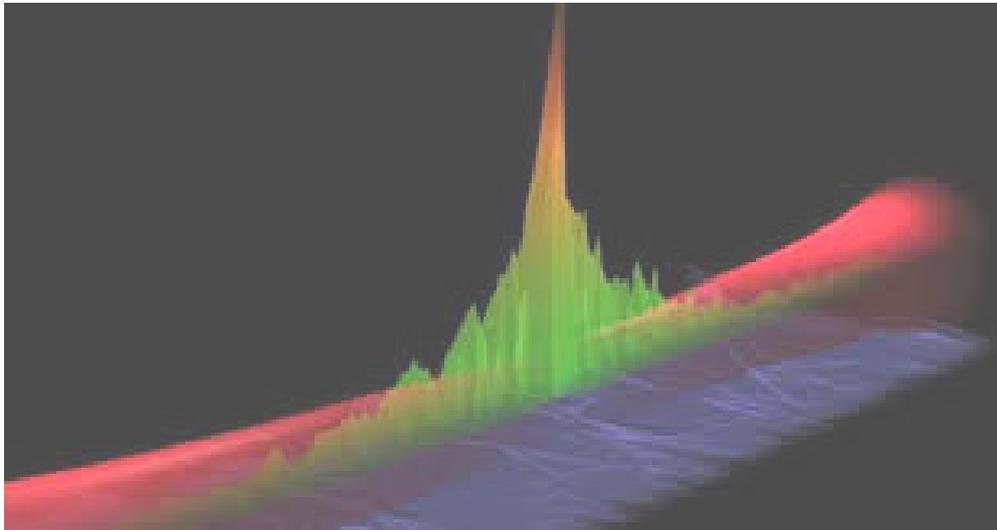


Локализация Андерсона и неэргодические состояния в неупорядоченных системах



Иван Хаймович

*Институт Макса Планка
физики комплексных систем
MPIPKS, Dresden*



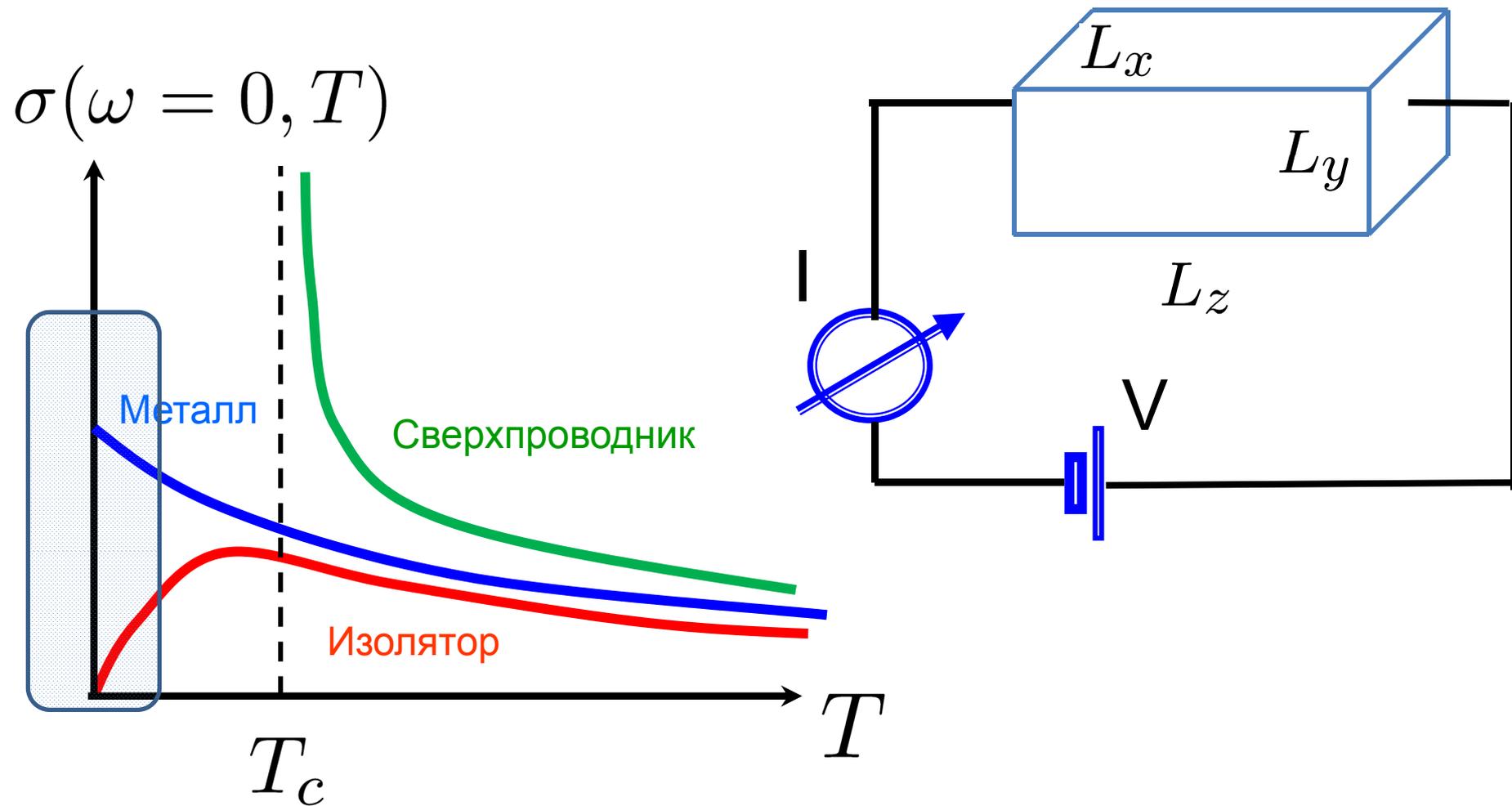
План доклада

- **Введение:**
 - ✓ Металлы и изоляторы. Проводимость
 - ✓ Диффузия. Влияние примесей
 - ✓ Когда важна интерференция (волн)?
 - ✓ Квантовые поправки к проводимости.
Слабая локализация
 - ✓ Локализация Андерсона (ALT): отличие 3d от 1d-2d
 - ✓ Интегрируемость и локализация
 - ✓ Отталкивание уровней: хаос и случайные матрицы?
- **Неэргодические состояния (плохой металл)**
 - ✓ Между хаосом и интегрируемостью
 - ✓ Критическая точка
 - ✓ Обобщённые модели – мультифрактальная фаза
- **Выводы**

План доклада

- **Введение:**
 - ✓ Металлы и изоляторы. Проводимость
 - ✓ Диффузия. Влияние примесей
 - ✓ Когда важна интерференция (волн)?
 - ✓ Квантовые поправки к проводимости.
Слабая локализация
 - ✓ Локализация Андерсона (ALT): отличие 3d от 1d-2d
 - ✓ Интегрируемость и локализация
 - ✓ Отталкивание уровней: хаос и случайные матрицы?
- **Неэргодические состояния (плохой металл)**
 - ✓ Между хаосом и интегрируемостью
 - ✓ Критическая точка
 - ✓ Обобщённые модели – мультифрактальная фаза
- **Выводы**

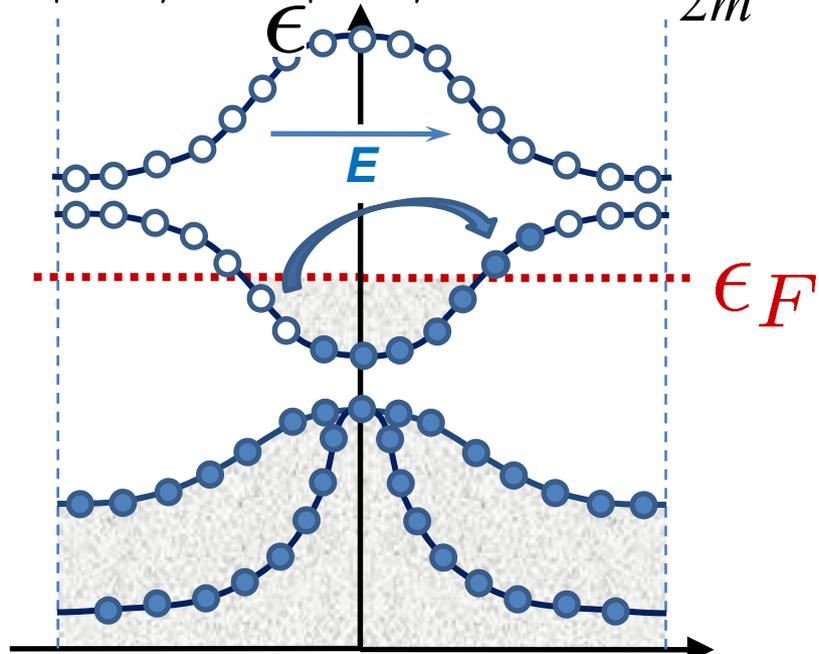
Транспорт в твёрдых телах



Проводимость:
$$\sigma(0, T) = \frac{I}{V} \bigg|_{V \rightarrow 0} \frac{L_z}{L_x L_y}$$

Металлы и изоляторы (зонная теория)

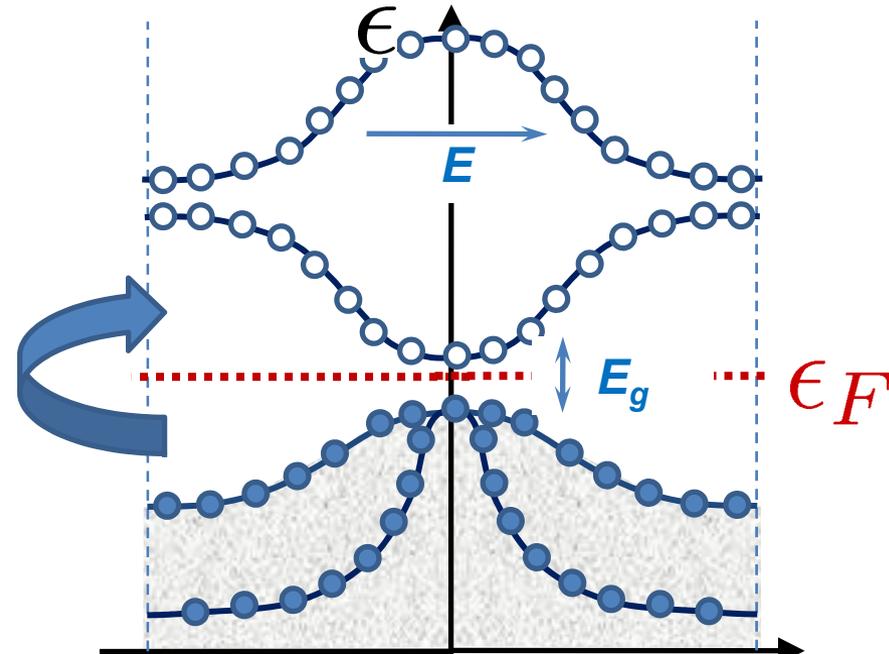
$$H|\psi_E\rangle = E|\psi_E\rangle \quad H = \frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \sum_n V(r - na)$$



$$\sigma(0, T) = \text{const} \quad k$$

металлы

бесщелевой спектр:
транспорт (Допплер-сдвиг)



$$\sigma(0, T) \approx 0 \quad e^{-E_g/T} \quad k$$

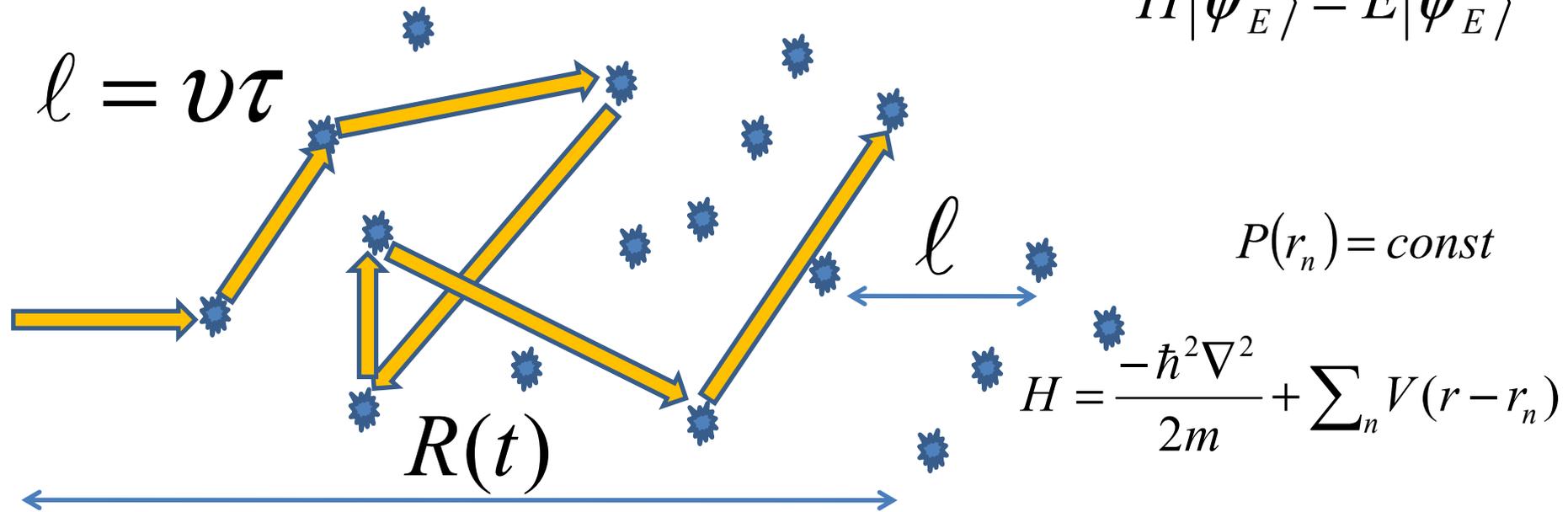
ИЗОЛЯТОРЫ

спектр со щелью:
компенасация – нет транспорта
термическая активация

Проводимость и диффузия

Конечная концентрация примесей $n_i = \ell^{-d}$

$$H|\psi_E\rangle = E|\psi_E\rangle$$

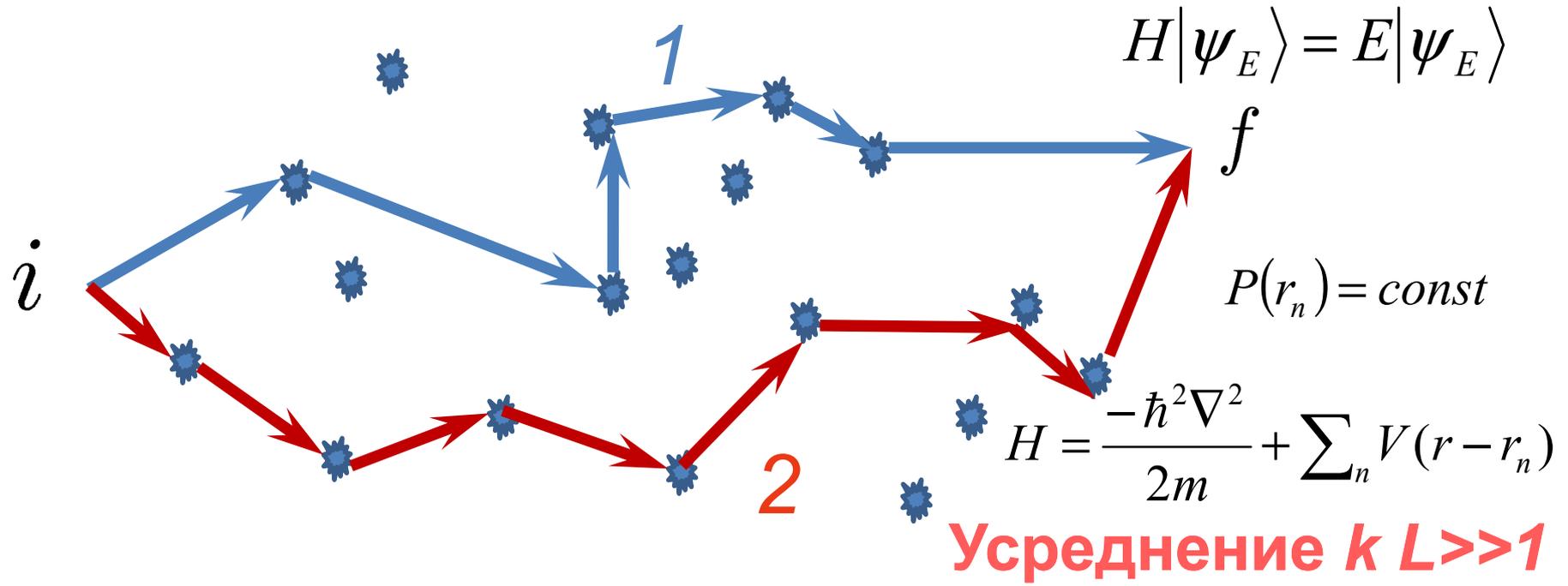


Случайные блуждания = диффузия

$$\langle R(t) \rangle = 0$$

$$\langle R^2(t) \rangle = \ell^2 \frac{t}{\tau} = Dt$$

Почему работает классическое описание? Интерференция.



$$\begin{aligned}
 W_{i \rightarrow f} &= |A_1 + A_2|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + 2\text{Re} A_1 A_2^* \\
 &= \underbrace{W_1 + W_2}_{\text{Классическая вероятность}} + \underbrace{2\sqrt{W_1 W_2} \cos(kL_1 - kL_2)}_{\text{Интерференция}}
 \end{aligned}$$

