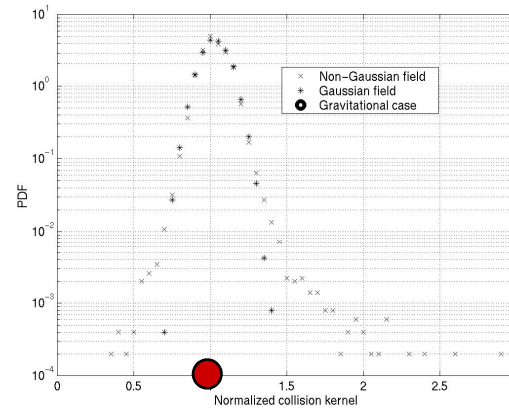
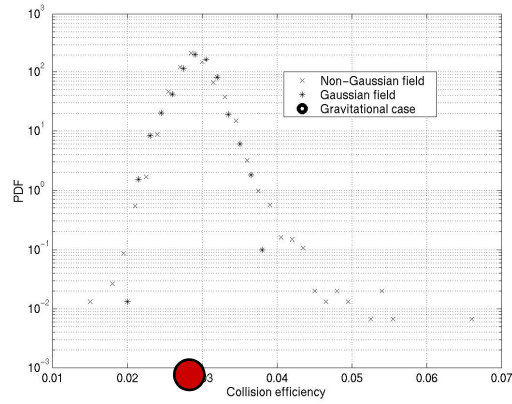
FIG. 3. Scheme illustrating the procedure of calculation of droplet velocity fluxes in case hydrodynamical droplet interaction is



***Результаты расчетов***

# PDF of collision efficiency and collision kernel

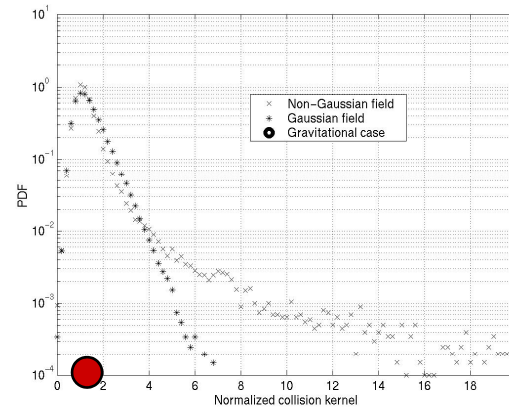
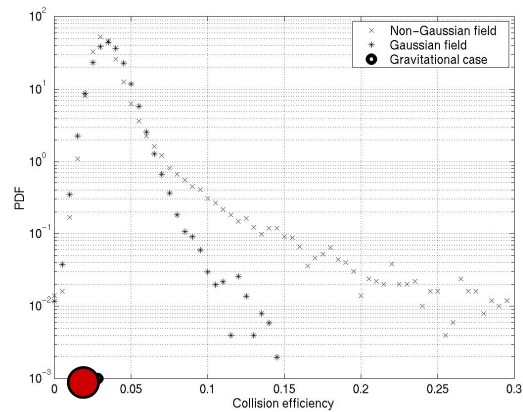
10um-20 um



$$Re_{\lambda} = 5 \cdot 10^3$$

$$\varepsilon = 0.001 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$$

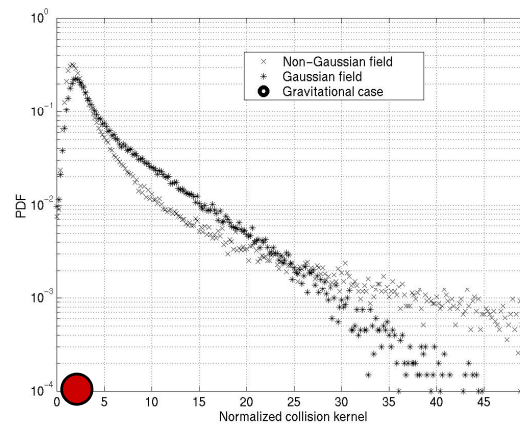
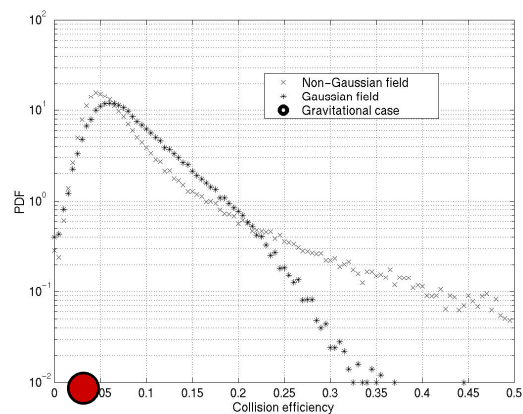
**Stratiform clouds**



