

Акустическая турбулентность.
Локальная и статистическая
автомодельность.

С.Н. Гурбатов

Нижний Новгород,
XIX НАУЧНАЯ ШКОЛА"
"Нелинейные волны-2020"

Март 2020

Нелинейные волны в недиспергирующих средах.

Условия синхронизма

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \quad k_1 + k_2 = k_3$$

Акустика - дисперсионное уравнение

$$k(\omega) = c/k, \quad c = \text{const}$$

Уравнение Римана ($\omega = ck$)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Уравнение Бюргерса ($\omega = ck - i\mu k^2$)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Многомерное уравнение Бюргерса -
потенциальные течения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mu \Delta \mathbf{v},$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\nabla \psi(\mathbf{x}, t).$$

Гидродинамическая турбулентность.

Уравнение Навье-Стокса.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v},$$

Вырождение турбулентности

Известны статистические характеристики поля в начальный момент $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t = 0)$. Требуется найти статистические характеристики турбулентности в произвольный момент времени.

Проблема замыкания моментов для средних
< ... >

$$\frac{\partial \langle \mathbf{v} \rangle}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \langle \mathbf{v}^2 \rangle = \dots,$$

$$\frac{\partial \langle \mathbf{v}^2 \rangle}{\partial t} + \frac{2}{3} \nabla \langle \mathbf{v}^3 \rangle = \dots,$$

Вырождение турбулентности Навье-Стокса

Уравнения Кармана-Ховарта, связывает корреляционную функцию B_2 и третью моментную функцию S_3 . В уравнение для S_3 входит четвертая моментная функция, и т.д.

Гипотеза об автомодельности - Карман-Ховарт (1938). Начальный спектр $E_0(k) = \alpha_n^2 |k|^n$

Интегральный масштаб турбулентности $L(t)$ и среднеквадратичная скорость $u(t)$ имеют степенной характер поведения. При этом из уравнения Кармана-Ховарта, следует что два показателя степени связаны между собой.

Колмогоров (1941) предположил использовать использовать так называемый

"инвариант" Лойцанского (α_4^2)(1939)

как дополнительное условие, и соответственно вывел закон затухания для вырождающейся трехмерной турбулентности $u^2(t) \sim t^{-10/7}$.

Однако позже Прудман и Рейд (1954), Бэтчелор и Прудман (1956) показали, что интеграл, рассмотренный Лойцанским, на самом деле не является инвариантом. Для трехмерной гидродинамической турбулентности нелинейное взаимодействие пространственных гармоник приводит к генерации крупномасштабных компонент и их вклад пропорционален k^4 при малых волновых числах k . Соответственно это и приводит к зависимости "инварианта" Лойцанского от времени ($\alpha_4^2 = \alpha_4^2(t)$).

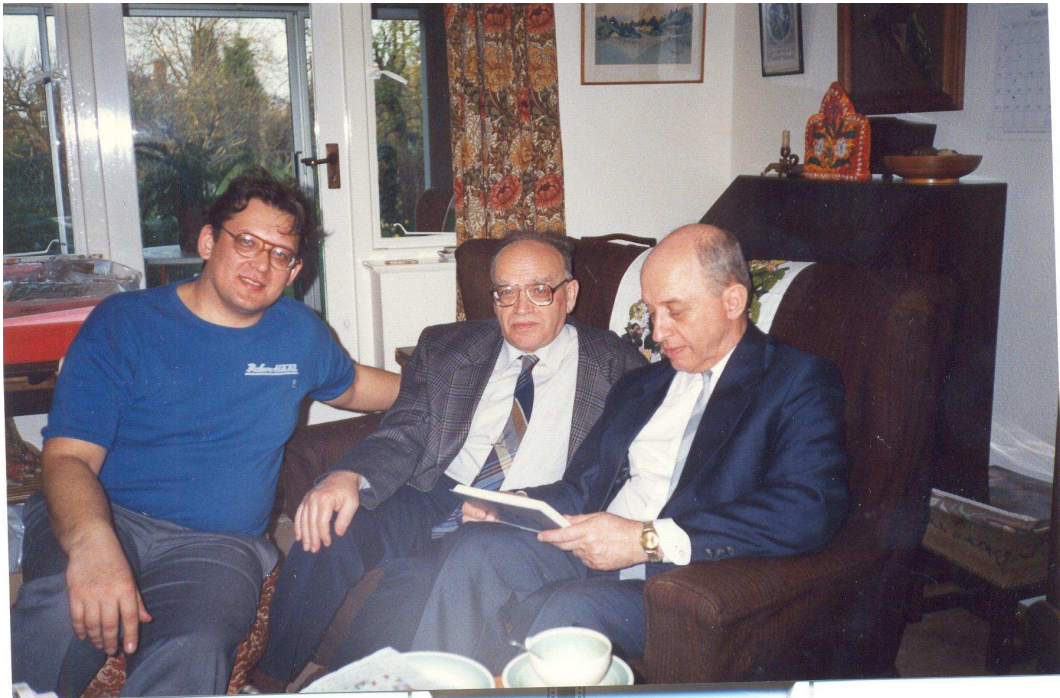
Однако, если начальный спектр $E(k) \sim |k|^n$ и показатель степени $n < 4$, то коэффициент перед $|k|^n$ будет инвариантом. Это называется в теории турбулентности принципом "permanence of large eddies" (PLE). Аргументы Колмогорова легко адаптируются для данного случая, что приводит к следующему закону затухания трехмерной турбулентности $u^2(t) \sim t^{2(n+1)/(n+3)}$.

Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика: теория и приложения к геофизической гидродинамике. Л.: Гидрометеоздат, 1982. 256 с.

А. С. Монин, А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, М.: Наука. Физматгиз, ч. 1, 2, 1965, 1967;

Григорий Исаакович Баренблатт (1927 - 2018) - советский и российский ученый в области механики, д.ф-м.н, профессор, главный научный сотрудник Института океанологии РАН, профессор Калифорнийского университета в Беркли (1997 - 2012).

Акива Моисеевич Яглом (1921-2007) - советский и американский физик, математик; д.ф-м.н, профессор. Брат-близнец математика Исаака Яглома



Кембридж, 1990

Burgers, Johannes Martinus (1985-1981)



Нелинейное уравнение диффузии (1939)

Burgers, J.M. "Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion", Kon. Ned. Akad. Wet. Verh. 1939. vol. 17, 1–53 (1939)

Модельное уравнение теории турбулентности, учитывающее влияние конкуренции инерционной нелинейности и вязкости на формирование свойств сильной гидродинамической турбулентности.

Уравнение Бюргерса, (1939)

Harry Bateman (1882-1946), Some recent researches on the motion of fluids, Monthly Weather Review, **1915**, no 43, 163-170

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad v(x, t = 0) = v_0(x)$$

Точное решение УБ-решение Хопфа-Коула

E.Hopf, The partial differential equation $u + uu_x = \mu u_{xx}$, Comm. Pure Appl. Math., 3, 201-230 (**1950**);

J.D.Cole, On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics, Quart. Appl. Math., 9, 225-236 (**1951**)

Флорин В.А, Некоторые простейшие нелинейные задачи консолидации водонасыщенной земляной среды. Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук (**1948**), N 9, 1389-1402.

Арнольд В.А. - Это следует из так называемого преобразования Коула-Хопфа, приводящего уравнение Бюргерса к уравнению теплопроводности и описанного в учебнике Форсайта за много лет до того, как оно было переоткрыто Флорином

Forsyth A.R. Theory of differential equation. Pt. IV: Partial differential equation. Vol. 6, Chapt. XII (207). Cambridge: University Press, **1906**, 100-102

Вырождение турбулентности - **Burgulence**

U. Frisch, Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1995)

U. Frisch and J. Bec, Burgulence, New Trends in Turbulence, Springer EDP-Sciences (2001), p. 341.

Несмотря на то, что уравнение Бюргерса имеет точное решение Хопфа Коула (1949,1950), анализ детерминированных и особенно случайных полей представляет собой весьма сложную математическую задачу. Так первые серьезные результаты для Броуновского начального потенциала были получены лишь 30 лет спустя [Burgers 1974] после появления самого уравнения [Burgers 1939], ну а первые математические строгие для этого случая лишь в 2000.

Burgers J.M. The Nonlinear Diffusion Equation. Dordrecht, D. Reidel, **1974**.

Frachebourg, L., Martin, P.A. Exact statistical properties of the Burgers equation. J. Fluid Mech. 417, 323 - 349, **2000**

Woyczynski, W.A.: Burgers - KPZ Turbulence. Gottingen Lectures. Springer, Berlin (1998)

Gurbatov S.N., Rudenko O.V., Saichev A.I. Waves and Structures in Nonlinear Nondispersive Media. General Theory and Applications to Nonlinear Acoustics. Springer-Verlag and HEP, Germany and China, (2012)

WoS - Burgers equation, февраль 2020

Результаты: **2 579** из Web of Science Core Collection) Вы искали: НАЗВАНИЕ: (Burgers equation) Период: **1970 - 2020**.

Результаты: **2 030** (из Web of Science Core Collection) Вы искали: НАЗВАНИЕ: (Burgers equation) Период: **2000 - 2020**.

Результаты: **1 290** (из Web of Science Core Collection) Вы искали: НАЗВАНИЕ: (Burgers equation) Период: **2010 - 2020**.

google scolar (Burgers equation) Период: **2000 - 2020**. Ссылок 50100

Нелинейные волны в недиспергирующих средах.

1. Модель гидродинамической турбулентности (Бюргерс, 1939).
2. Нелинейная акустика.
3. Рост поверхности и распространение фронта пламени.
4. Кинематические волны и геометрическая оптика.
5. Крупномасштабная структура Вселенной.