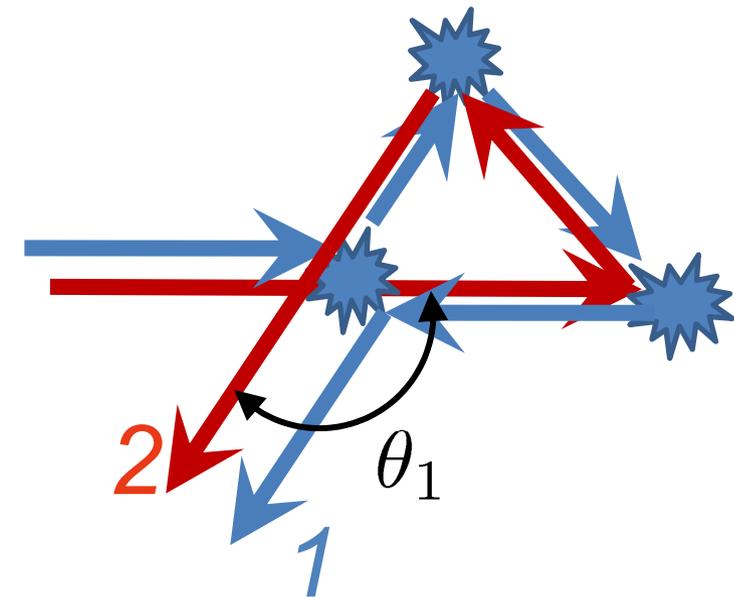
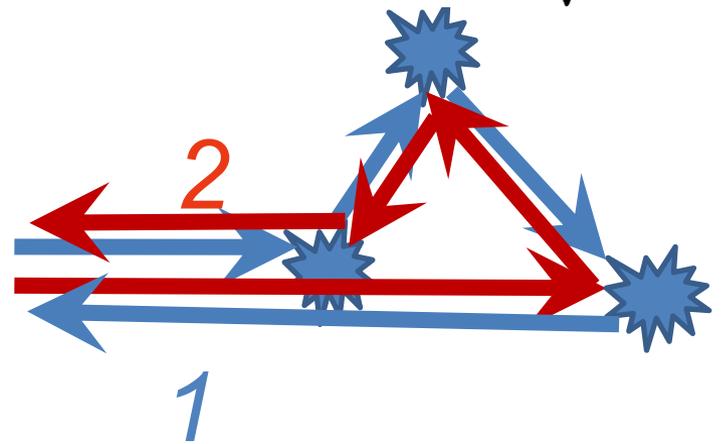
Классическая вероятность

Интерференция

Существенные интерференционные члены

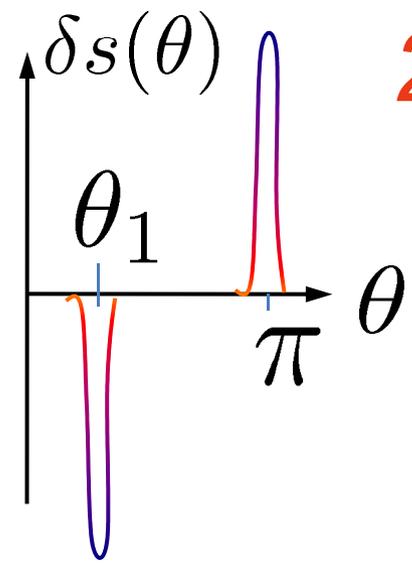
$$= W_1 + W_2 + 2\sqrt{W_1 W_2}$$

Нет разности фаз



Поправка к сечению рассеяния (пара траекторий)

$$s(\theta) = s_1(\theta) + \delta s(\theta)$$

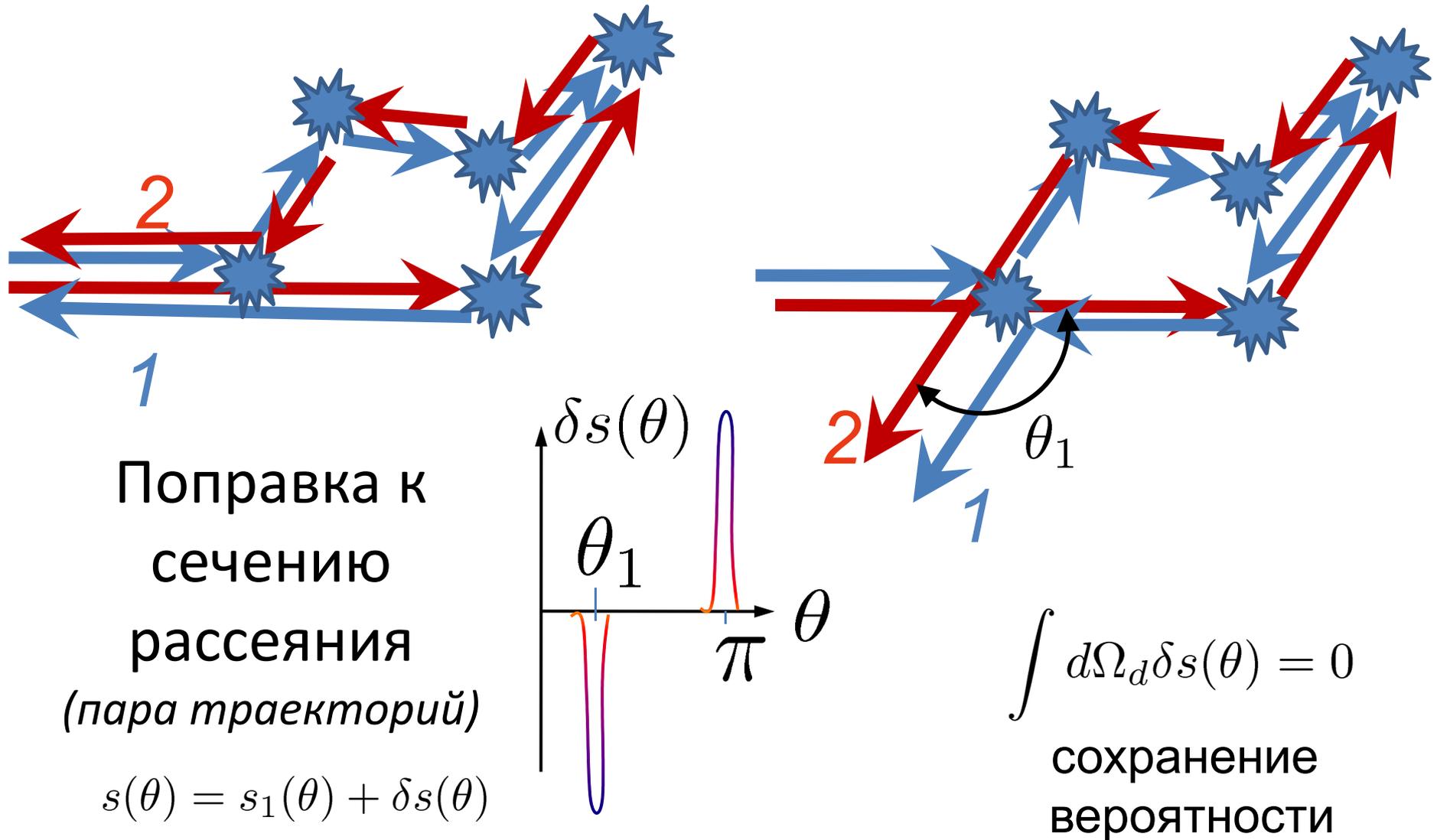


Но есть условие:

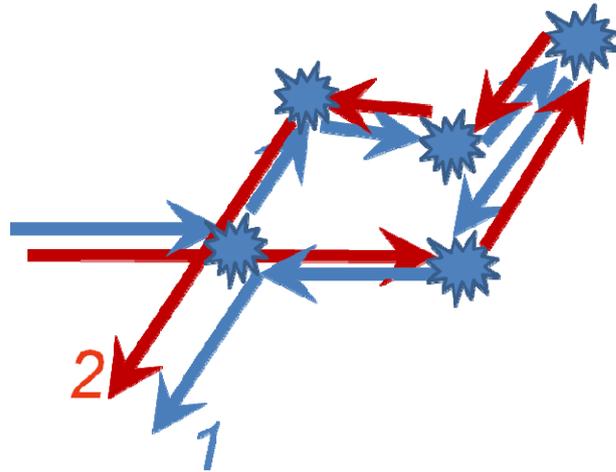
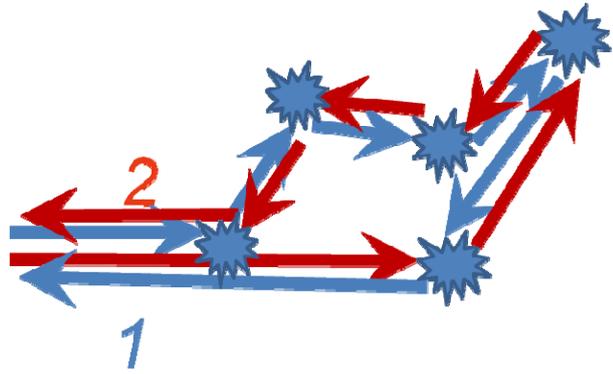
$$\int d\Omega_d \delta s(\theta) = 0$$

сохранение вероятности

Существенные интерференционные члены: не зависит от числа примесей

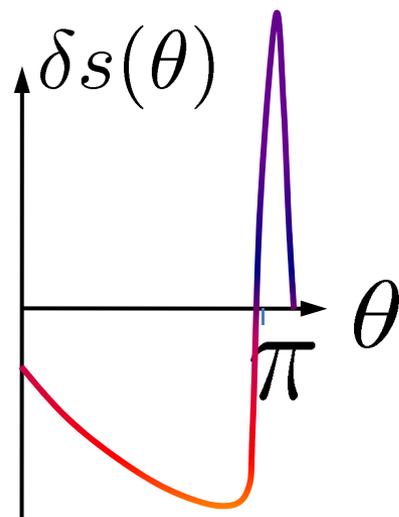
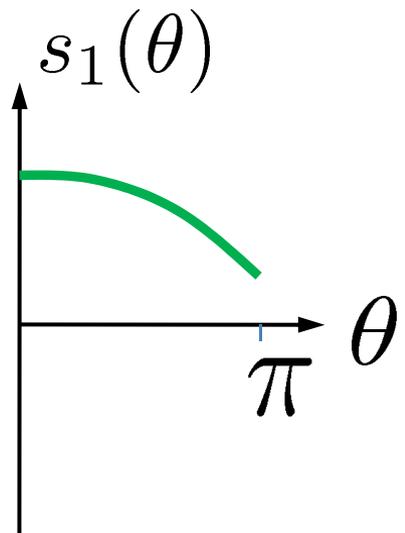


Общий вклад траекторий с самопересечением



$$\int d\Omega_d \delta s(\theta) = 0$$

сохранение
вероятности



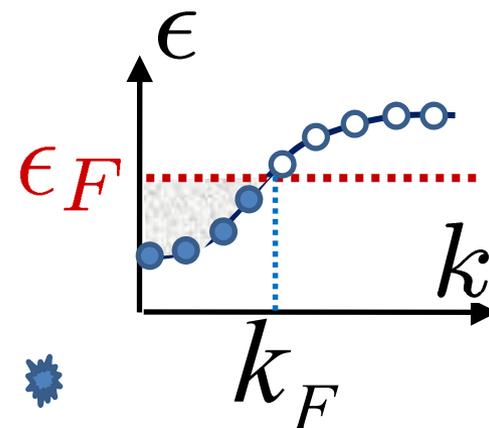
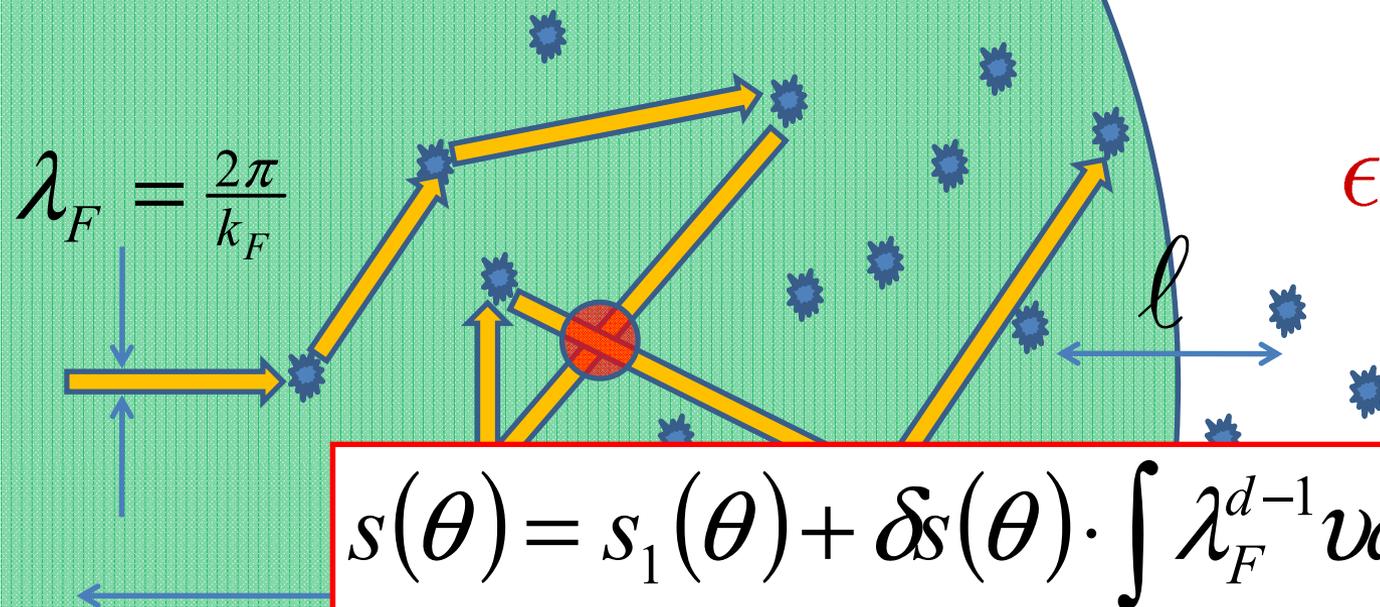
Классическая
вероятность
возврата
случайного
блуждания

$$s(\theta) = s_1(\theta) + \delta s(\theta) \cdot \int \lambda_F^{d-1} v dt / (Dt)^{d/2}$$

Классическая вероятность возврата случайного блуждания

Конечная концентрация примесей $n_i = \ell^{-d}$

$$\ell = v\tau$$



$$s(\theta) = s_1(\theta) + \delta s(\theta) \cdot \int \lambda_F^{d-1} v dt / (Dt)^{d/2} Dt$$

Вероятность траектории с самопересечением

Общий объём:

$$V_{tot} \sim R^d(t) = (Dt)^{d/2}$$

Объём пересечения в $(t, t+dt)$:

$$dV \sim \lambda_F^{d-1} v dt$$

Слабая локализация

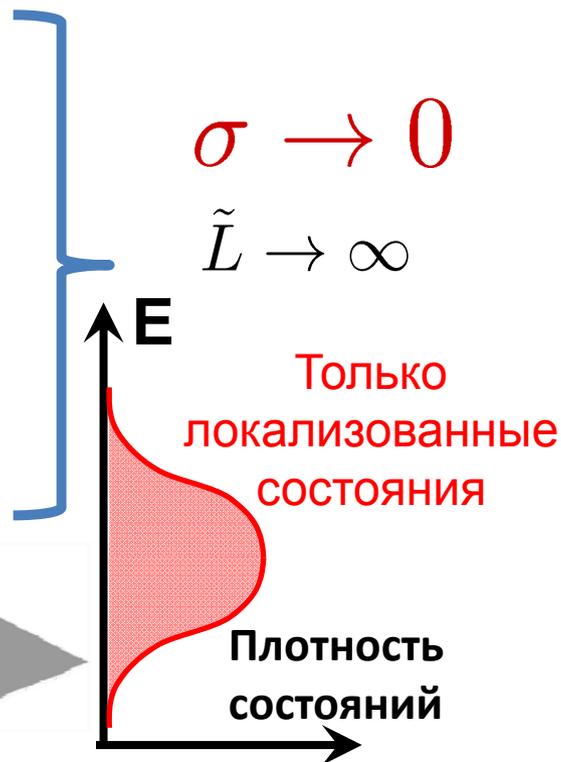
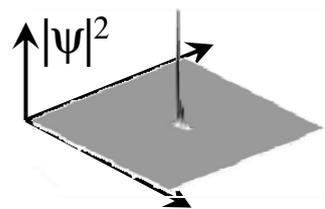
Квантовые поправки к проводимости

$$\sigma = \sigma_D - const + \frac{e^2}{2\pi^3\hbar} \frac{1}{\tilde{L}} \quad 3D$$

$$\sigma = \sigma_D - \frac{e^2}{\pi^2\hbar} \ln \left(\frac{\tilde{L}}{\ell} \right) \quad 2D$$

$$\sigma = \sigma_D - \frac{e^2}{\pi\hbar} \tilde{L} \quad 1D$$

$$\tilde{L} = \min \left(L, L_\omega = \sqrt{\frac{D}{\omega}}, L_H = \sqrt{\frac{\hbar c}{eH}}, L_\phi, \dots \right)$$

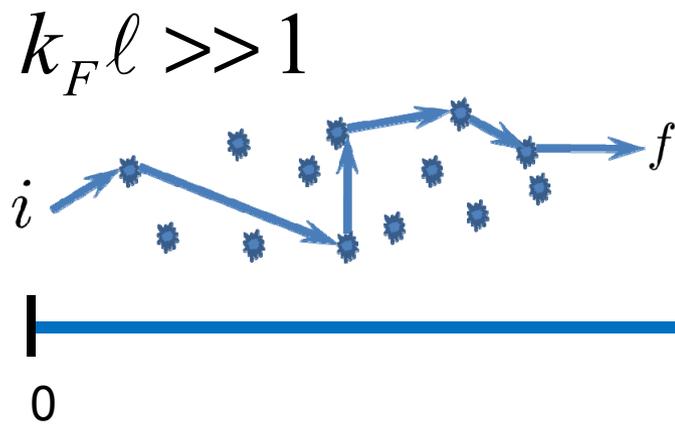


(Горьков, Ларкин, Хмельницкий, 1979)