$$\varepsilon = 0.02 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$$

$$Re_{\lambda} = 2 \cdot 10^4$$

**Cumulus clouds**

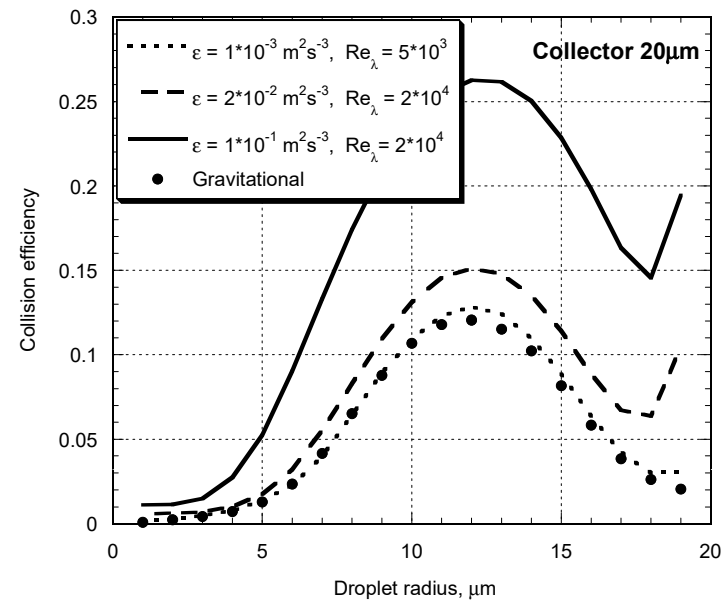
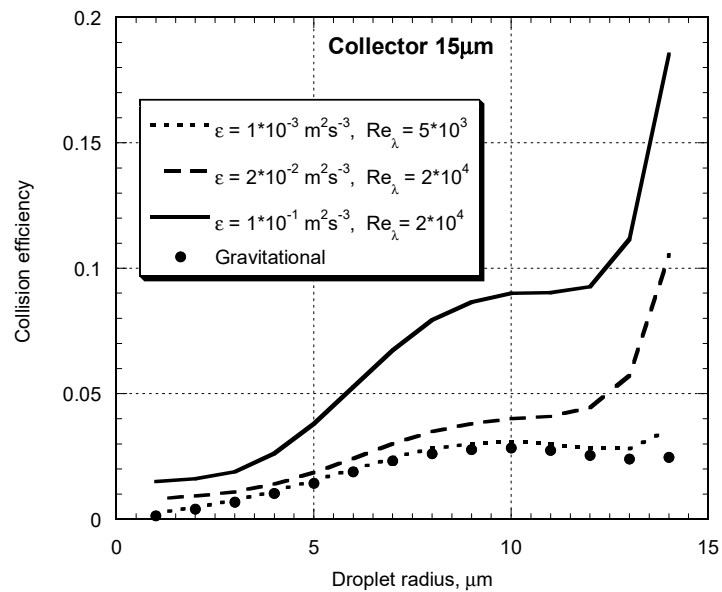


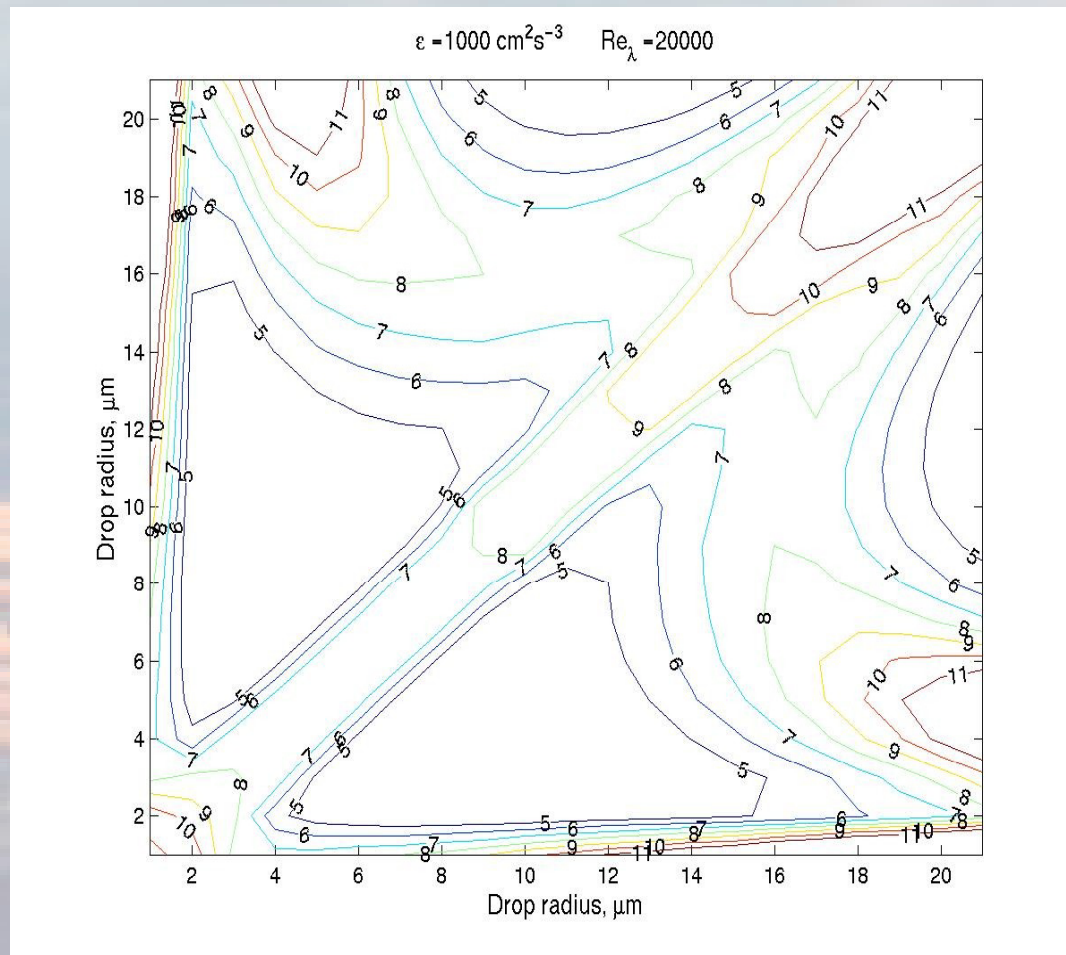
$$\varepsilon = 0.1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$$