**Статистические задачи -
непрерывный спектр**

$$E_0(\omega) \rightarrow E_0(\omega, t)$$

Уравнения нелинейной акустики

$$\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial P}{\partial t} - \beta P \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{n}{2r} P = \nu \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

Локальное время θ и замена переменных
(сферическая волна $n = 2$)

$$\theta = t - \frac{r}{c}, \quad p = \frac{r}{r_0} \beta P, \quad z = r_0 \ln \left(\frac{r}{r_0} \right).$$

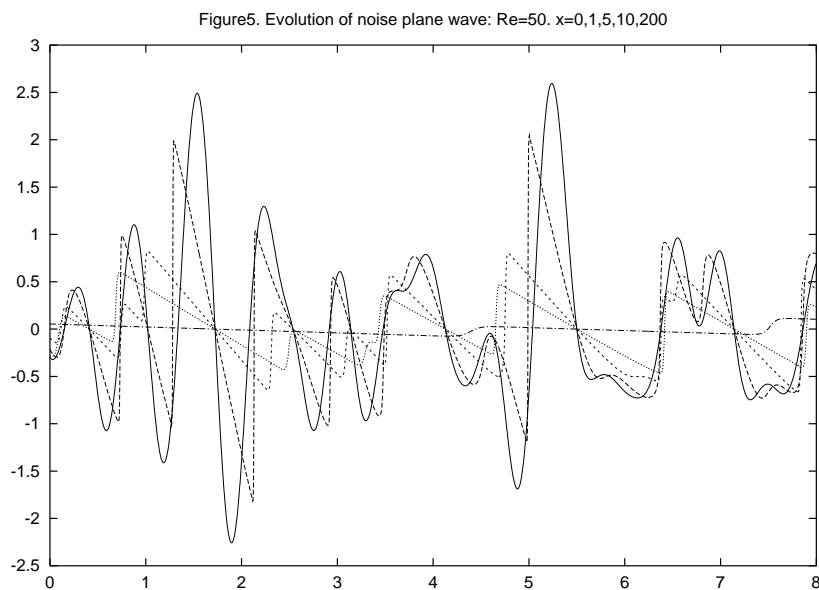
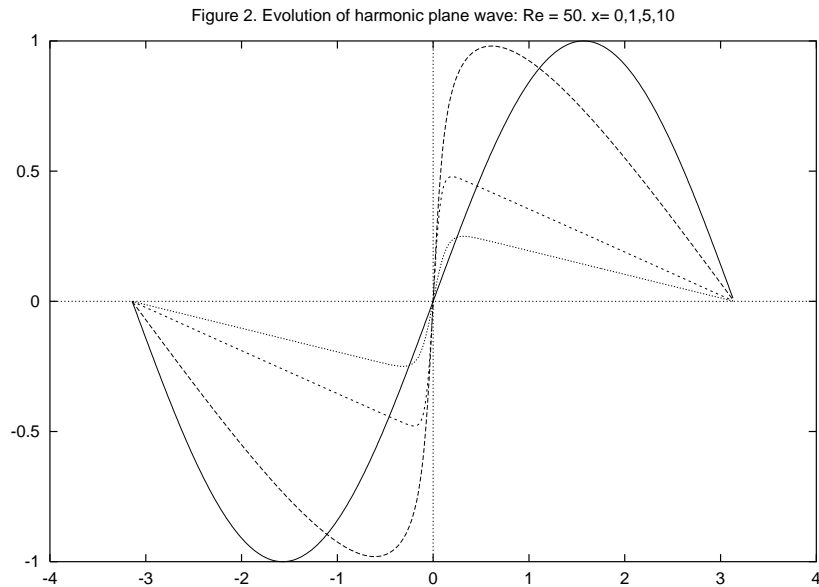
Уравнение Бюргерса с переменной
вязкостью:

$$\frac{\partial p}{\partial z} - p \frac{\partial p}{\partial \theta} = \nu \exp\left(\frac{z}{r_0}\right) \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2}.$$

Каноническое уравнение Римана при
больших числах Рейнольдса ($\nu \rightarrow 0$).