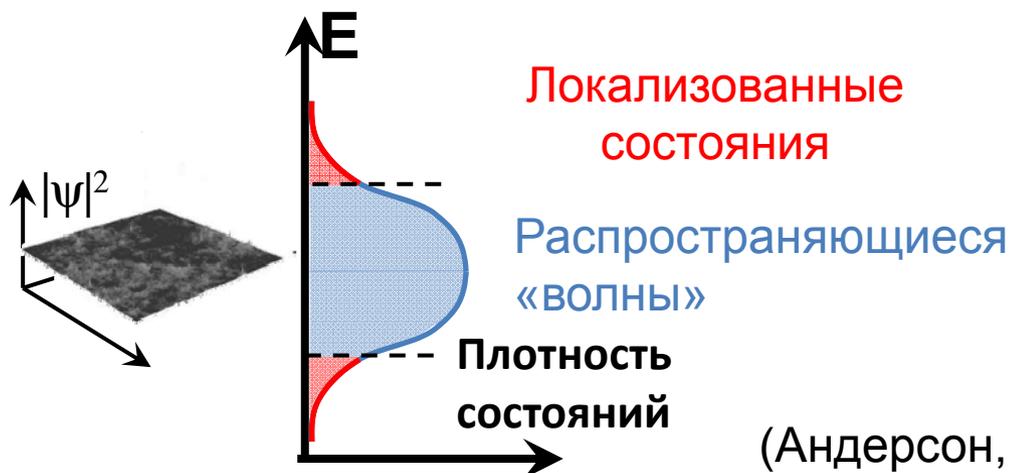
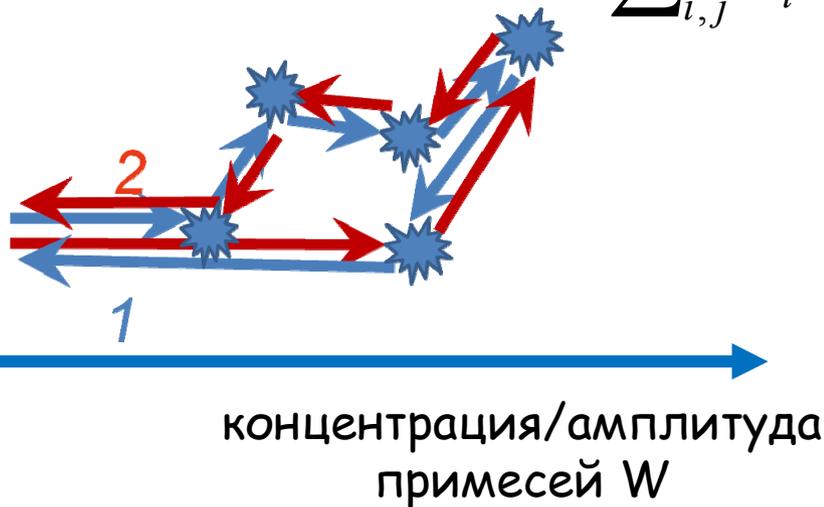
Локализация Андерсона в 3d

$$\sigma = \sigma_D - \delta\sigma(W) + \frac{e^2}{2\pi^3 \hbar \tilde{L}}$$

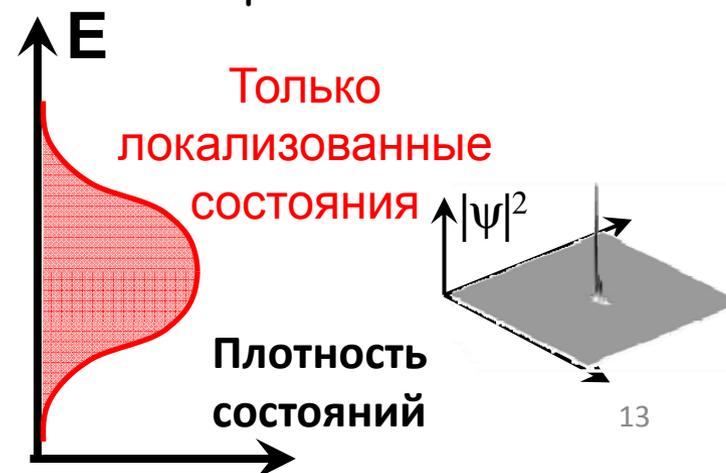
$$W_{i \rightarrow f} = \left| \sum_i A_i \right|^2 = \sum_i |A_i|^2 + 2 \operatorname{Re} \sum_{i,j} A_i A_j^*$$



Переход Андерсона



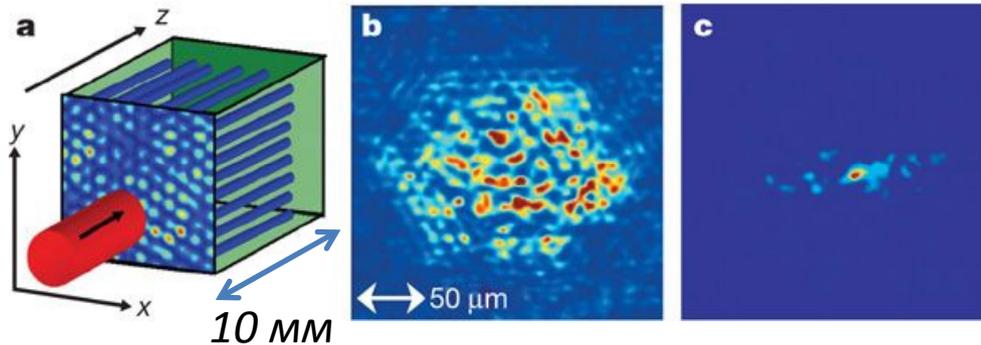
(Андерсон, 1958)



Эксперименты по локализации

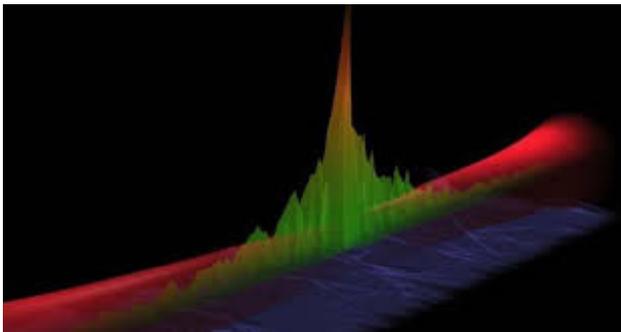
Локализация света

Wiersma et al. *Nature* 390, 671-673 (1997).
Scheffold et al. *Nature* 398, 206-270 (1999),
Schwartz et al. *Nature* 446, 52-55 (2007).



Ультрахолодные атомы

Billy et al. *Nature* 453, 891 (2008).
Roati et al. *Nature* 453, 895 (2008).

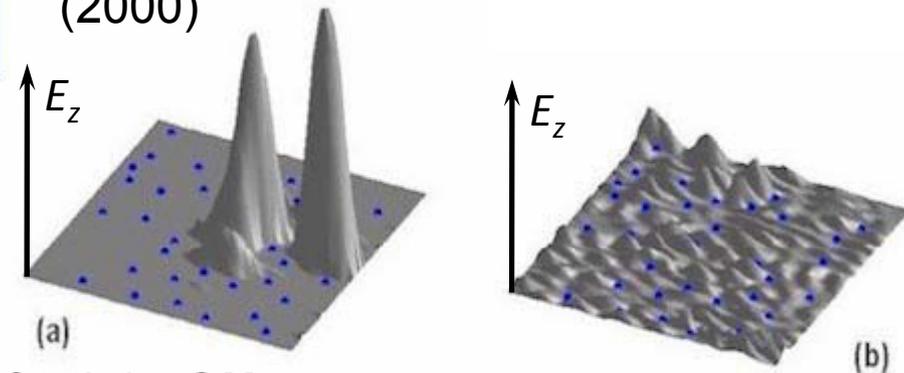


Спиновая диффузия в п/п

Feher, G., Gere, E. A.,
Phys. Rev. 114, 1219 и 1245 (1959).

Локализация микроволн

Dalichaouch et al. *Nature* 354, 53, (1991).
Chabanov et al. *Nature* 404, 850, (2000).
Pradhan et al. *Phys. Rev. Lett.* 85, 2360 (2000)



$f = 3.04$ GHz
 $k_F \ell \sim 1$

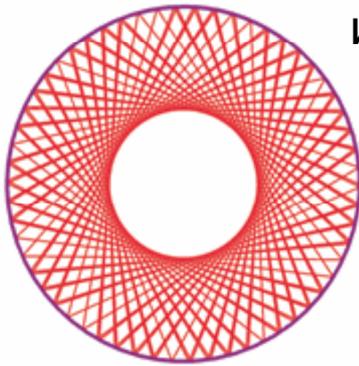
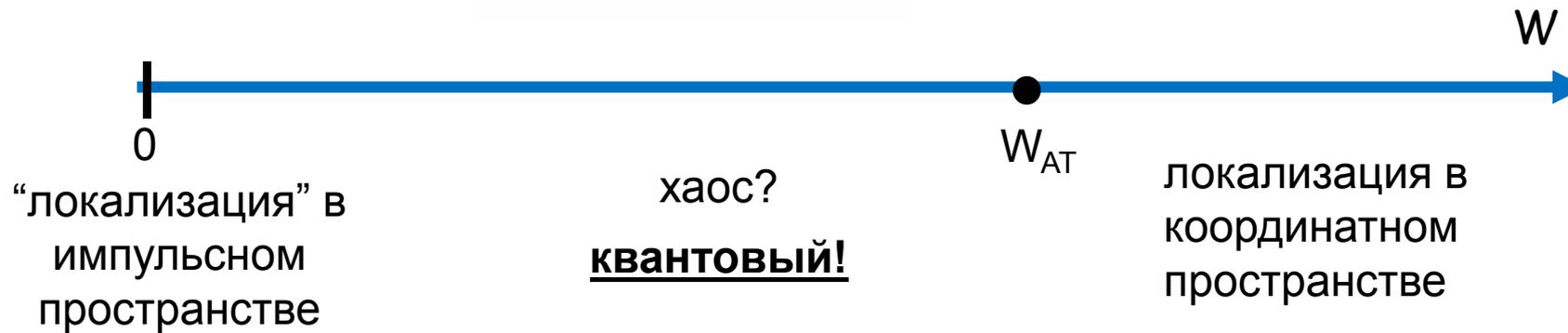
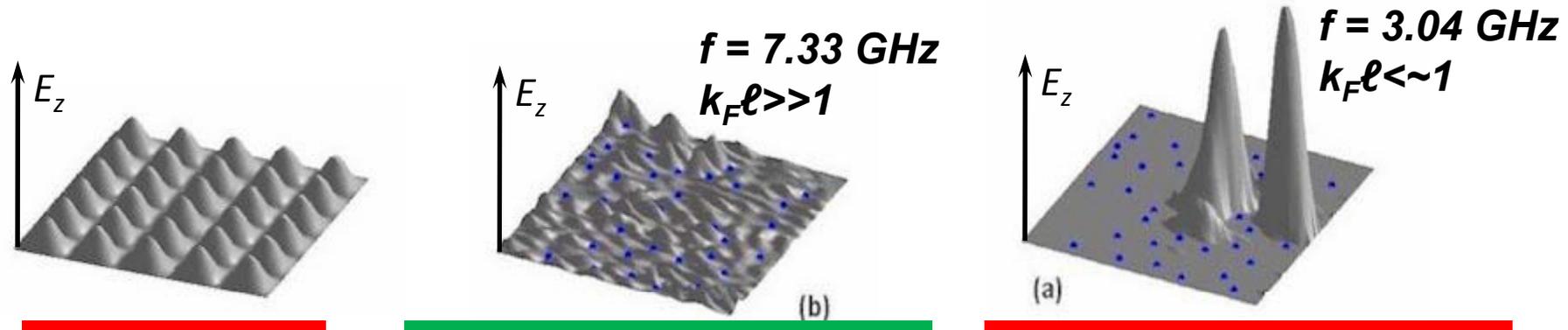
$f = 7.33$ GHz
 $k_F \ell \gg 1$

Локализация звука

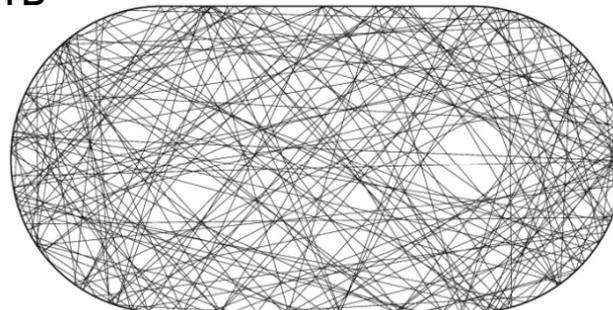
Weaver, *Wave Motion* 12, 129-142 (1990).

Локализация и интегрируемость

Pradhan et al. Phys. Rev. Lett. 85, 2360 (2000)

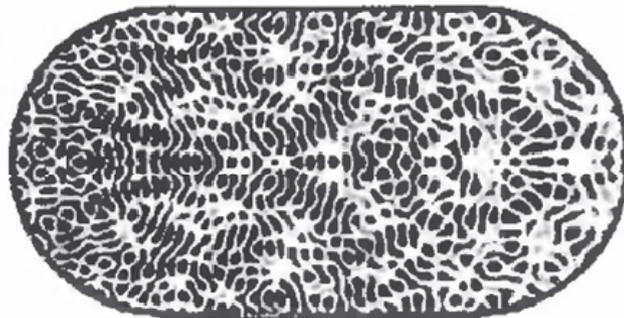
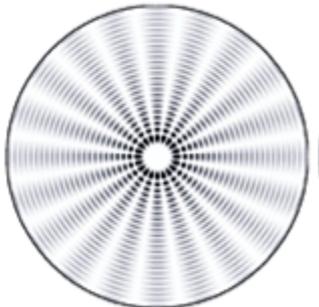
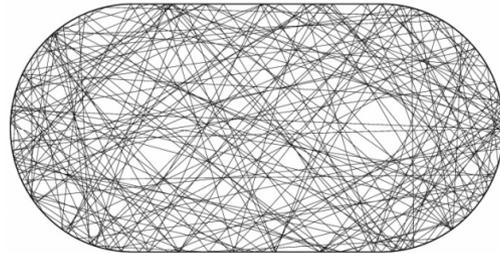
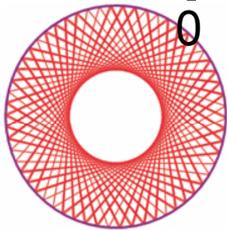
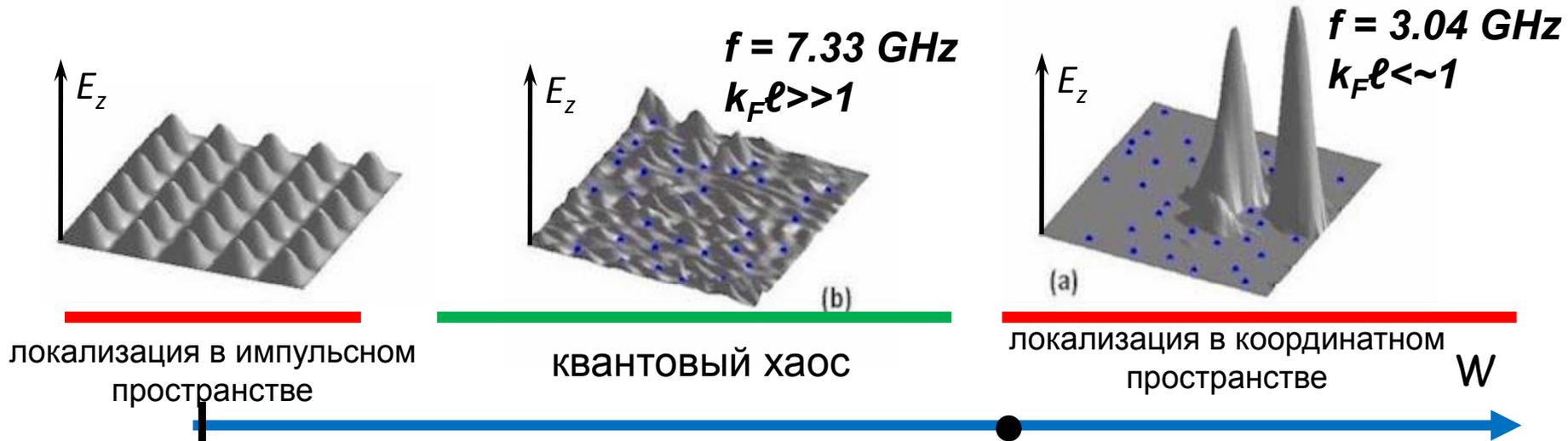


интегрируемость
(бильярда)



Локализация и интегрируемость

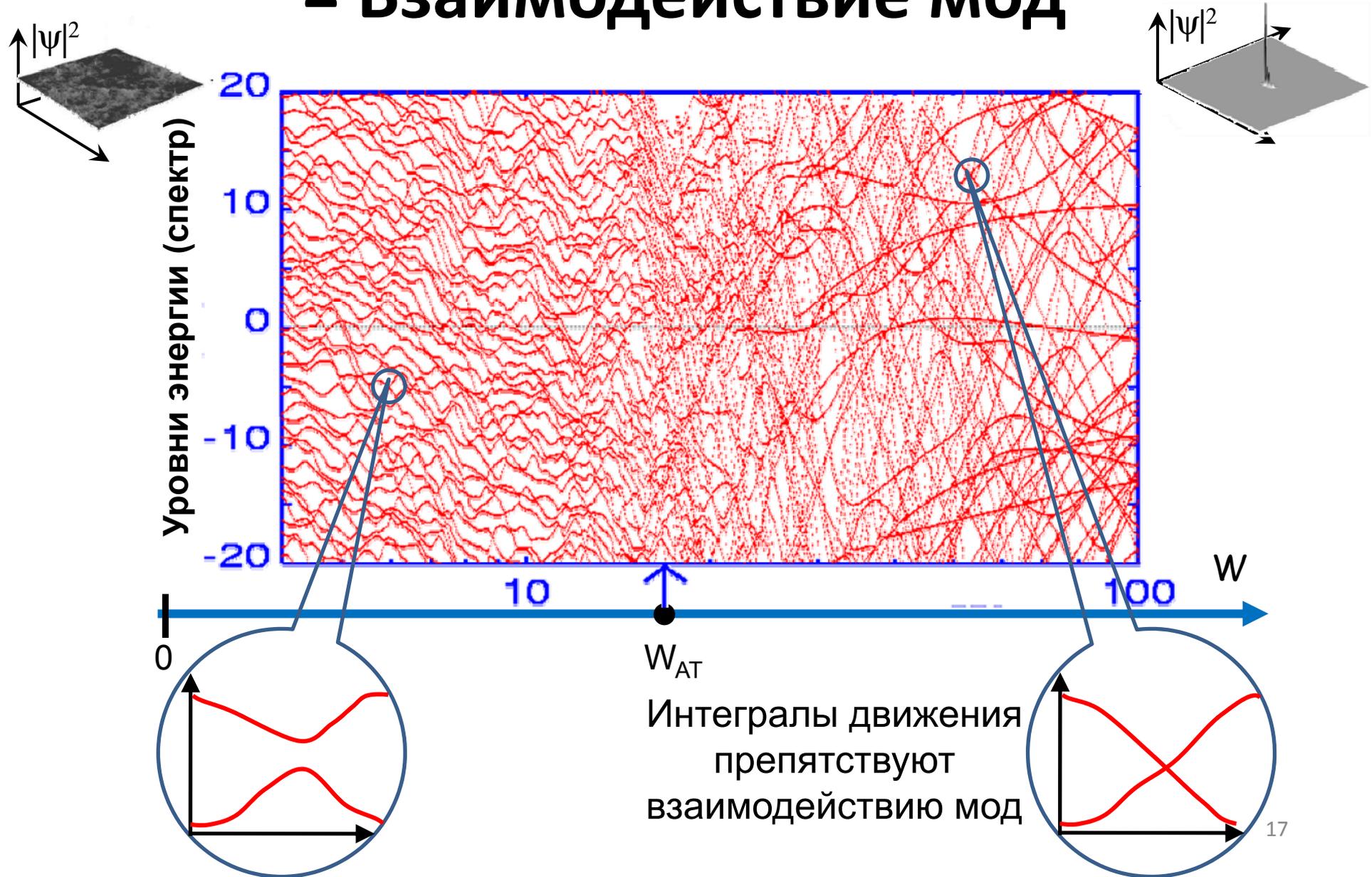
Pradhan et al. Phys. Rev. Lett. 85, 2360 (2000)