$$Re_{\lambda} = 2 \cdot 10^4$$

**Cumulonimbus clouds**

## Mean collision efficiencies for 15 and 20 $\mu\text{m}$ –radii drop collectors





**Увеличение средних ядерлов столкновения между каплями**    $\varepsilon = 1000 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$

$$Re_\lambda = 10^4$$

**Increase in the collision kernel between cloud droplets**

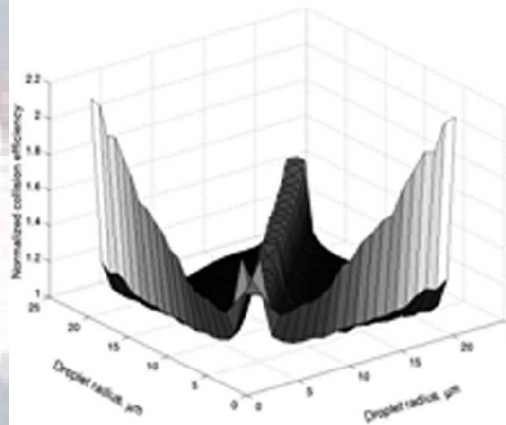


**Увеличение средних кернелов столкновения между каплями**

$\varepsilon = 1000 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-2}, \text{Re}_d = 2 \cdot 10^4$

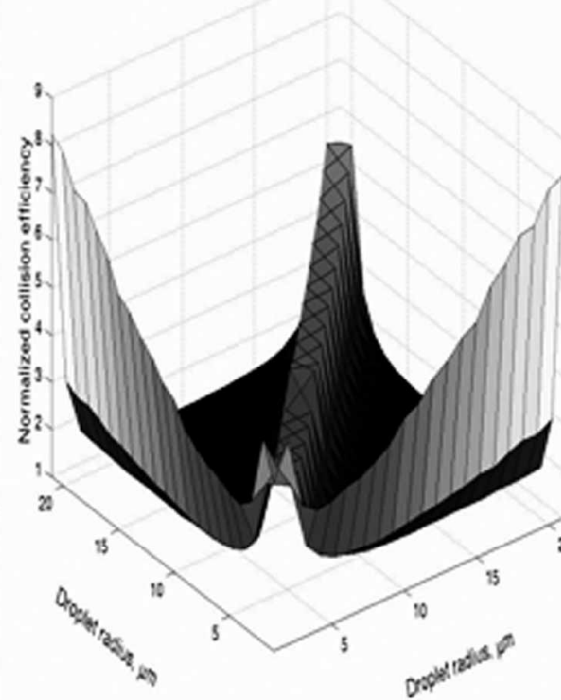
**Стратиформные**

$\varepsilon = 10 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-2}, \text{Re}_d = 5 \cdot 10^3$

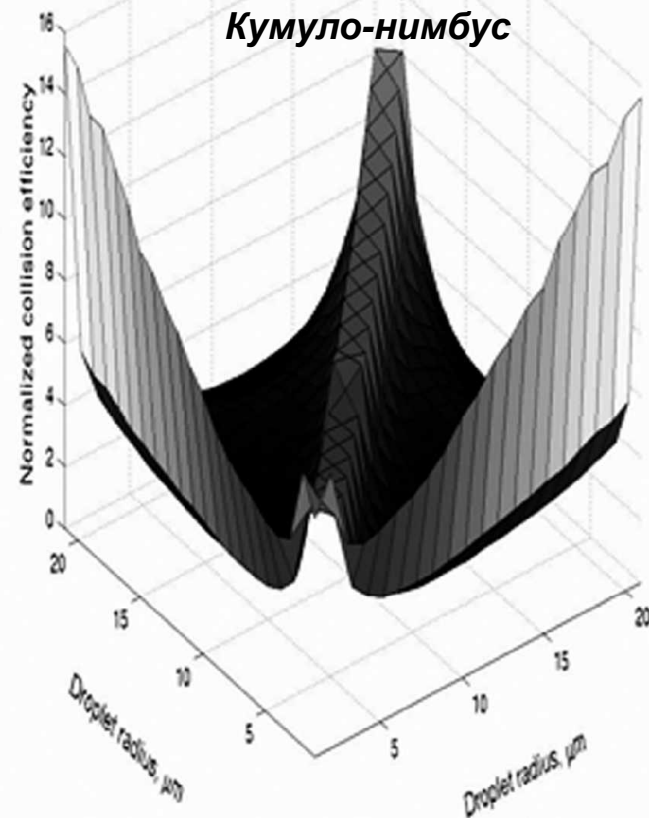


$\varepsilon = 200 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-2}, \text{Re}_d = 2 \cdot 10^4$

**Кучевые**



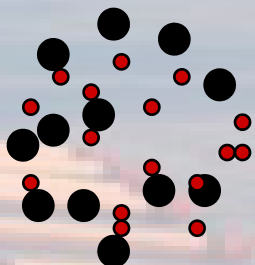
**Кумуло-нимбус**



An aerial photograph of a vast agricultural field, likely a rice paddy, with rows of crops stretching towards the horizon. A bright light source, possibly the sun, is visible on the horizon, creating a lens flare effect. The sky is filled with soft, white clouds. A white rectangular box is overlaid on the image, containing the title text.