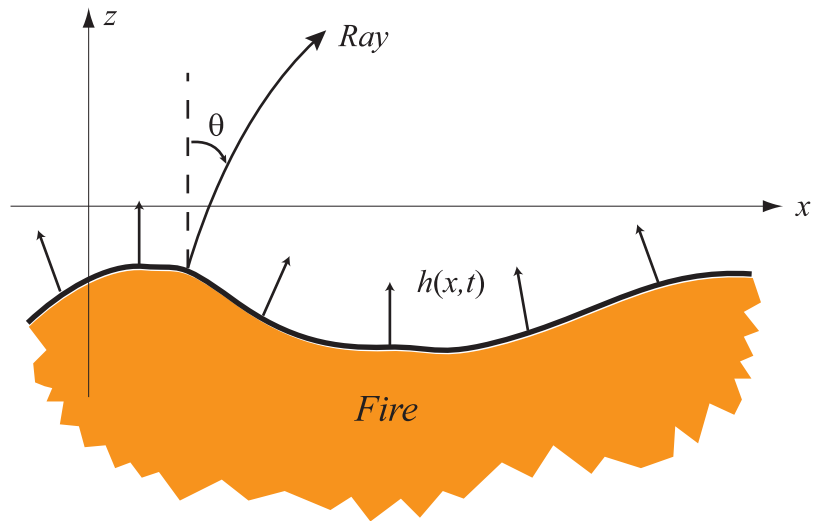
Приложение - акустические шумы

Эволюция гармонического возмущения и широкополосного шума,



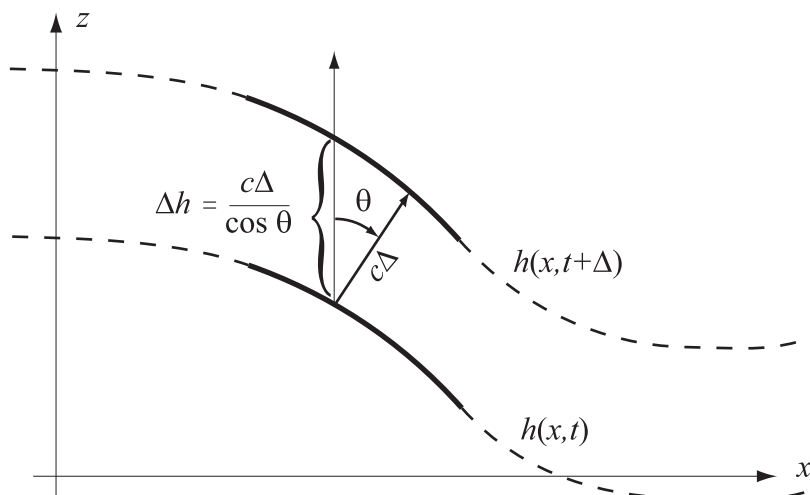
Слияние разрывов и перекачка энергии в
низкочастотную часть спектра

Уравнение роста роста поверхности



Эволюция линия пожара - фазового фронта

$$\Delta h \approx c\Delta / \cos \theta \approx c\Delta \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}.$$



Уравнение роста поверхности

$$\frac{\partial h}{\partial t} = c\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2} \approx c + \frac{c}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2$$

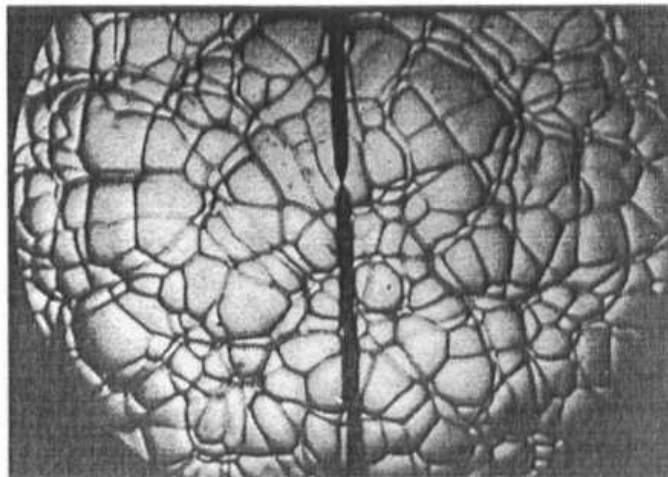
Уравнение KPZ. Kardar-Parisi-Zhang

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{c}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \mu \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}.$$

Уравнение для наклона растущей поверхности

$$u(x, t) = -\frac{\partial h(x, t)}{\partial x},$$

совпадает с уравнением Бюргерса $v = -cu$.



Экспериментальная фотография распространения сферического фронта пламени. Хорошо видна ячеистая структура фронта.

Геометрическая оптика

Уравнение эйконала (уравнение для фазы)

$$\left(\frac{\partial\varphi(z,x)}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi(z,x)}{\partial x}\right)^2 = 1$$

малоугловое приближение $\left|\left(\frac{\partial\varphi(z,x)}{\partial x}\right)\right| \ll 1$

$$\frac{\partial\varphi(z,x)}{\partial z} = \sqrt{1 - \left(\frac{\partial\varphi(z,x)}{\partial x}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\varphi(z,x)}{\partial x}\right)^2$$

Малоугловое приближение для фазы

$$\frac{\partial\varphi(z,x)}{\partial z} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\varphi(z,x)}{\partial x}\right)^2$$

Угол наклона траектории (градиент)

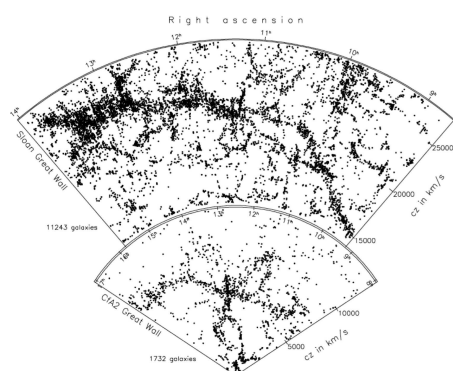
$$v(x,z) = \frac{\partial\varphi(z,x)}{\partial x}$$

Уравнение для наклона

$$\frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Крупномасштабная структура Вселенной

Крупномасштабная структура Вселенной (масштабы десятки–сотни Мегапарсек). Элементами этой структуры служат объекты с повышенной концентрацией галактик — скопления галактик, филаменты (волокнуобразные скопления галактик, соединяющие скопления галактик) и «стенки». 1 парсек - $3 \cdot 10^{16}$ м
3.26 световых года



Sloan Digital Sky Survey Great Wall.
Each point represents a galaxy.