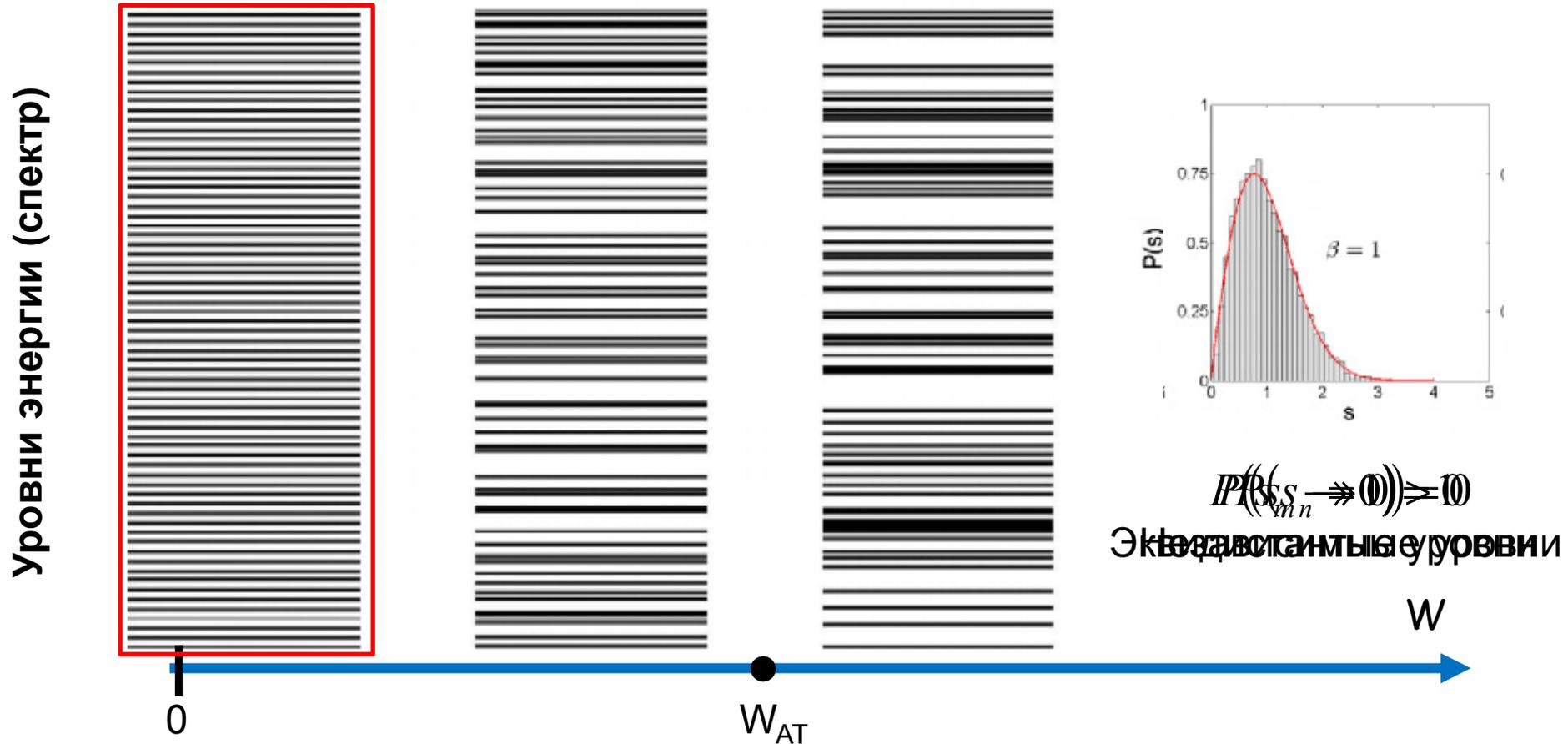
Локализация – это появление локальной интегрируемости в каком-то базисе.

Мера локализации, не зависящая от базиса?

Отталкивание уровней = = Взаимодействие мод



Отталкивание уровней = = Взаимодействие мод



Статистика расстояний между уровнями

$$s_n = \frac{E_{n+1} - E_n}{\langle E_{m+1} - E_m \rangle_{m,dis}}$$

$$P(s_n \rightarrow 0) \sim s_n^\beta$$

$P(s_n \rightarrow 0) \sim s_n^\beta$
 Эквивалентные уровни

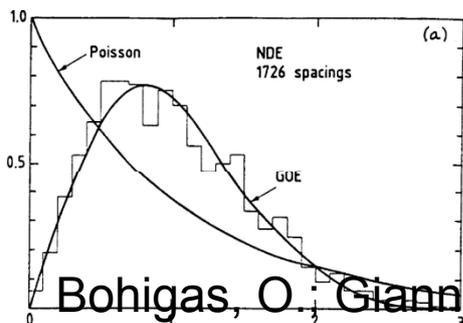
Случайные гауссовы матрицы: Полный квантовый хаос

Случайные гауссовы матрицы – матрицы со случайными элементами, независимо распределёнными по Гауссу:

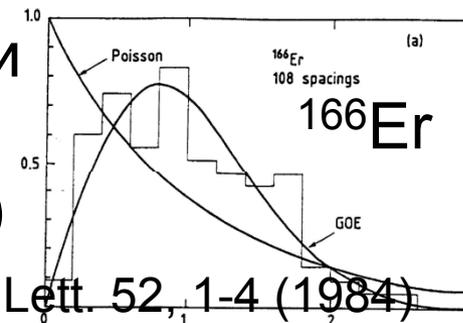
$$\begin{pmatrix} H_{11} & \dots & H_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1} & \dots & H_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \quad \langle H_{mn} \rangle = 0$$

$$\langle H_{mn}^2 \rangle = 1$$

Используются для статистического описания
-спектра тяжёлых ядер



дённые состояния общи
ых квантовых систем
лом степеней свободы)



Bohigas, O.; Giannoni, M.; Schmitz, C. Nature, 137, (1936) 344 Lett. 52, 1-4 (1984)

Случайные гауссовы матрицы: Полный квантовый хаос

Случайные гауссовы матрицы – матрицы со случайными элементами, независимо распределёнными по Гауссу:

$$\begin{pmatrix} H_{11} & \dots & H_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1} & \dots & H_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \langle H_{mn} \rangle &= 0 \\ \langle H_{mn}^2 \rangle &= 1 \end{aligned}$$

Причина отталкивания уровней:

$$E_2 - E_1 \approx \sqrt{(H_{22} - H_{11})^2 + |H_{12}|^2} \ll \langle E_{m+1} - E_m \rangle_{m,dis}$$

$$P(|H_{22} - H_{11}| \ll 1) = const$$

$$P(|H_{12}| \ll 1) \sim |H_{12}|^\beta \quad \beta = 1, 2, 4$$

$$P(s_n \rightarrow 0) \sim s_n^\beta$$

Случайные гауссовы матрицы: Полный квантовый хаос

Случайные гауссовы матрицы – матрицы со случайными элементами, независимо распределёнными по Гауссу:

$$\begin{pmatrix} H_{11} & \dots & H_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1} & \dots & H_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \langle H_{mn} \rangle &= 0 \\ \langle H_{mn}^2 \rangle &= 1 \end{aligned}$$

Статистическая независимость от базиса (эргодичность):

$$H = U \Lambda U^+ \quad dP(H) = dP(V H V^+)$$

$$dP(U, \Lambda) = d\mu(U) e^{-\beta \sum_i \Lambda_i^2} \prod_{i < j} |\Lambda_i - \Lambda_j|^\beta \quad \beta = 1, 2, 4$$

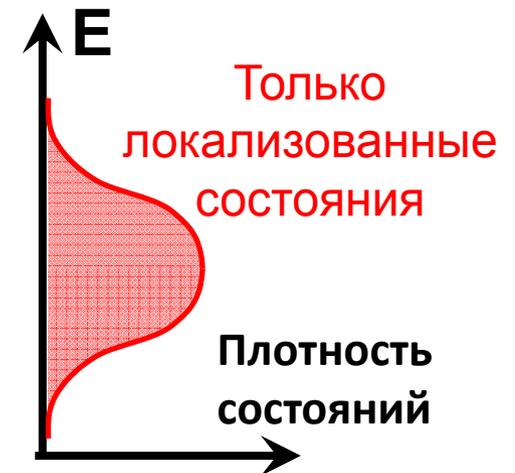
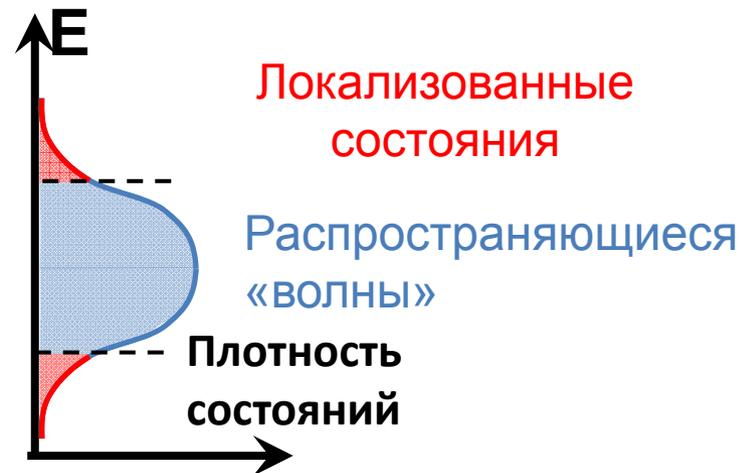
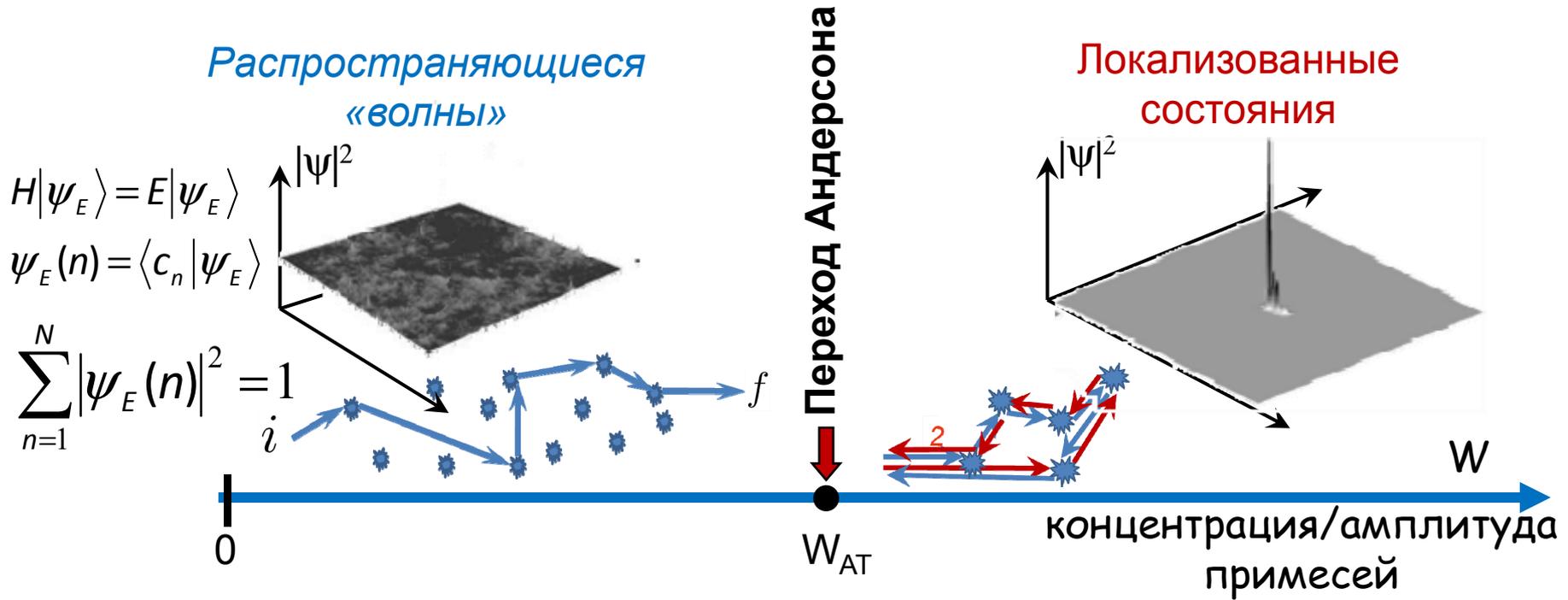
$P(s_n \rightarrow 0) \sim s_n^\beta$

Гауссовы независимые величины остаются такими после любых унитарных преобразований

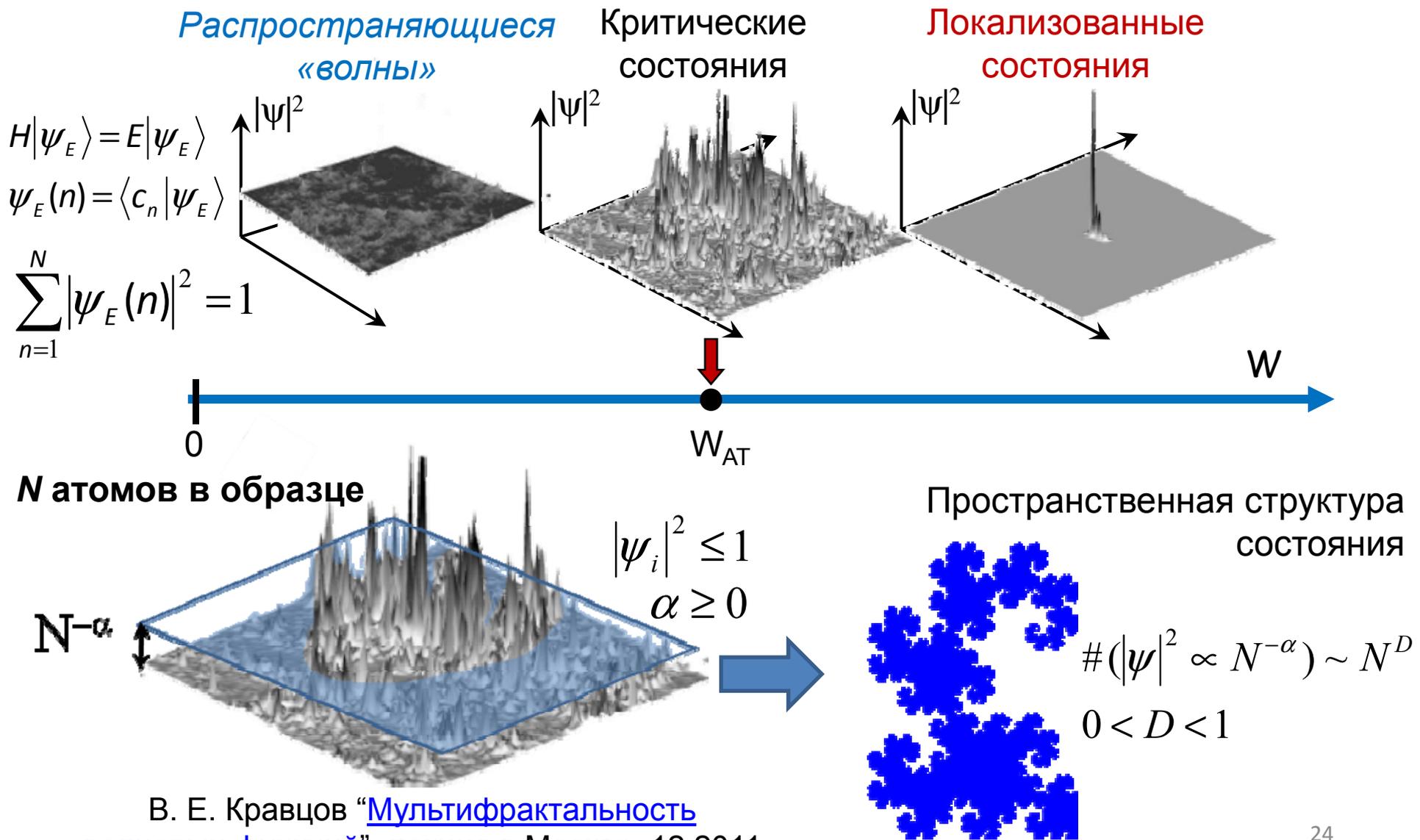
План доклада

- **Введение:**
 - ✓ Металлы и изоляторы. Проводимость
 - ✓ Диффузия. Влияние примесей
 - ✓ Когда важна интерференция (волн)?
 - ✓ Квантовые поправки к проводимости.
Слабая локализация
 - ✓ Локализация Андерсона (ALT): отличие 3d от 1d-2d
 - ✓ Интегрируемость и локализация
 - ✓ Отталкивание уровней: хаос и случайные матрицы?
- **Неэргодические состояния (плохой металл)**
 - ✓ Между хаосом и интегрируемостью
 - ✓ Критическая точка
 - ✓ Обобщённые модели – мультифрактальная фаза
- **Выводы**