*Оценка эффекта кластеринга капель*

$$\frac{\partial N(m, t)}{\partial t} = \int_0^{m/2} N(m_c, t) K(m_c, m - m_c) N(m - m_c, t) dm' - \int_0^{\infty} N(m, t) K(m, m') N(m', t) dm',$$



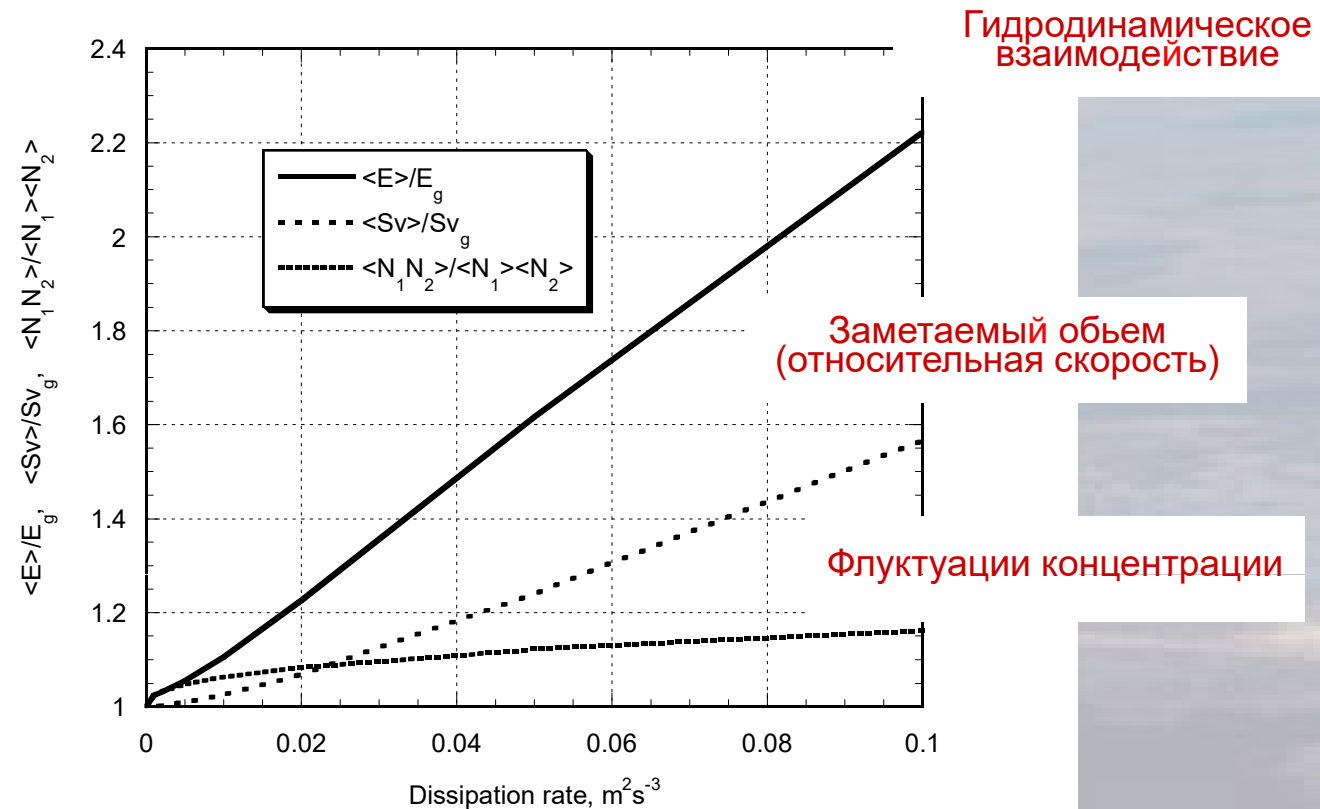
Enhancement factor:  $P_{conc}$

$$\langle N_1 N_2 \rangle = \langle N_1 \rangle \langle N_2 \rangle P_{conc}$$

Из анализа наблюдений в 70 облаках

$$P_{conc} = \bar{P}_{conc}(St_1, St_2) = 1 + 0.333(St_1 \cdot St_2)^{0.317}$$

## Сравнение различных эффектов:



**Dependences of the normalized concentration fluctuations, the normalized swept volume and the normalized collision efficiency on the dissipation rate for the 10 μm- and 20 μm- radii droplet pair.**

**The main turbulent effect goes from the droplet hydrodynamic interaction**

Стохастическое уравнение столкновений с учетом  
эффектов турбулентности.