Существующие на данный момент крупномасштабные образования возникли из малых начальных возмущений плотности за счет гравитационной неустойчивости. Сразу после отделения барионного вещества от излучения Вселенная была заполнена смесью нейтрального водорода (с небольшой примесью гелия) и темного вещества, которые **взаимодействуют между собой исключительно гравитационно.**

Крупномасштабная структура Вселенной

Обычная материя (атомов различных веществ) (4%),

Темная материя неизвестной физической природы (cold dark matter) (23%)

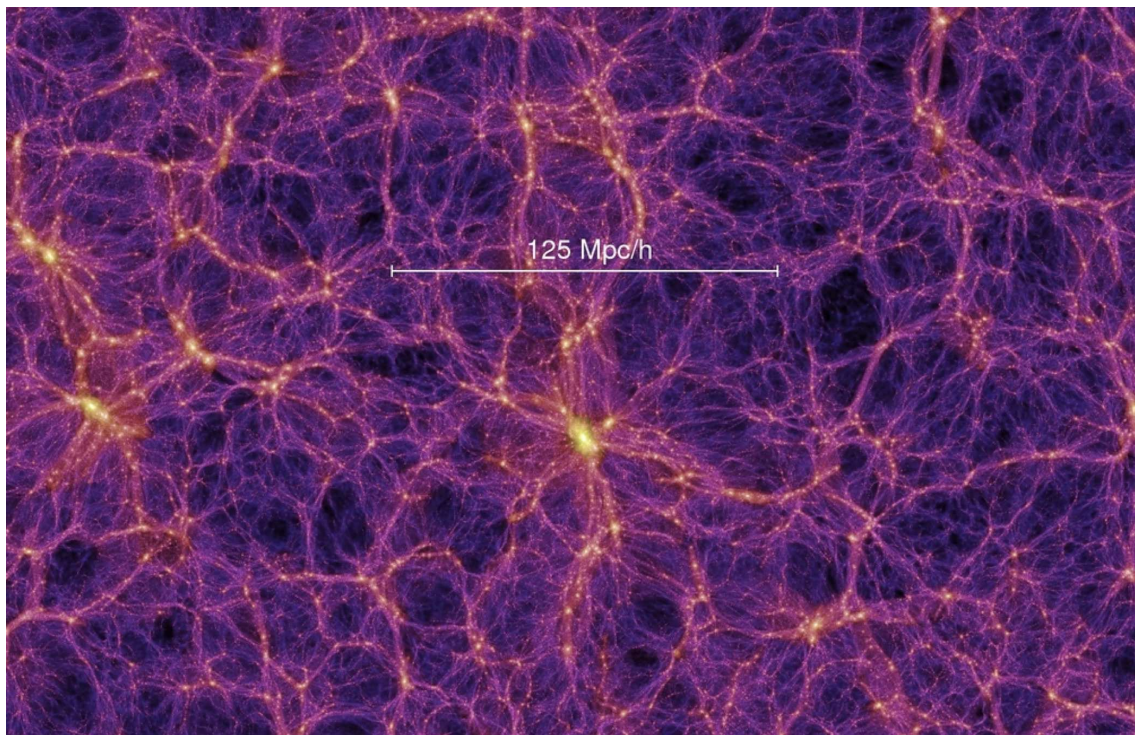
Темная энергия (dark energy) (73%), которая играет антигравитационную роль в процессе формирования Вселенной.

Существующие на данный момент крупномасштабные образования возникли из малых начальных возмущений плотности за счет гравитационной неустойчивости. Сразу после отделения барионного вещества от излучения Вселенная была заполнена смесью нейтрального водорода (с небольшой примесью гелия) и темного вещества, которые **взаимодействуют между собой исключительно гравитационно**.

Плотность темного вещества в 6–7 раз превосходит плотность барионов, и поэтому **рост неоднородностей определяется в основном темным веществом**. Именно рост неоднородностей в темном веществе и ответственен за формирование крупномасштабных структур. Барионная компонента просто следовала за эволюцией темного вещества под действием гравитации.

Крупномасштабная структура Вселенной

Плотность темного вещества в 6–7 раз превосходит плотность барионов, и поэтому **рост неоднородностей определяется в основном темным веществом**. Именно рост неоднородностей в темном веществе и ответственен за формирование крупномасштабных структур. Барионная компонента просто следовала за эволюцией темного вещества под действием гравитации.



The dark matter density field in a slab of thickness 15 MP obtained in the Millennium simulation of the structure formation in the universe.

От уравнения Власова–Пуассона к приближению Зельдовича и модели слипания (adhesion model).