Переход «металл – изолятор»

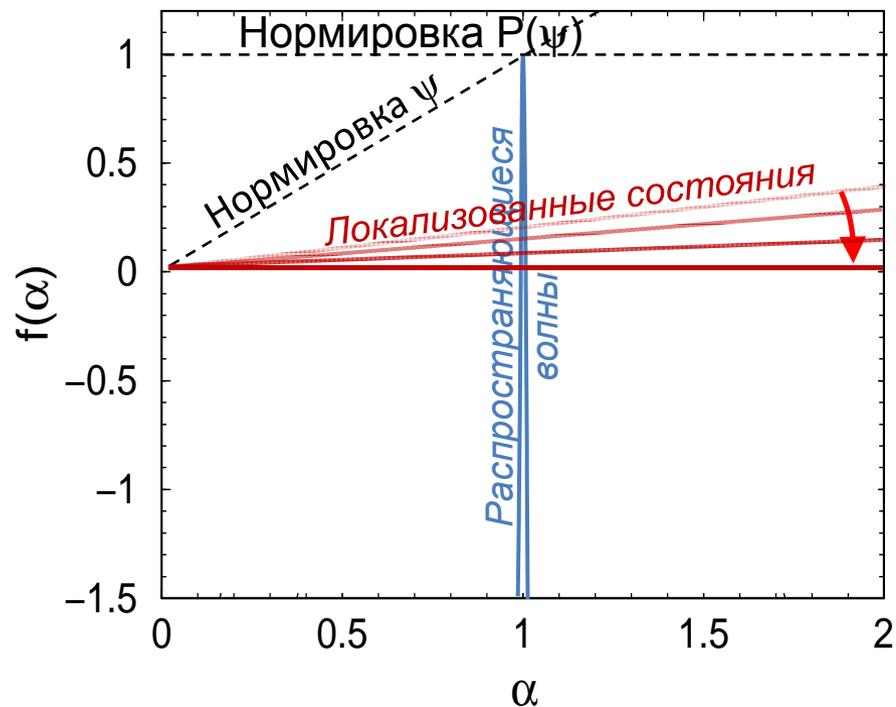


Между локализацией и хаосом

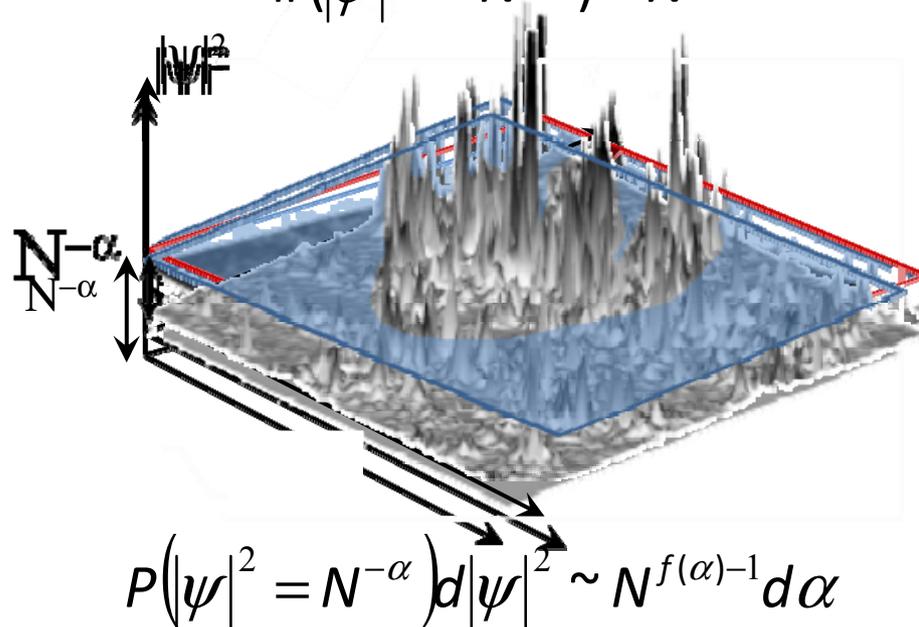


Спектр фрактальных размерностей

Evers, Mirlin RMP **80**, 1355 (2008)



$$\#(|\psi|^2 \propto N^{-\alpha}) \sim N^{f(\alpha)}$$



$$P(|\psi|^2 = N^{-\alpha}) d|\psi|^2 \sim N^{f(\alpha)-1} d\alpha$$

Точная симметрия

$$f(\alpha) = f(2 - \alpha) + \alpha - 1$$

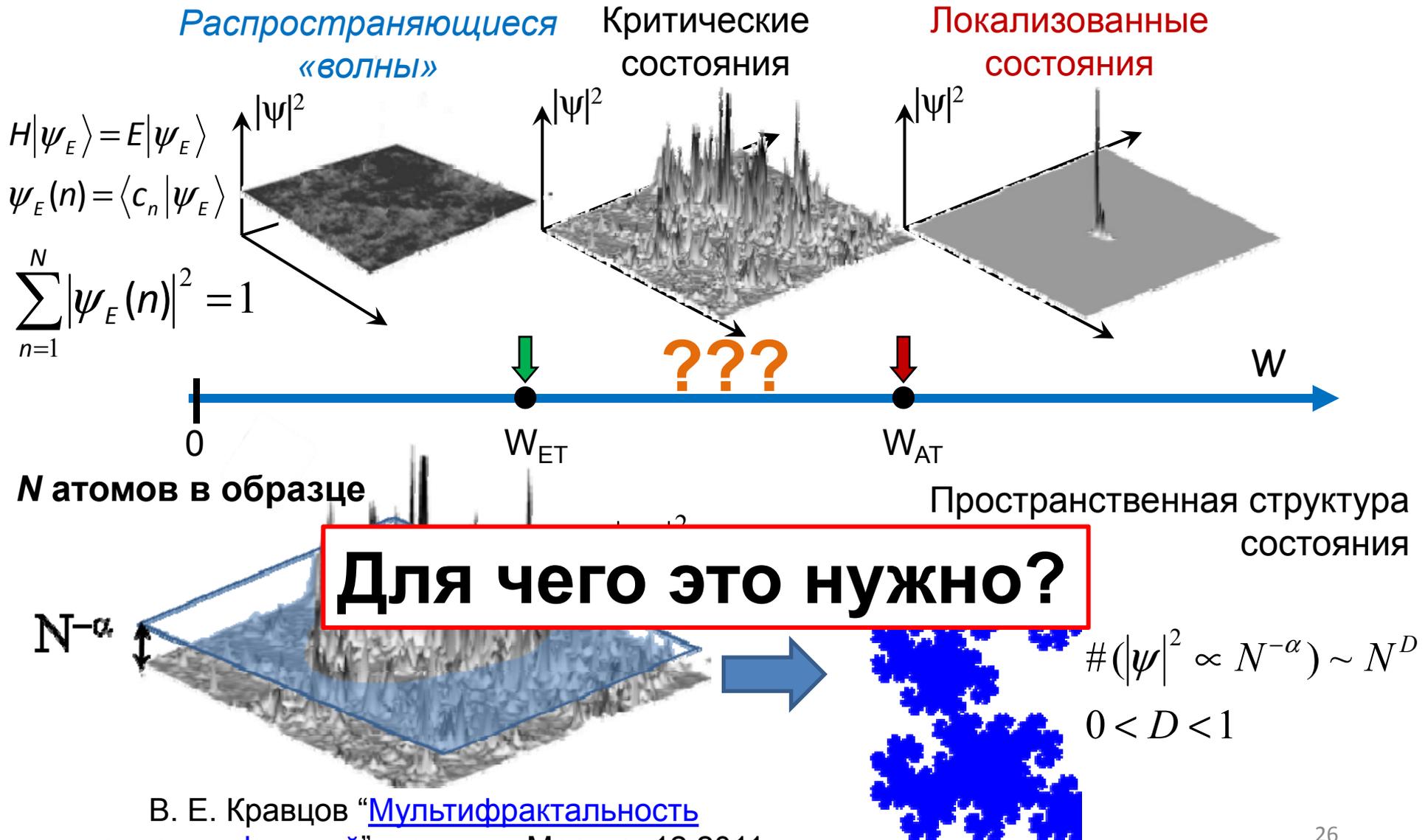
$$0 \leq \alpha \leq 2$$

Mirlin et al PRL **97**, 046803 (2006)

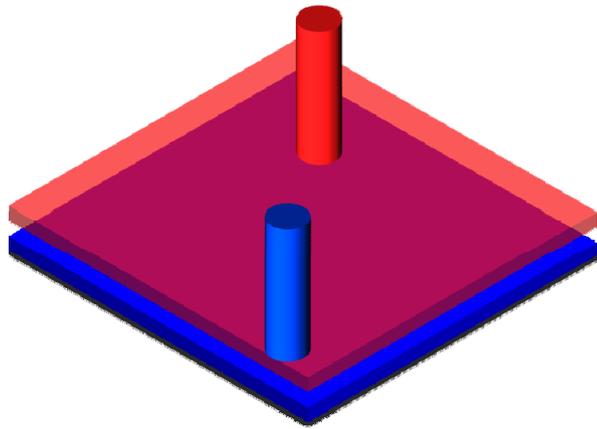
$$|\psi|^2 = N^{-\alpha} \iff \alpha = -\ln|\psi|^2 / \ln N$$

$$|\psi_n|^2 \leq 1 \iff \alpha \geq 0$$

В поисках неэргодической фазы



Применение неэргодических фаз: Усиление сверхпроводимости



$$M_{nm} = V \int d^d r \Psi_n^2(r) \Psi_m^2(r)$$

Металл

$$V \frac{1}{V} \frac{1}{V} = 1$$

*малые амплитуды,
полное перекрытие*

Изолятор

$$V \xi^d \frac{1}{\xi^d} \frac{1}{\xi^d} \times \left(\frac{\xi^d}{V} \right) = 1$$

*большие амплитуды,
слабое и редкое
перекрытие*

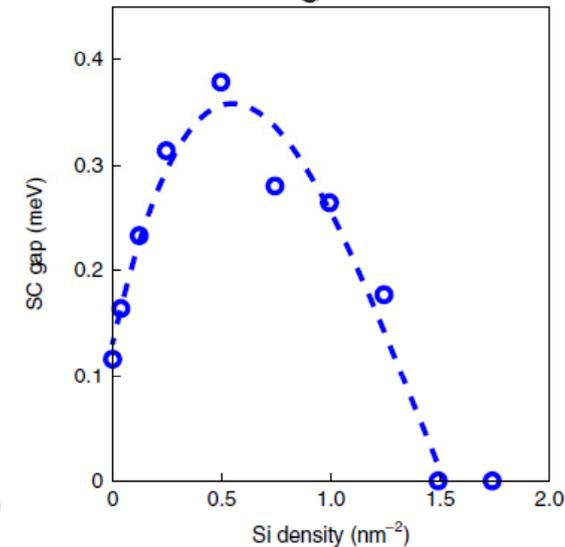
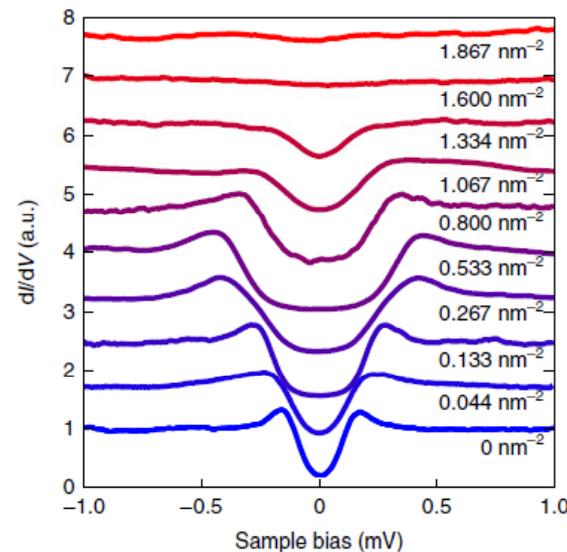
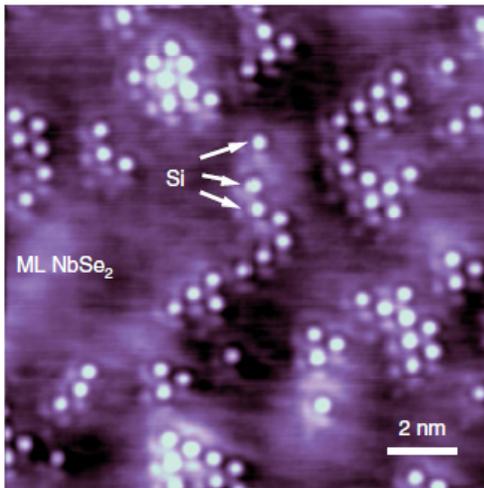
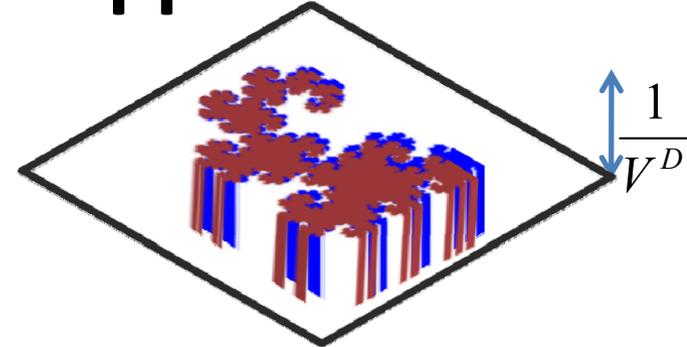
*Фрактальное
состояние*

$$V \frac{1}{V^D} \frac{1}{V^D} = V^{1-D} \gg 1$$

*большие амплитуды,
полное перекрытие*

Применение неэргодических фаз: Усиление сверхпроводимости

$$M_{nm} = V \int d^d r \Psi_n^2(r) \Psi_m^2(r)$$



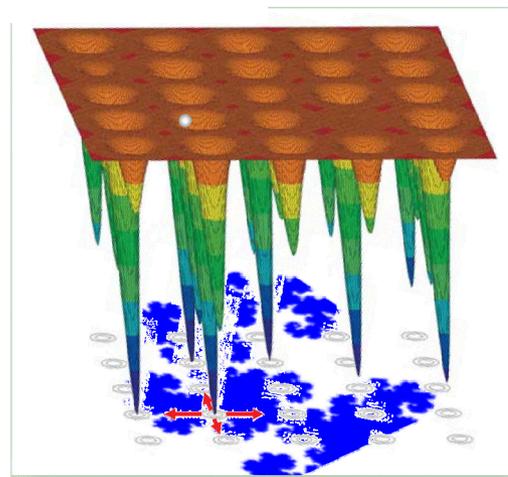
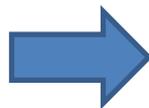
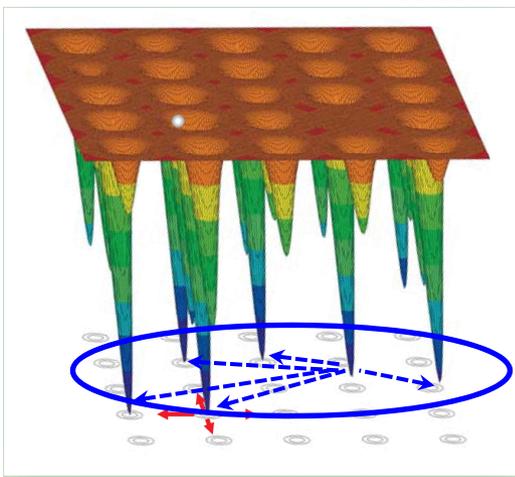
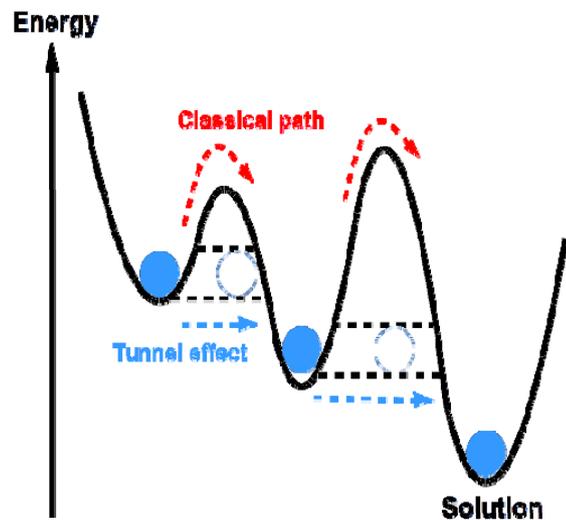
*Фрактальное
состояние*

$$V \frac{1}{V^D} \frac{1}{V^D} = V^{1-D} \gg 1$$

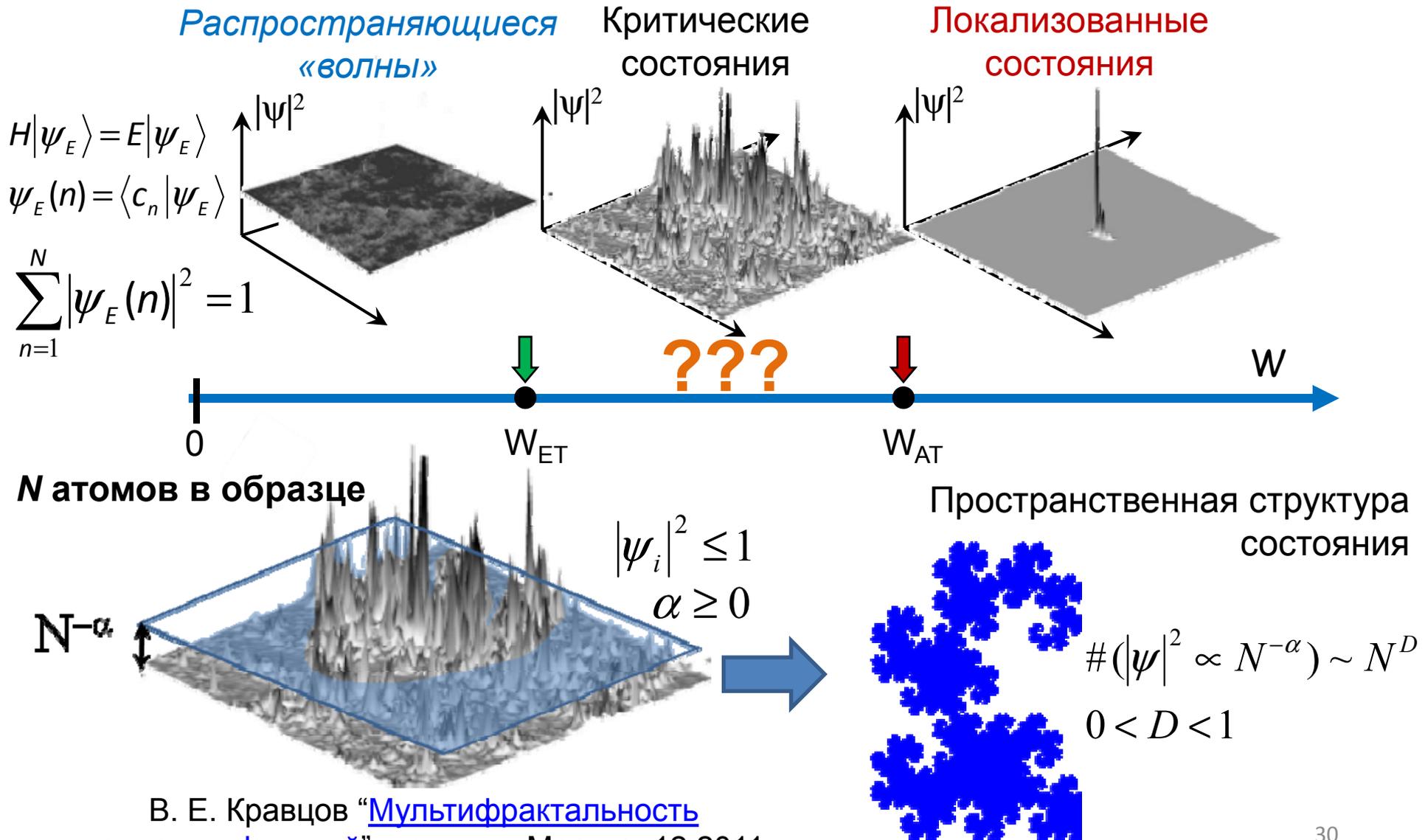
*большие амплитуды,
полное перекрытие*

Применение неэргодических фаз: Ускорение квантового «отжига»