$$\frac{\partial N(m, t)}{\partial t} = \int_0^{m/2} N(m', t) K_g P_{\text{ker}} P_{\text{conc}} N(m - m', t) dm' - \int_0^{\infty} N(m, t) K(m, m') P_{\text{ker}} P_{\text{conc}} N(m', t) dm',$$

$$K_g = K_g(m', m - m')$$

$$P_{\text{ker}} = \bar{P}_{\text{ker}}(m', m - m')$$

$$P_{\text{conc}} = \bar{P}_{\text{conc}}(St_1, St_2) = 1 + 0.333(St_1 \cdot St_2)^{0.317}$$

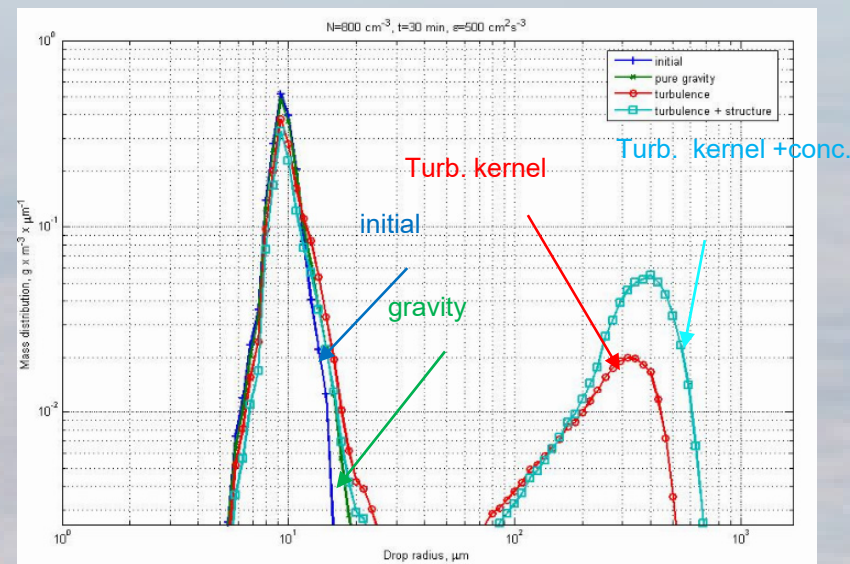
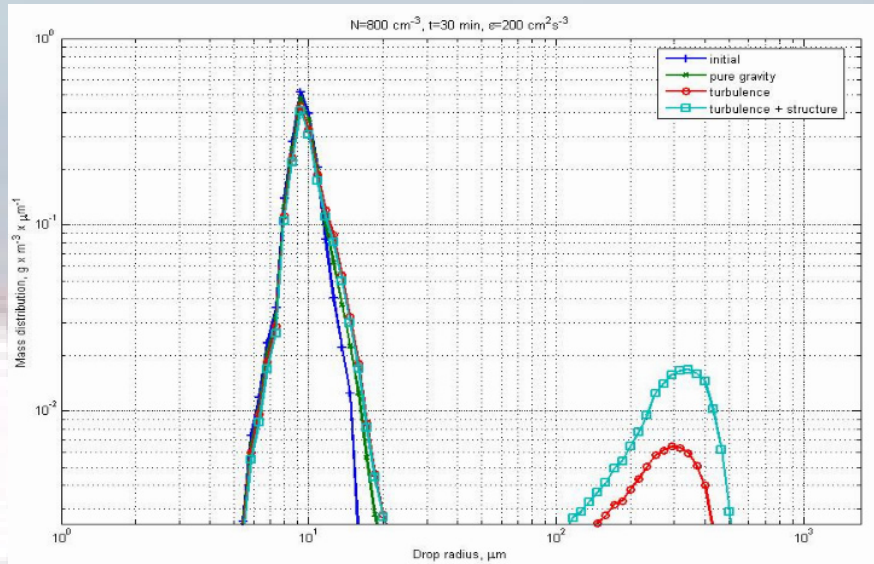
# Иллюстрация турбулентных эффектов на скорость формирования дождевых капель.

$$CWC=2.4 \text{ gm}^{-3} \quad N_{\text{drop}}=800 \text{ cm}^{-3}$$

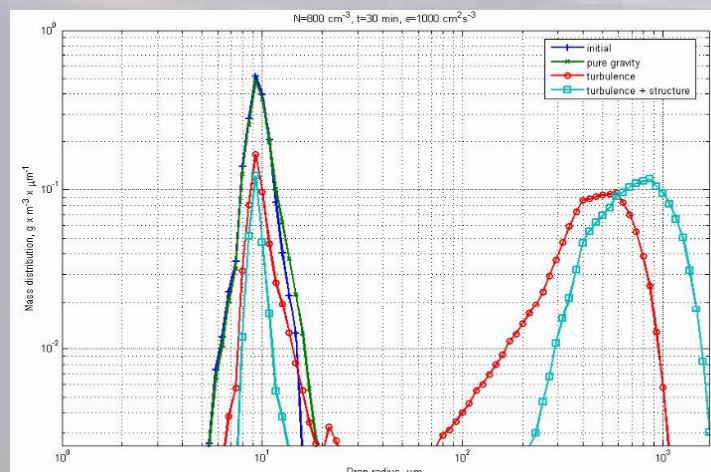
t=30 min

$$\varepsilon = 0.01 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3} \quad Re_{\lambda} = 5 \cdot 10^3$$