Гурбатов С.Н., Саичев А. И., Шандарин С. Ф., "Крупномасштабная структура Вселенной. Приближение Зельдовича и модель слипания". УФН, 182, 233–261, (2012)

Односкоростные решения (u_p - peculiar speed) уравнений Власова–Пуассона в сопутствующей системе координат

$$\mathbf{r} = a(t)\mathbf{x},$$

где масштабный фактор $a(t)$ есть функция мирового времени и описывает расширение Вселенной и $H(t) = d \ln a / dt$ параметр Хаббла. Для Вселенной Эйнштейна–де Ситтера:

$$a = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3}$$

и $t_0^{-2} = 6\pi G\rho(t_0)$, где $\rho(t_0)$ — средняя плотность вещества в момент времени t_0 , а G — гравитационная константа.

Основные уравнения в сопутствующей системе координат

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}_p) = -3H\rho,$$

Уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{u}_p}{\partial t} + \frac{1}{a} (\mathbf{u}_p \cdot \nabla) \mathbf{u}_p = -\frac{1}{a} \nabla \phi - H \mathbf{u}_p,$$

Уравнение Пуассона

$$\frac{1}{a^2} \nabla^2 \phi = 4\pi G(\rho - \bar{\rho}),$$

Здесь ρ и $\bar{\rho}$ плотность и средняя плотность материи; ϕ - гравитационный потенциал.

Новые переменные и $D(t)$ вместо времени t .

В линейном приближении $\langle \delta\rho^2 \rangle^{1/2} \ll 1$ для нарастающей моды траектории частиц

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}, D) = \mathbf{q} + D \cdot \mathbf{v}_0(\mathbf{q})$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial D} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0.$$

Поле $\phi_0(\mathbf{q})$ определяются начальными флуктуациями плотности, которые принято считать Гауссовым случайным полем.

Приближение Зельдовича, ($\langle \delta\rho^2 \rangle^{1/2} \gg 1$)

Поле скорости потенциально $\mathbf{v} = -\nabla\Phi$.

Гравитационный потенциал $\varphi \approx \Phi$

В одномерном случае - точное решение для растущей моды.

Пятьдесят лет назад Яков Борисович Зельдович опубликовал две близкие по содержанию статьи, посвященные проблеме образования структуры Вселенной: одну на русском языке в журнале *Астрофизика* (6,319, 1970), а другую на английском в европейском журнале *Astronomy and Astrophysics* (5,84, 1970) .

Судьба обеих сложилась нелегко: на русский вариант вместе с его английским переводом было всего 33 ссылки за первые 20 лет после опубликования, а на английский около 200. В последующие 20 лет картина значительно улучшилась для обеих версий, хотя и неодинаково: на русский вариант сослались 74 раза, а на английский 950, что вывело английскую статью в число наиболее цитируемых публикаций за 40 лет существования *Astronomy and Astrophysics*. К тому же несчетное число авторов просто сослались на приближение Зельдовича без указания публикации.

Яков Борисович Зельдович

Яков Борисович Зельдович (8 марта 1914 года, Минск - 2 декабря 1987 года, Москва) советский физик и физикохимик. Академик АН СССР (1958; член-корреспондент 1946), доктор физико-математических наук, профессор.

В 1939 году Я. Б. Зельдович и Ю. Б. Харитон впервые осуществили расчет кинетики цепной реакции деления в водном растворе урана.

1941-1943. Теория горения пороха и внутренняя баллистика реактивных снарядов Катюша,

С февраля 1948 по октябрь 1965 года - КБ11, Арзамас 16, Саров

Трижды Герой Социалистического Труда (1949, 1954, 1956). Лауреат Ленинской премии (1956) и четырех Сталинских премий (1943, 1949, 1951, 1953)

Один из создателей атомной бомбы (29 августа 1949 года) и водородной бомбы (1953) в СССР.

Наиболее известны труды Якова Борисовича по физике горения и взрыва, детонации, ядерной физике, астрофизике, космологии.

Л. Ландау - Ни один физик, исключая Ферми, не обладал таким, богатством новых идей, как Зельдович.

И. Курчатов - А все-таки Яшка гений!

А.Д. Сахаров назвал его человеком универсальных интересов.



Приближение Зельдовича. ($\langle \delta^2 \rangle^{1/2} \gg 1$)

Закон сохранения масс $\eta d^3x = \bar{\eta} d^3q$. Лагранжева плотность

$$\eta(\mathbf{q}, D) = \frac{\bar{\eta}}{[1 - D(t)\lambda_1(\mathbf{q})][1 - D(t)\lambda_2(\mathbf{q})][1 - D(t)\lambda_3(\mathbf{q})]},$$

Здесь $\lambda_1(\mathbf{q})$, $\lambda_2(\mathbf{q})$ и $\lambda_3(\mathbf{q})$ собственные значения тензора $d_{ij} = \partial^2 \Phi_0 / \partial q_i \partial q_j$.

$$\text{Prob}(\lambda_1(\mathbf{q}) = \lambda_2(\mathbf{q}) = \lambda_3(\mathbf{q})) = 0$$