Поиск минимума функции: квантовое туннелирование



В поисках неэргодической фазы



Один шаг от полного квантового хаоса

Случайные гауссовы матрицы – матрицы со случайными элементами, независимо распределёнными по Гауссу:

$$\begin{pmatrix} H_{11} & \dots & H_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1} & \dots & H_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \quad \langle H_{nm}^2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad V \Rightarrow N$$

Розенцвайг – Портер (1960): добавление дополнительного
диагонального беспорядка

$$\langle H_{nm}^2 \rangle = \begin{pmatrix} q & 1 & \dots & 1 \\ 1 & q & 1 & \vdots \\ \vdots & 1 & q & 1 \\ 1 & \dots & 1 & q \end{pmatrix}$$

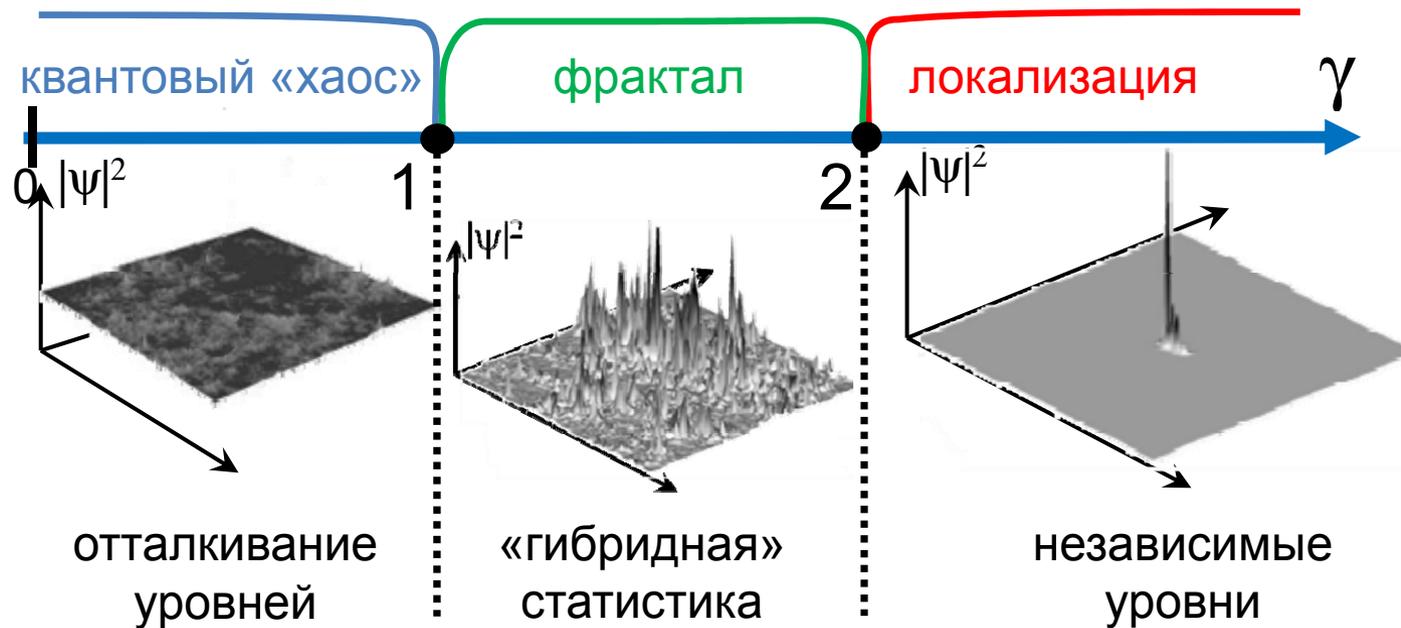
Выделенный базис
(нет инвариантности)
+ тенденция к локализации
 $q = 1$ полный «хаос»
 $q \rightarrow \infty$ локализация

Обобщённая модель Розенцвайга-Портера

Rosenzweig, Porter, PR (1960)

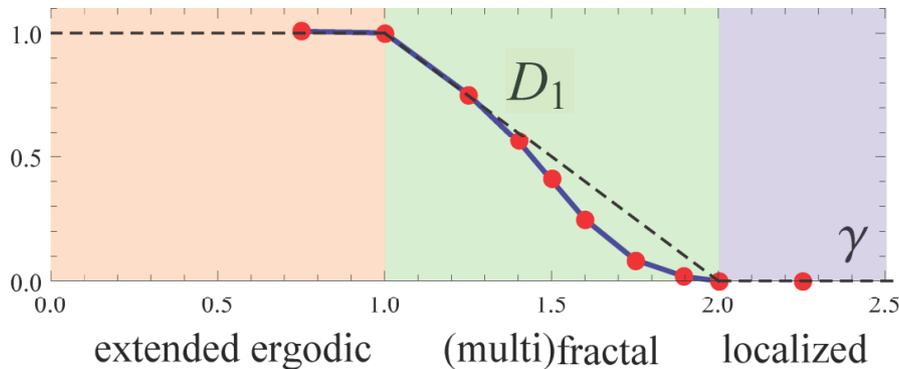
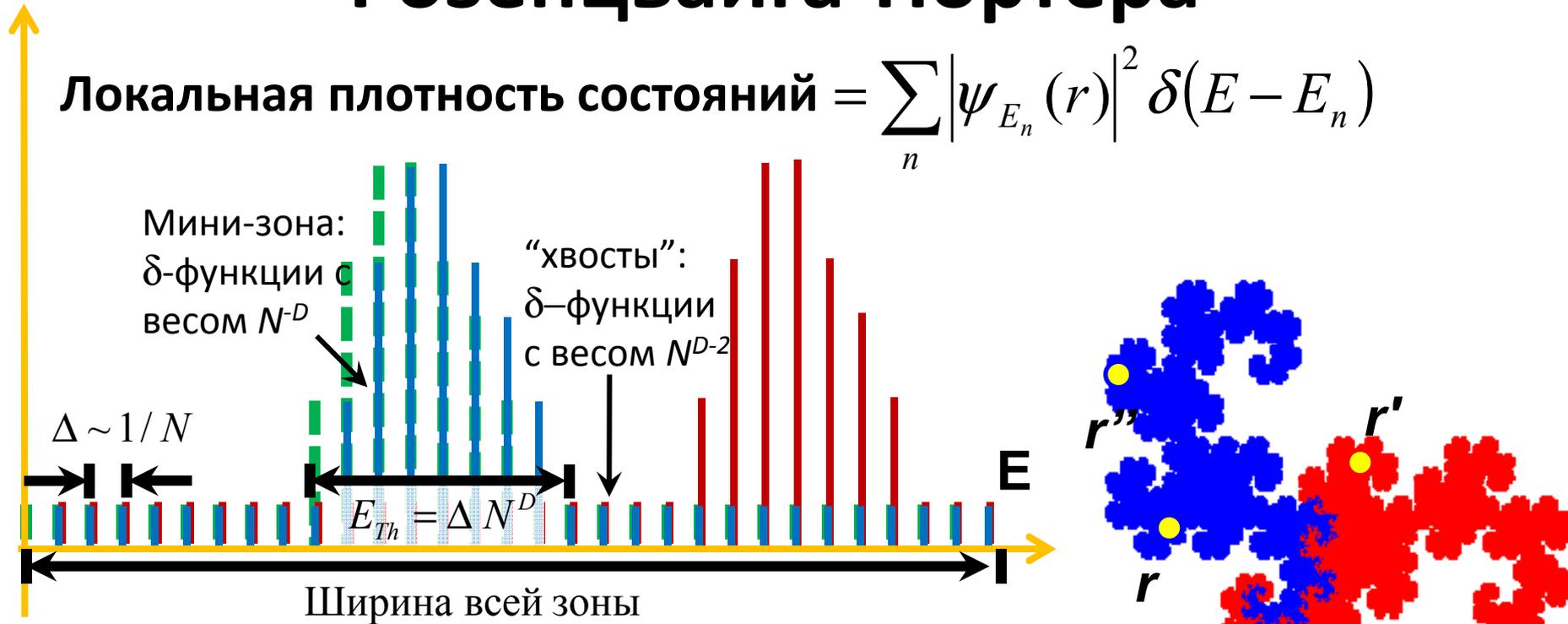
$$q \sim N^\gamma \gg 1$$

$$\langle H_{nm}^2 \rangle = \begin{pmatrix} q & 1 & \dots & 1 \\ 1 & q & 1 & \vdots \\ \vdots & 1 & q & 1 \\ 1 & \dots & 1 & q \end{pmatrix}$$



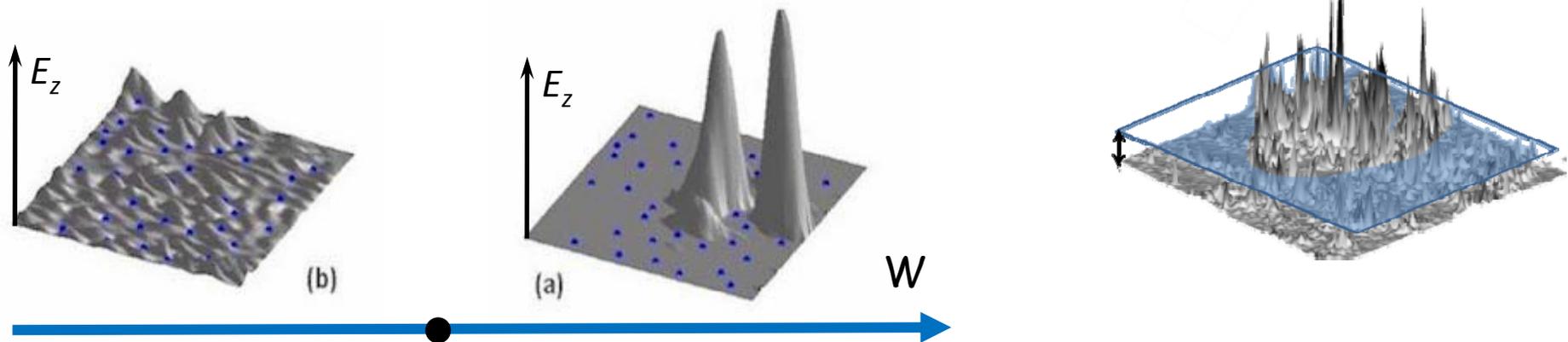
Фрактальная фаза в модели Розенцвайга-Портера

Локальная плотность состояний = $\sum_n |\psi_{E_n}(r)|^2 \delta(E - E_n)$

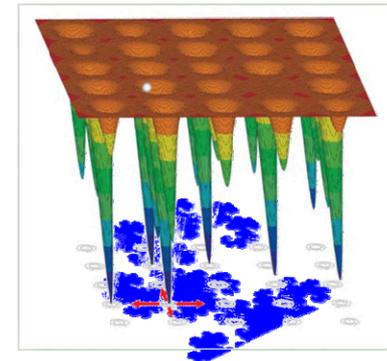
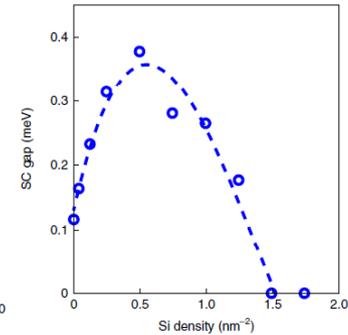
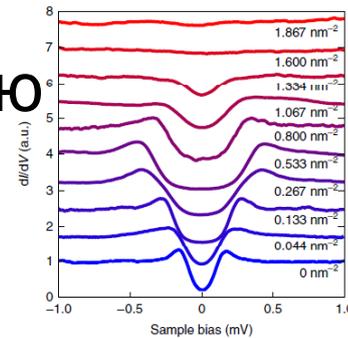


отталкивание уровней, $|E_r - E_m| < E_{Th}$
 независимые уровни, $|E_r - E_m| > E_{Th}$

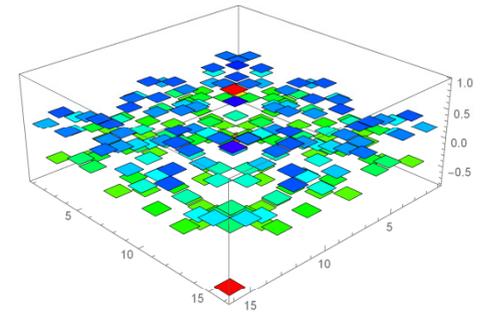
Выводы



- Локализация через интерференцию
- Фазовый переход (в 3d)
- Локализация \approx интегрируемость
- Квантовый хаос в случайных матрицах
- Критическая статистика на переходе
- Неэргодические фазы для
 - ✓ Усиления сверхпроводимости
 - ✓ Ускорения квантового «отжига»



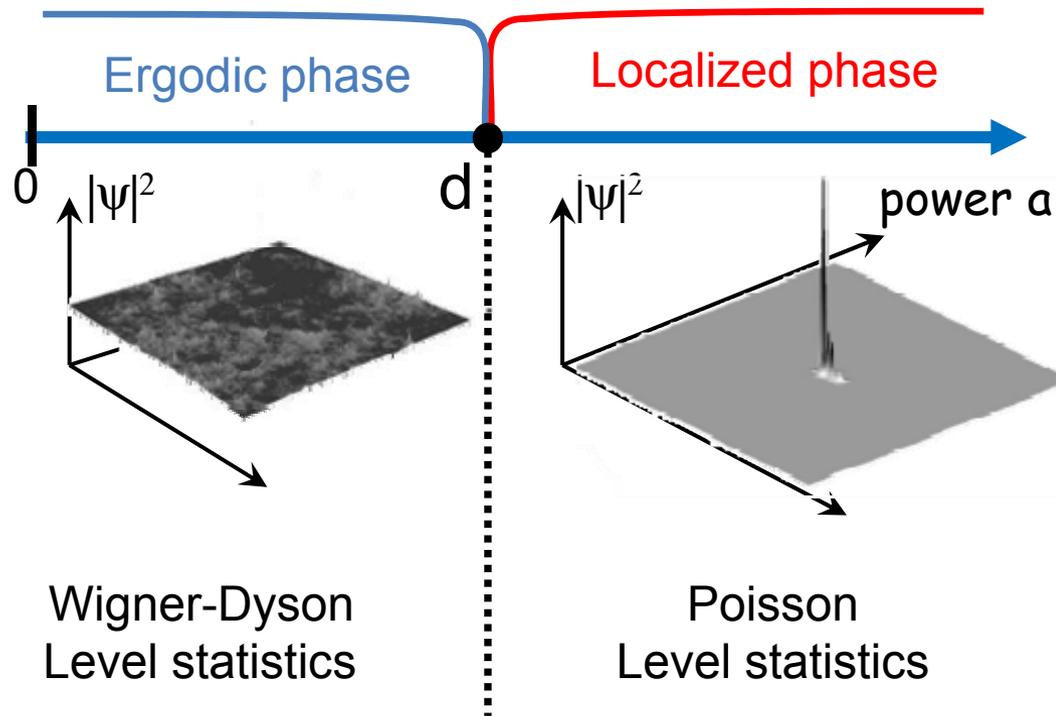
ALT in long-range models



$$H = \sum_n \varepsilon_n c_n^\dagger c_n + \boxed{\sum_{m,n} j_{n,m} c_n^\dagger c_m} + h.c.$$

Long-range hopping

d-dimensional



Wigner-Dyson
Level statistics

Poisson
Level statistics

Electromagnetic-induced (3d)
Levitov EPL, PRL (1989-90)

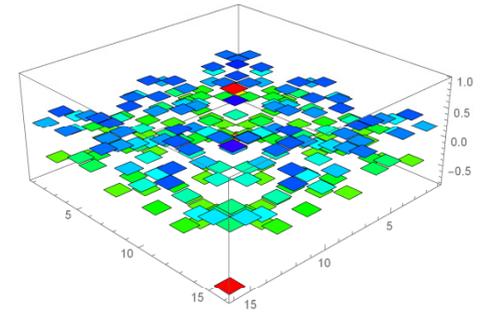
$$\boxed{j_{n,m} = \frac{\mathbf{d}_n \mathbf{d}_m - 3 \mathbf{n} \mathbf{d}_n \cdot \mathbf{n} \mathbf{d}_m}{|r_n - r_m|^3}}$$