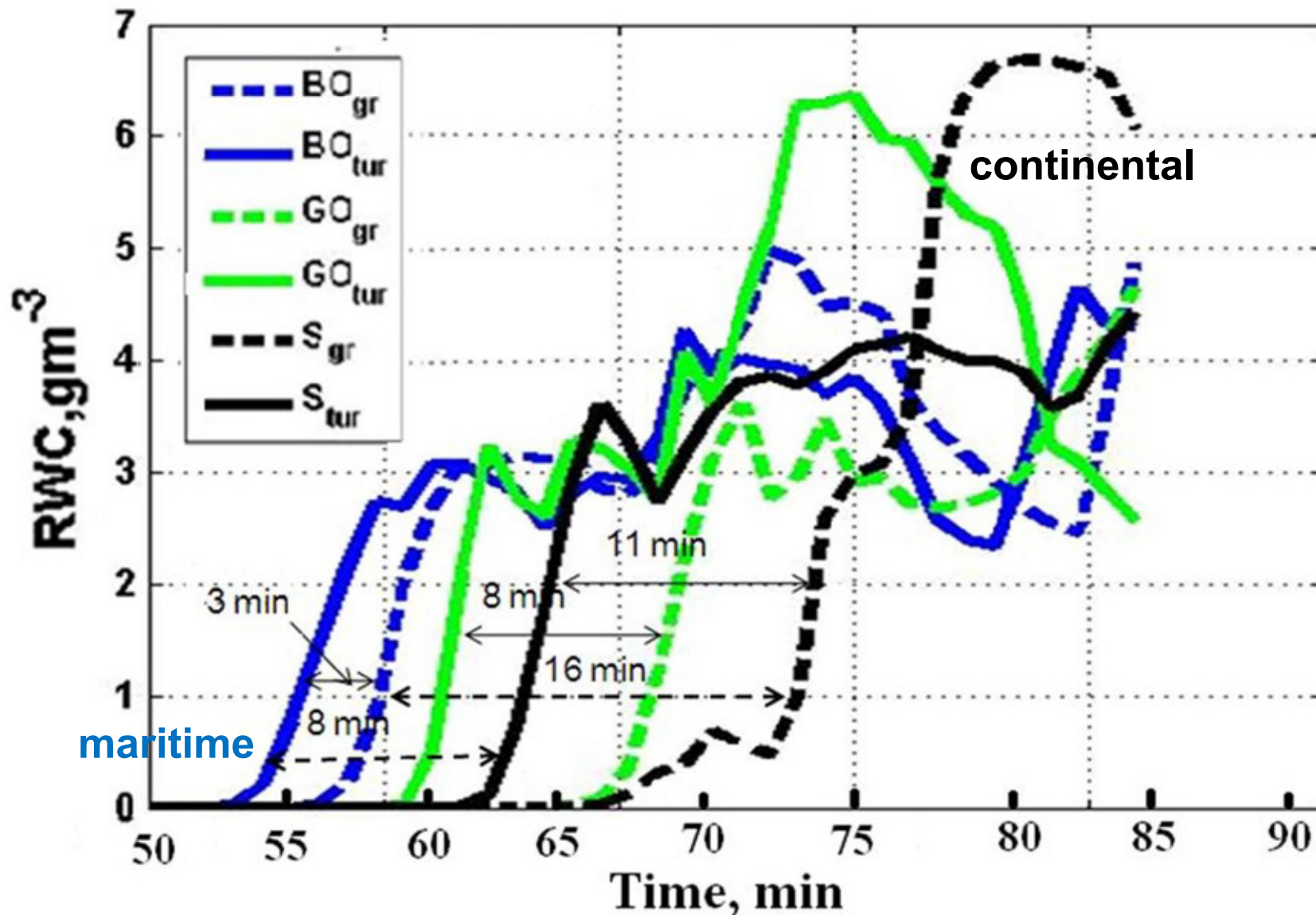
$$\varepsilon = 0.02 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3} \quad Re_{\lambda} = 2 \cdot 10^4$$



$$\varepsilon = 0.1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3} \quad Re_{\lambda} = 2 \cdot 10^4$$



Расчеты по модели облака (50 м резолуция). Видно, что при учете турбулентности дождь начинается раньше. Наибольший эффект в континентальных (большая концентрация аэрозолей) облаках.



### Выводы

**Эффективности столкновений и кернелы столкновений (т.е. скорость столкновений) между каплями рассчитаны для типичных облаков. Теперь они меняются в пространстве и времени.**

**Турбулентность значительно ускоряет столкновения капель и образование дождя.**



## Решена ли задача? Только частично.

Исходное уравнение стохастической коагуляции фактически не стохастическое. Ничего случайного.

Теперь:

$$\frac{\partial N(m, t)}{\partial t} = \int_0^{m/2} \underbrace{N(m_1, t)N(m - m_1, t)S(m_1, m - m_1)E_{col}(m_1, m - m_1)}_{K_{turb} = \text{random}} dm_1 - \int_0^{\infty} \underbrace{N(m, t)N(m_1, t)S(m, m_1)E_{col}(m, m_1)}_{K_{turb} = \text{random}} dm_1,$$

Что было сделано?

$$\frac{\partial N(m, t)}{\partial t} = \int_0^{m/2} \langle N(m_1, t) \rangle \langle N(m - m_1, t) \rangle P_{conc} \langle S(m_1, m - m_1) \rangle \langle E_{col}(m_1, m - m_1) \rangle dm_1 -$$

$$\int_0^{\infty} \langle N(m, t) \rangle \langle N(m_1, t) \rangle P_{conc} \langle S(m, m_1) \rangle \langle E_{col}(m, m_1) \rangle dm_1,$$

Turbulent collision kernels are random variables whose probability density functions have elongated tails. The tails indicate the existence of “lucky” drops experiencing collisions several times more often than other drops, even under spatially uniform concentration. These lucky droplets are large enough to trigger collisions earlier than that following from the case when only the mean values of collision kernels are used.