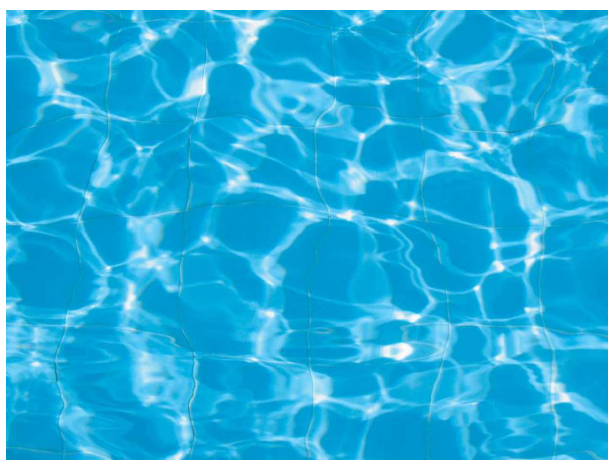
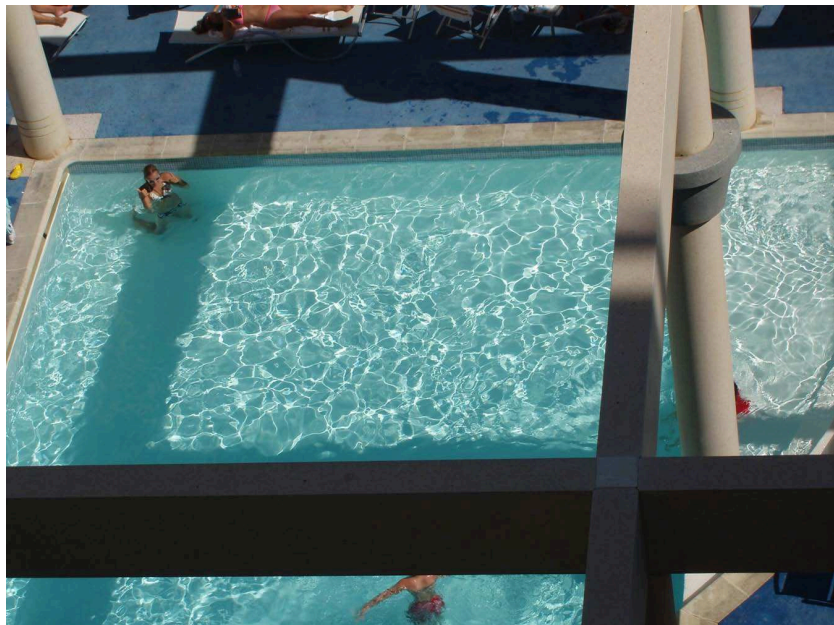
Первые особенности резко анизотропные структуры
Одномерное сжатие - точное решение

“Zel’dovich’s pancakes”.

Я.Б. Зельдович со свойственной ему непосредственностью и образностью ввел в космологию кулинарный термин **блины**, который получил широкую популярность в космологической литературе.

The inner structure of **Zeldovich pancakes**. E Aurell, D Fanelli, SN Gurbatov, AY Moshkov. Physica D: Nonlinear Phenomena 2003,186 (3-4), 171-184

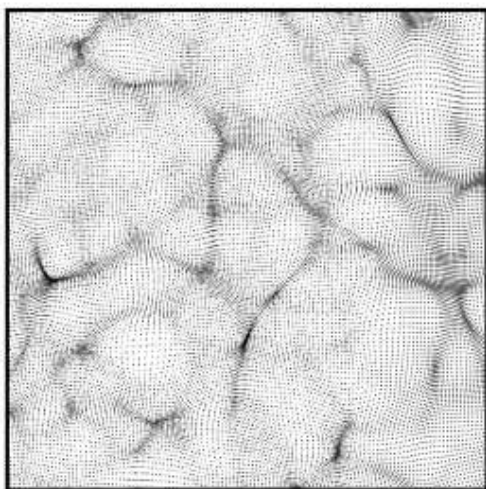
Частицы и лучи - каустики на дне бассейна



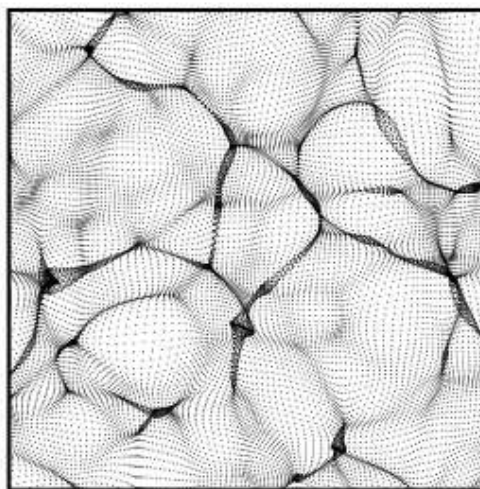
Зельдович Я.Б., Мамаев А.В., Шандарин С.Ф. "Лабораторное наблюдение каустик, оптическое моделирование движения частиц и космология". УФН,139, 153-163 (1983)

Приближение Зельдовича $\sigma = \langle \delta^2 \rangle^{1/2}$.