Power-law banded matrices
Mirlin et al., PRE (1996)

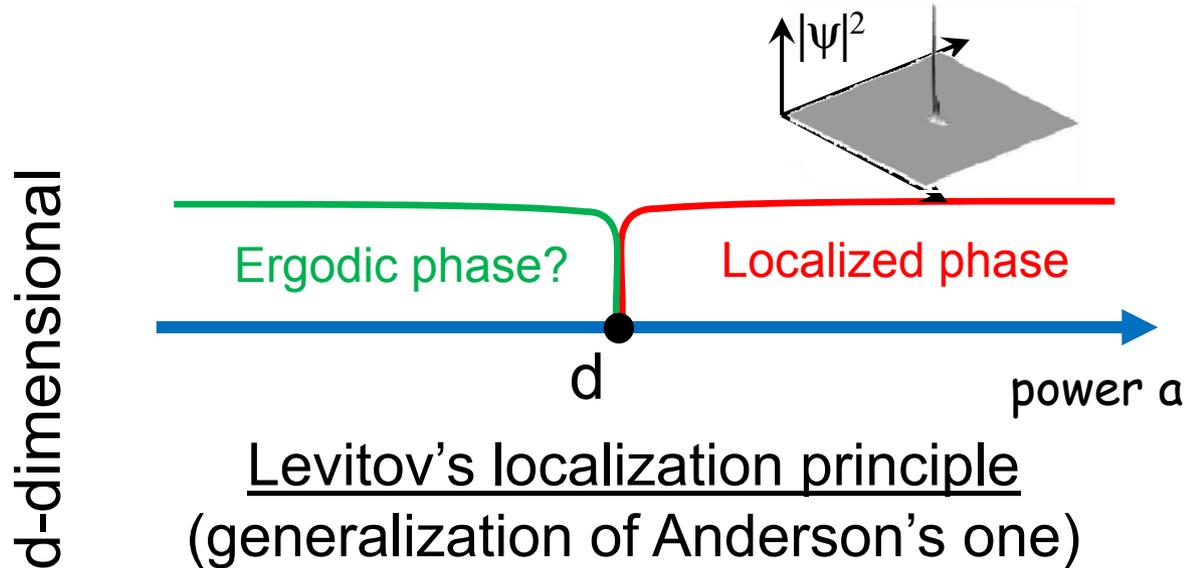
$$\boxed{j_{n,m} = J_{n,m} / |n - m|^a}$$

$$\langle J_{m,n} \rangle = 0, \quad \langle J_{m,n}^2 \rangle = j_0$$

ALT in long-range models



$$H = \sum_n \varepsilon_n c_n^\dagger c_n + \sum_{m,n} j_{n,m} c_n^\dagger c_m + h.c.$$



Levitov's localization principle
(generalization of Anderson's one)

$$\delta_R > j_R \text{ for all } 1 \leq R \leq N$$

Convergence of perturbation theory

$$\delta_R = \langle |\varepsilon_n - \varepsilon_{n+R}| \rangle \sim W R^{-d}, j_R = \sqrt{\langle j_{n,n+R}^2 \rangle} \sim R^{-a}$$

Divergence at $a < d$ means ergodicity?

Long-range hopping

Electromagnetic-induced (3d)
Levitov EPL, PRL (1989-90)

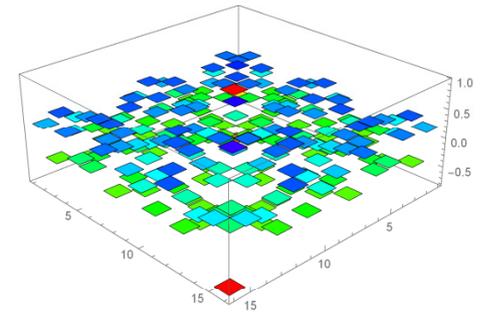
$$j_{n,m} = \frac{\mathbf{d}_n \mathbf{d}_m - 3 \mathbf{n} \mathbf{d}_n \cdot \mathbf{n} \mathbf{d}_m}{|r_n - r_m|^3}$$

Power-law banded matrices
Mirlin et al., PRE (1996)

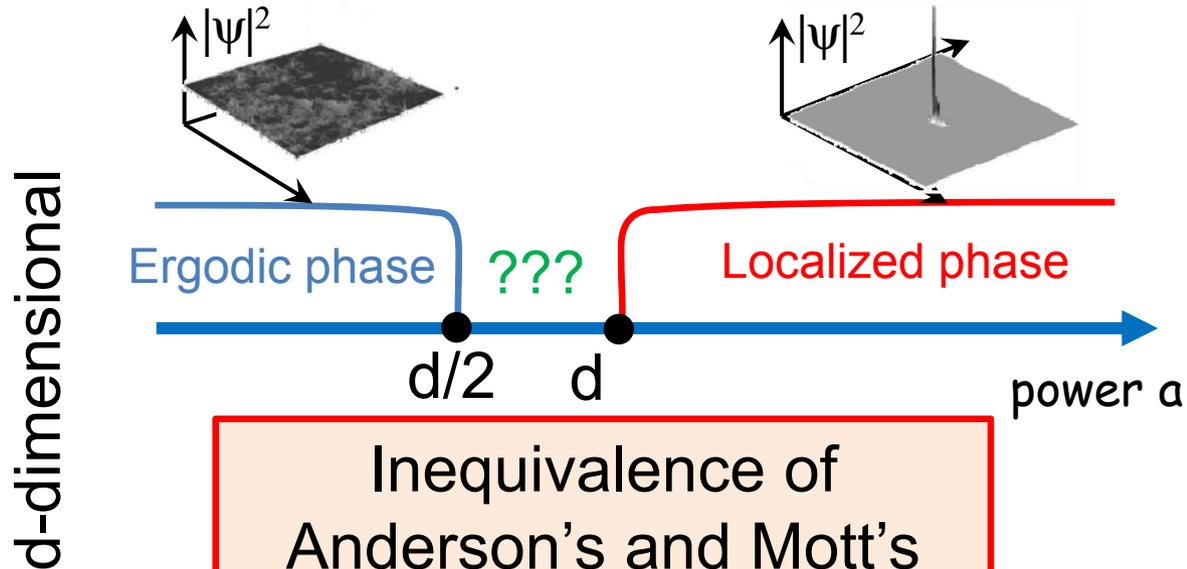
$$j_{n,m} = J_{n,m} / |n - m|^a$$

$$\langle J_{m,n} \rangle = 0, \langle J_{m,n}^2 \rangle = j_0$$

ALT in long-range models



$$H = \sum_n \varepsilon_n c_n^\dagger c_n + \sum_{m,n} j_{n,m} c_n^\dagger c_m + h.c.$$



Inequivalence of Anderson's and Mott's principles leaves the gap for non-ergodic states.

Comparison of hopping

$$\langle \varepsilon_n^2 \rangle = W^2, \quad \Delta_j^2 = \left\langle \sum_m j_{n,m}^2 \right\rangle \sim N^0 + N^{d-2\alpha}$$

Large hopping band, $\alpha < d/2$, means ergodicity
What happens at small hopping band?

E. Bogomolny and M. Sieber, PRE **98**, 042116 (2018).

Long-range hopping

Electromagnetic-induced (3d)
Levitov *EPL, PRL* (1989-90)

$$j_{n,m} = \frac{\mathbf{d}_n \mathbf{d}_m - 3 \mathbf{n} \mathbf{d}_n \cdot \mathbf{n} \mathbf{d}_m}{|r_n - r_m|^3}$$

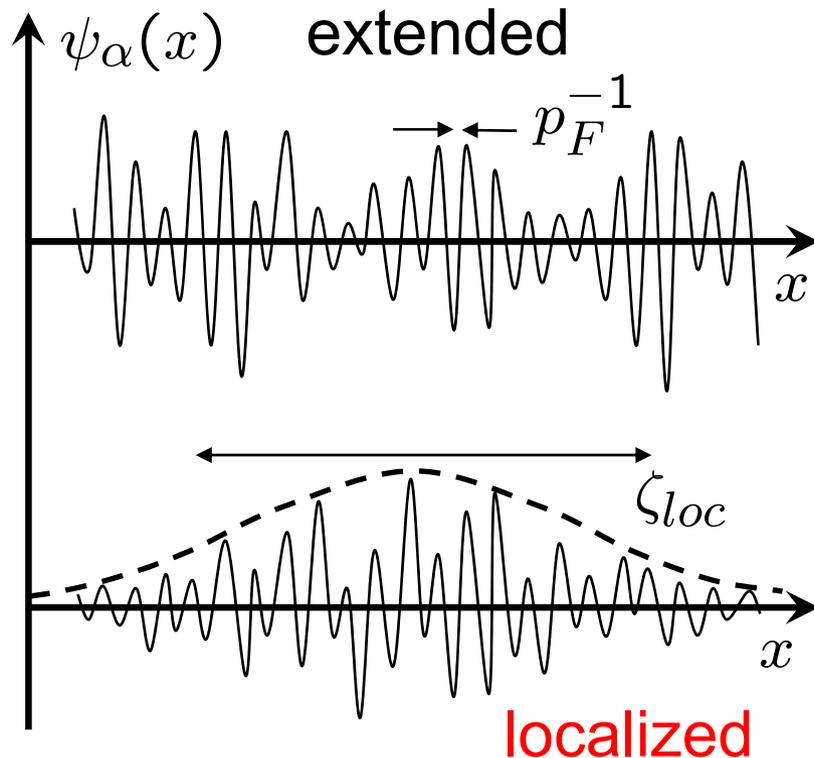
Power-law banded matrices
Mirlin *et al., PRE* (1996)

$$j_{n,m} = J_{n,m} / |n - m|^\alpha$$

$$\langle J_{m,n} \rangle = 0, \quad \langle J_{m,n}^2 \rangle = j_0$$

Anderson localization (1957)

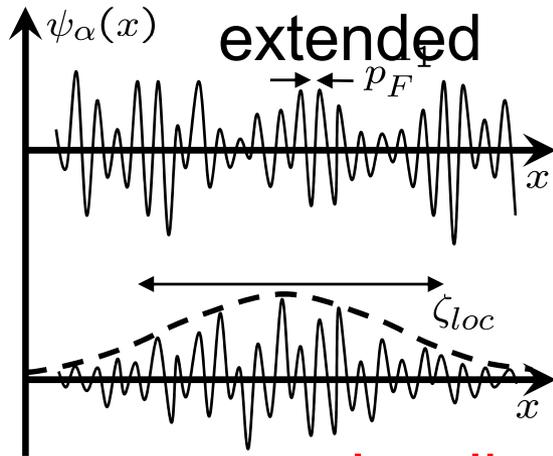
$$\left[-\frac{\nabla^2}{2m} + U(\mathbf{r}) \right] \psi_\alpha(\mathbf{r}) = \xi_\alpha \psi_\alpha(\mathbf{r})$$



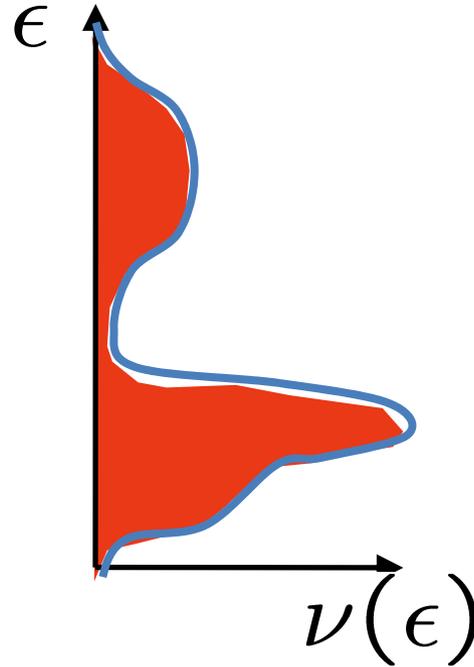
Only phase transition possible!!!

Anderson localization (1957)

$$\left[-\frac{\nabla^2}{2m} + U(\mathbf{r}) \right] \psi_\alpha(\mathbf{r}) = \xi_\alpha \psi_\alpha(\mathbf{r})$$



localized

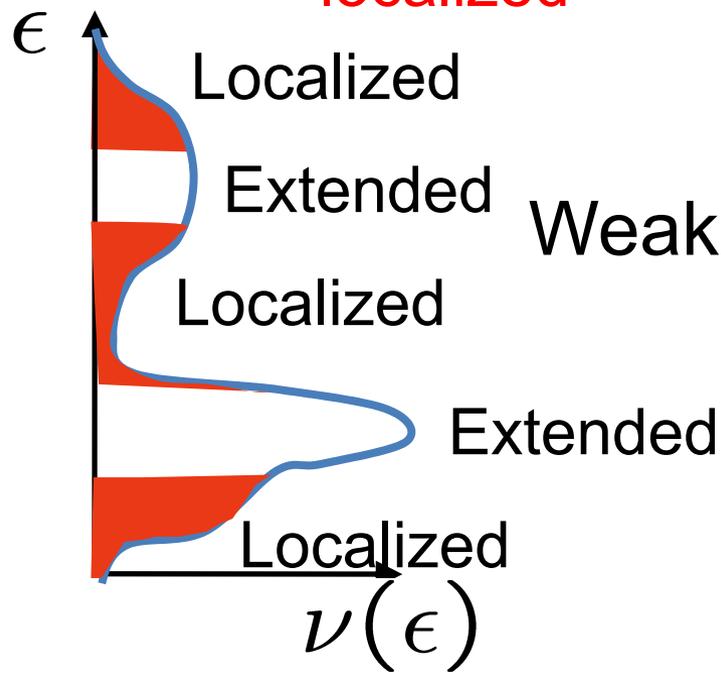


Strong disorder

$d=3$

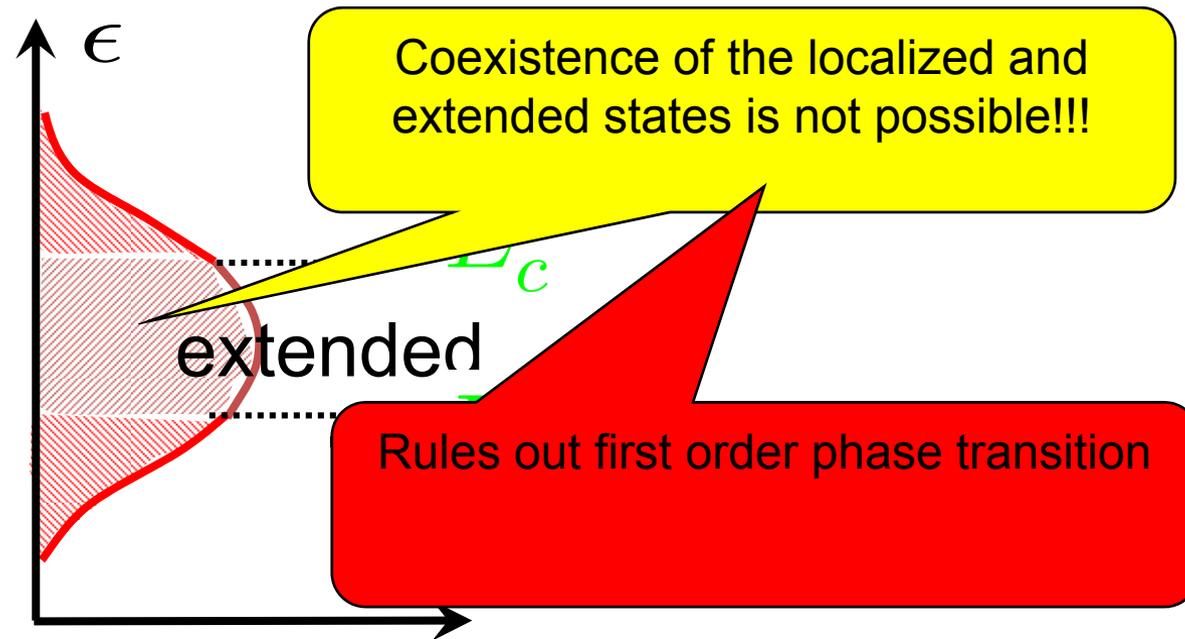
Any disorder, $d=1$

Anderson insulator



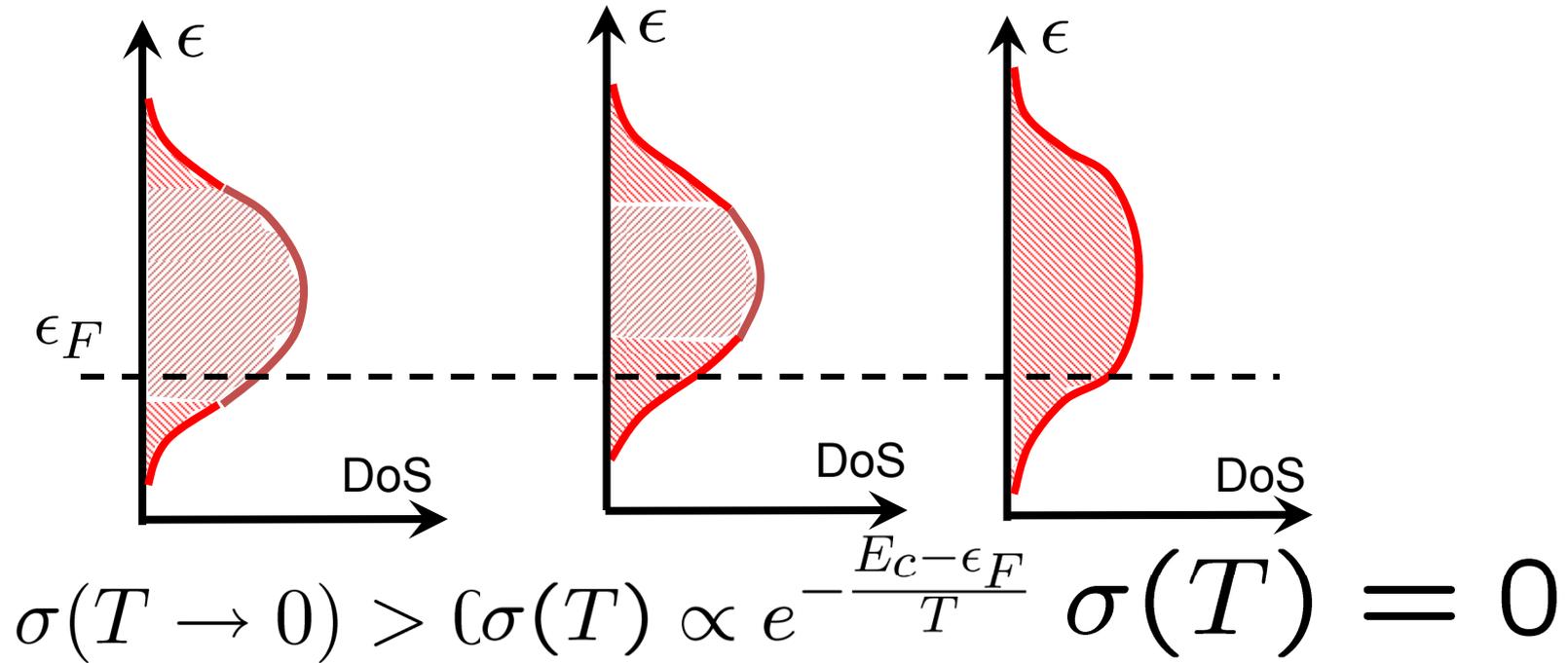
Weaker disorder $d=3$

Anderson Transition



E_c - mobility edges (one particle)