The accurate approach to write and to solve SCE has not been found yet.



Чтобы решить эти проблемы

**Сотрудничество** физиков, занимающихся  
фундаментальной физикой и  
физикой облаков абсолютно необходимо.



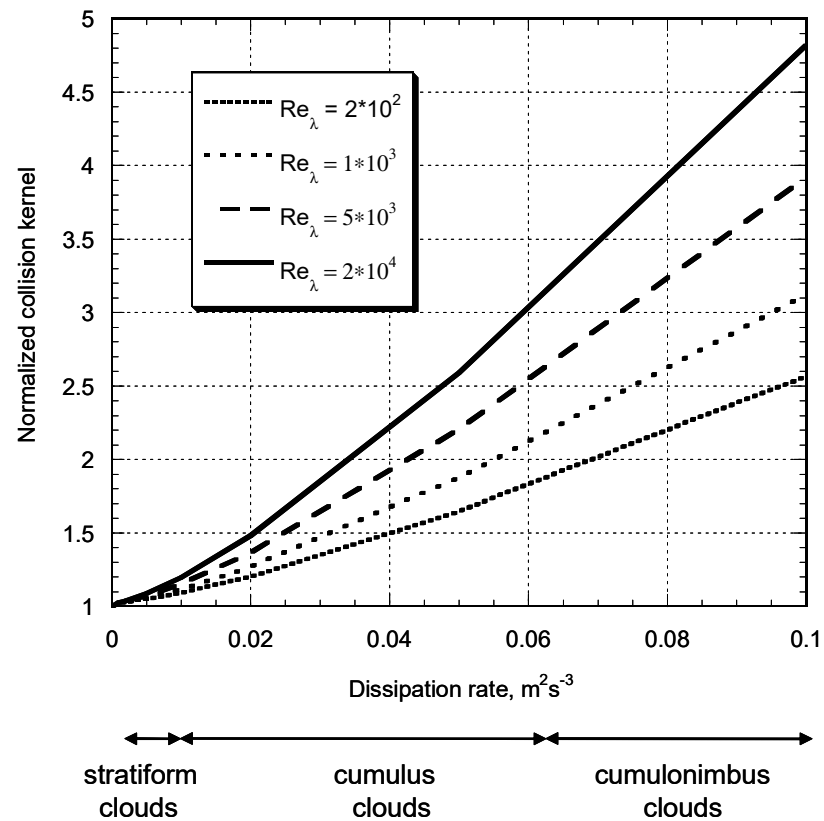
**СПАСИБО!**

## ***FRAMEWORK OF THE STUDY***

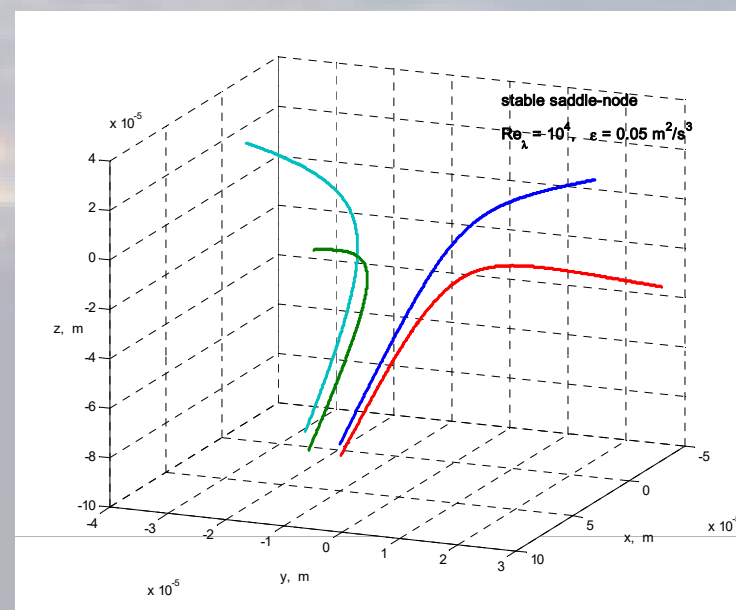
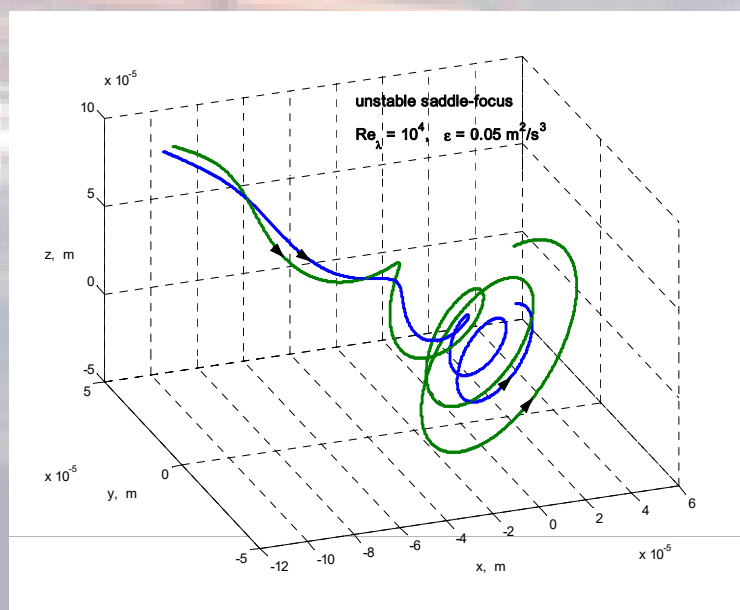
- a) Collisions of cloud droplets with radii below 21  $\mu\text{m}$  ( $\text{St} < 1$ ) are considered.
- b) Collisions in the turbulent flow with properties typical of cloud turbulence (high Re number) are considered.
- c) Three turbulent factors affecting the collision rate are analyzed (swept volume, hydrodynamic interaction, preferential concentration).