Temperature dependence of the conductivity

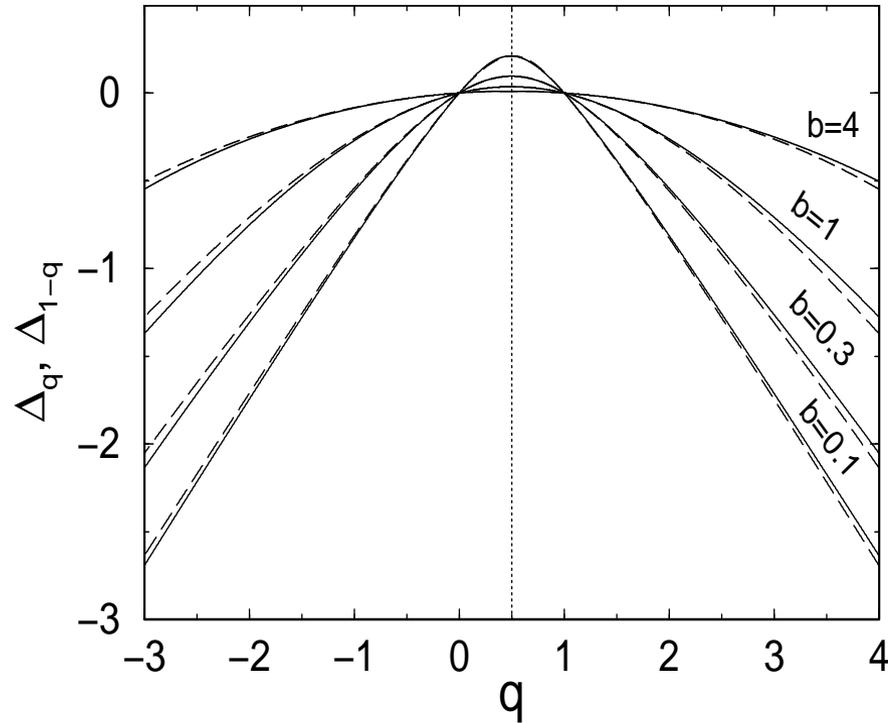


Metal

Insulator

“Perfect” one particle
Insulator

Wavefunction moments



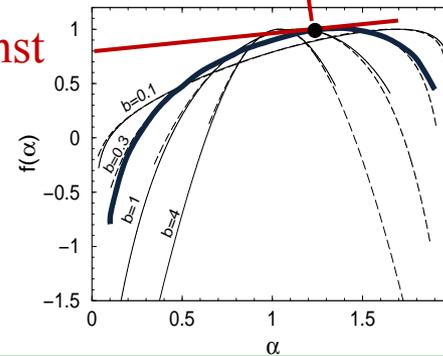
$$q=0: \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1 = 1; \quad q=1: \sum_{i=1}^N |\psi_i|^2 = 1$$

$$|\psi|^2 = N^{-\alpha}$$

$$q-1 + \Delta_q = \min_{\alpha} [q\alpha - f(\alpha)]$$

$$\left\langle \sum_i |\psi_i|^{2q} \right\rangle \sim \int N^{f(\alpha)} N^{-q\alpha} d\alpha \sim N^{-q-1+\Delta_q}$$

$q \cdot \alpha + \text{const}$



Exact symmetry

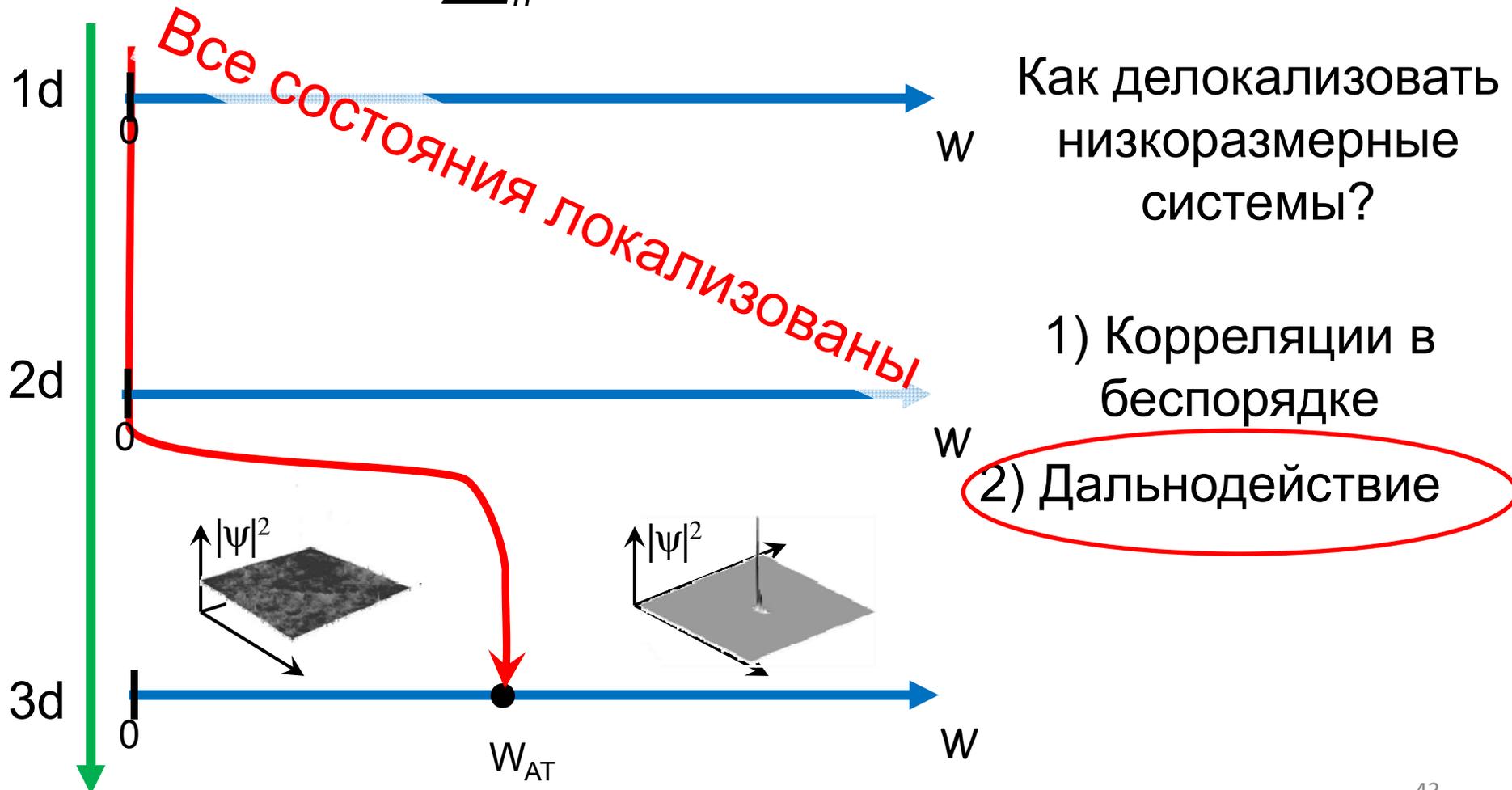
$$f(\alpha) = f(2-\alpha) + \alpha - 1$$

$$\Delta_q = \Delta_{1-q}$$

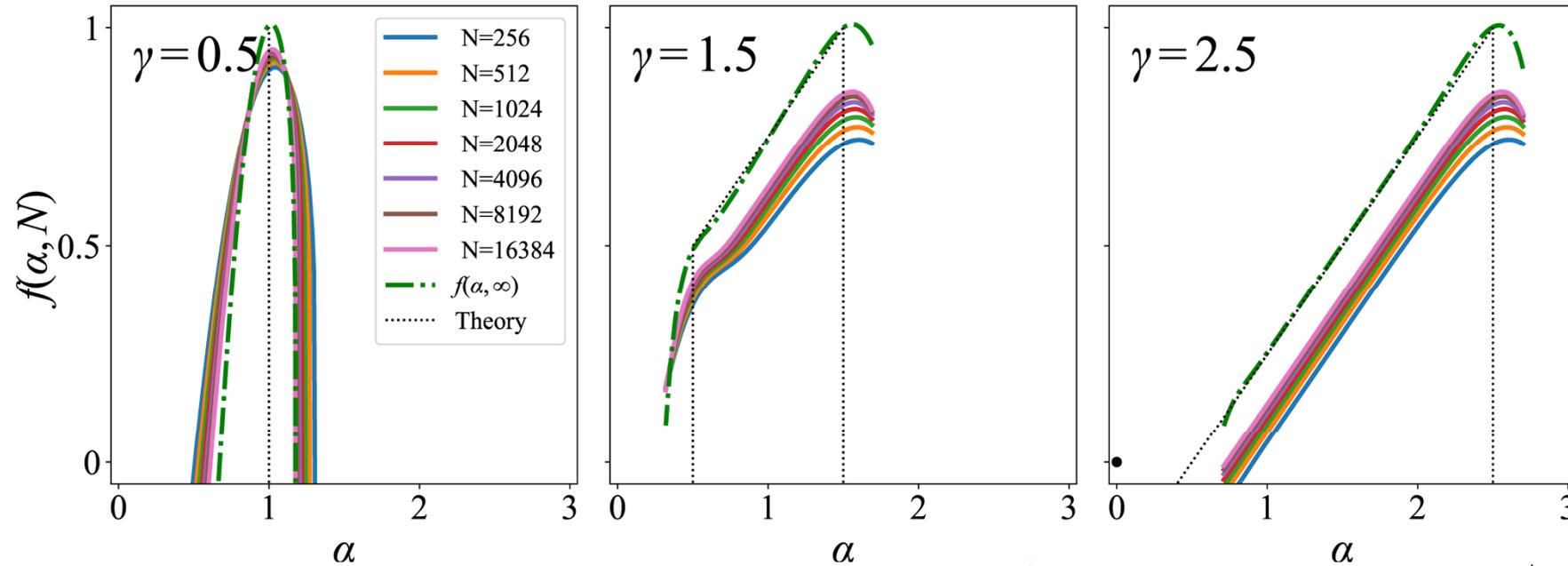
Mirlin et al PRL **97**, 046803 (2006)

Локализация Андерсона: краткодействующие системы

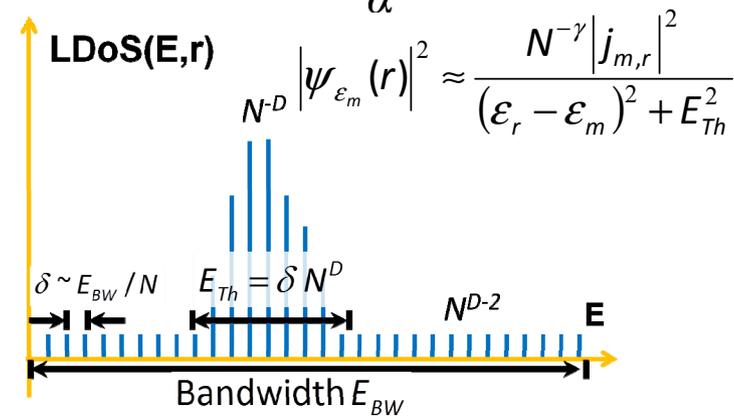
$$H = \sum_n \varepsilon_n c_n^\dagger c_n + j_1 c_n^\dagger c_{n+1} + h.c.$$



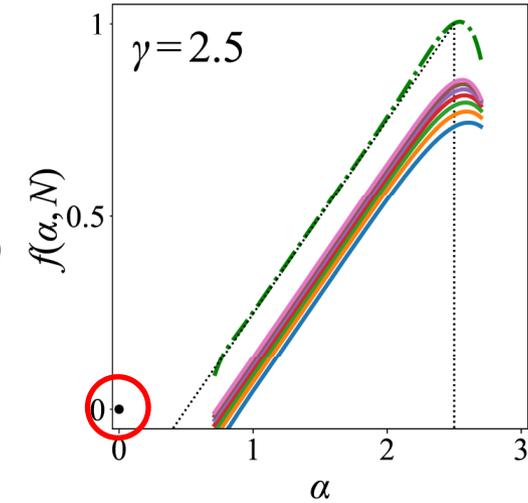
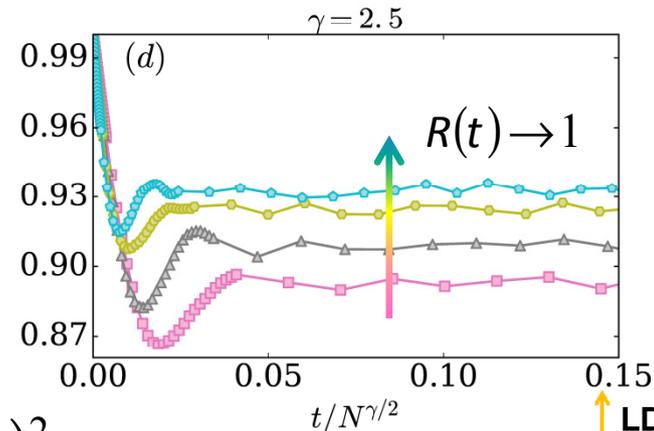
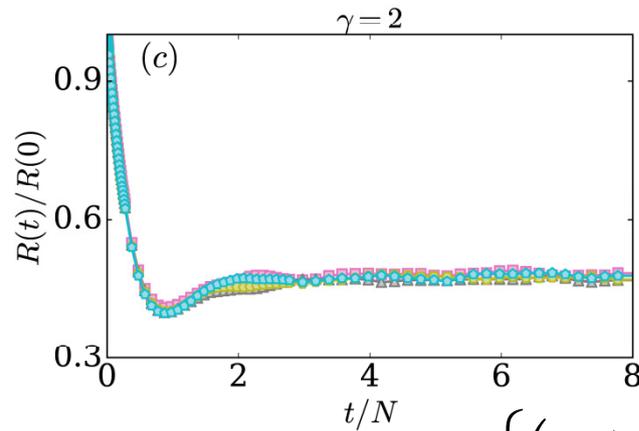
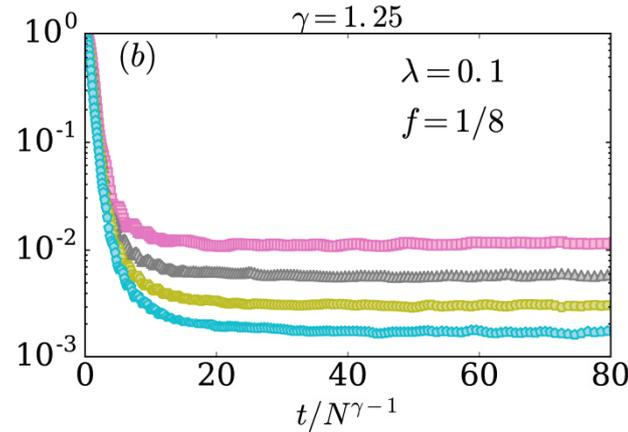
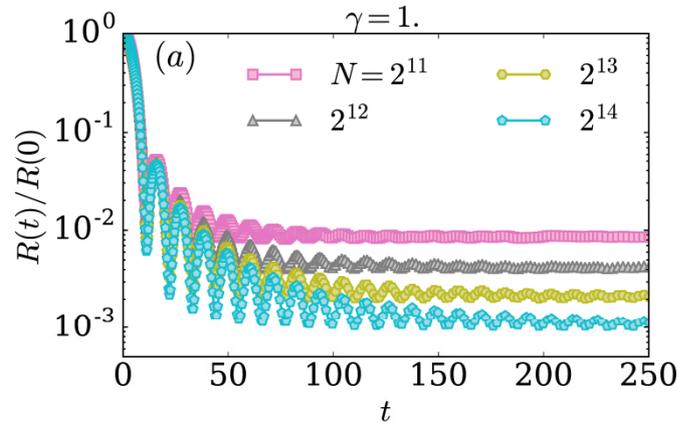
Rosenzweig-Porter: spectrum of fractal dimensions



$$f(\alpha) = \begin{cases} 1 + \frac{\alpha - \gamma}{2}, & 2 - \gamma < \alpha < \gamma \\ 0, & \alpha = 0, \gamma > 2 \\ 1, & \alpha = 1, \gamma \leq 1 \end{cases}$$



Rosenzweig-Porter: return probability



$$|\psi_{\varepsilon_m}(r)|^2 \approx \frac{N^{-\gamma} |j_{m,r}|^2}{(\varepsilon_r - \varepsilon_m)^2 + E_{Th}^2}$$

$$R(t) = N^{-D} + \begin{cases} \left(\frac{\sin \Delta E t}{\Delta E t}\right)^2, & \gamma < 1 \\ e^{-E_{Th} t}, & 1 \leq \gamma \leq 2 \\ 1, & \gamma > 2 \end{cases}$$