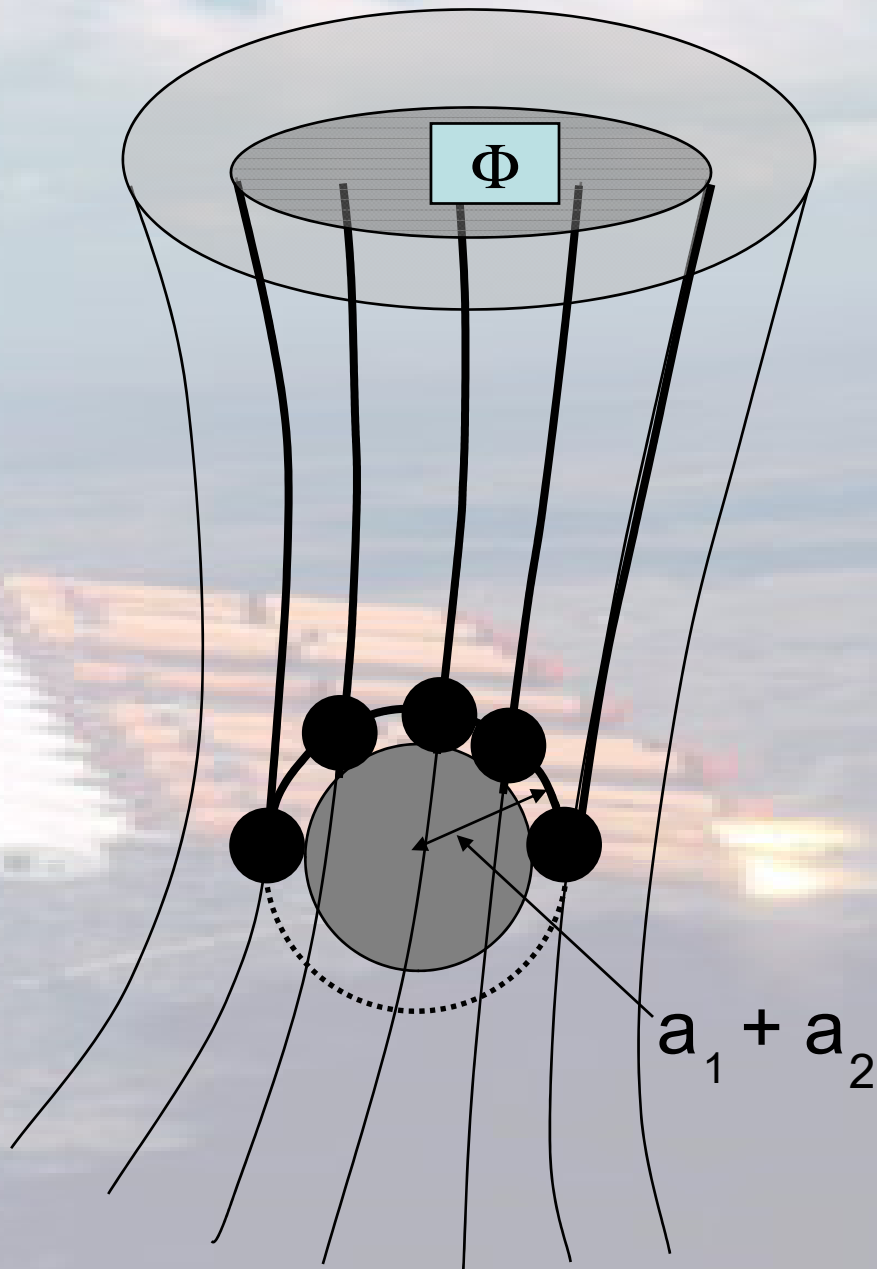
**Dependence of the averaged normalized collision kernel for the 10  $\mu\text{m}$ - and 20  $\mu\text{m}$ - radii droplet pair on the dissipation rate under different Reynolds numbers**

**Зависимость нормализованных ядер столкновения для капель радиусов 10  $\mu\text{m}$ - 20  $\mu\text{m}$**



## Примеры относительного движения капель





Потоки капель  
(сферический кернел  
без гидродинамического  
взаимодействия)

$$a_1 + a_2$$