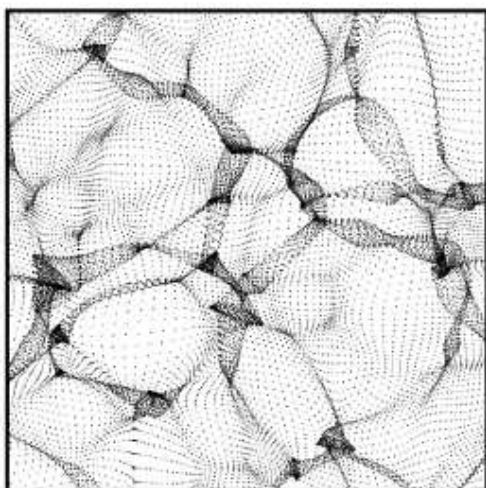
$\sigma = 0.5$



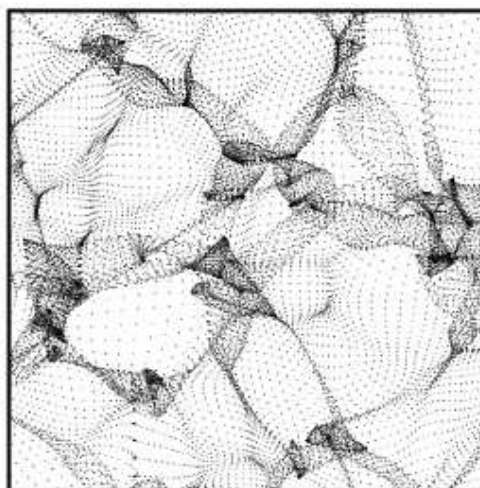
$\sigma = 1.$



$\sigma = 1.5$

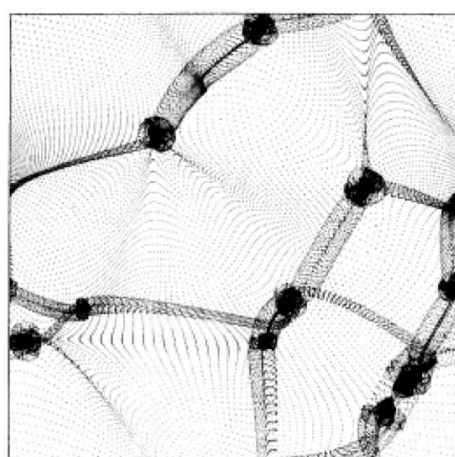
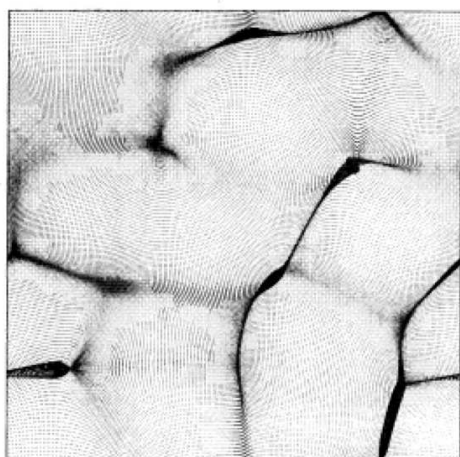


$\sigma = 2.$



Модель слипания

Прямое численное моделирование гравитационно- взаимодействующих частиц - распределения вещества **гораздо проще, чем система случайных каустик.**



Вещество концентрируется в тонких слоях, линиях кластерах. Подобные структуры хорошо аппроксимируются моделью когда частицы не проходят друг сквозь друга, а слипаются. Несмотря на то, что этот механизм является гравитационным, данный эффект может быть смоделирован введением вязкого диффузионного слагаемого в уравнение Зельдовича.

Модель слипания (**adhesion model**) - векторное уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial D} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nu \nabla^2 \mathbf{v}.$$

и уравнение непрерывности для плотности

S. N. Gurbatov, A. I. Saichev, S. F. Shandarin Model description of the large-scale structure of the Universe development. DOKLADY AKADEMII NAUK SSSR, Volume 236, No 2, **1985**, Pages 323-326 (**Wos-18**, Google Scollar -79)

S. N. Gurbatov, A. I. Saichev, S. F. Shandarin Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 236, Issue 2, January **1989**, Pages 385-402 (**WoS-230**, Google Scollar -303)

Review Articles

Гурбатов С.Н., Саичев А. И., Шандарин С. Ф., "Крупномасштабная структура Вселенной. Приближение Зельдовича и модель слипания". УФН, 182, 233-261, (2012)

Jose Gaite, "The Fractal Geometry of the Cosmic Web and Its Formation". Advances in Astronomy, 2019-05-02

Уравнения Бюргерса при $\mu \rightarrow 0$ - скелет ячеистой (Web) структуры:

Области с плотностью много меньше средней, поверхности с повышенной плотностью, разделяющие эти темные области, пересечения плоскостей - линии, и наконец, пересечения линий - скопления.

Численные эксперименты показали достаточно хорошее согласие с моделью слипания.

Данное решение является примером потенциально-го течения. Классификация особенностей в двух и трехмерном случае проведена И.В.Арнольдом с соавторами

V.I.Arnold, Yu.M.Baryshnikov, I.A.Bogaevsky, Singularities and bifurcation of potential flow.

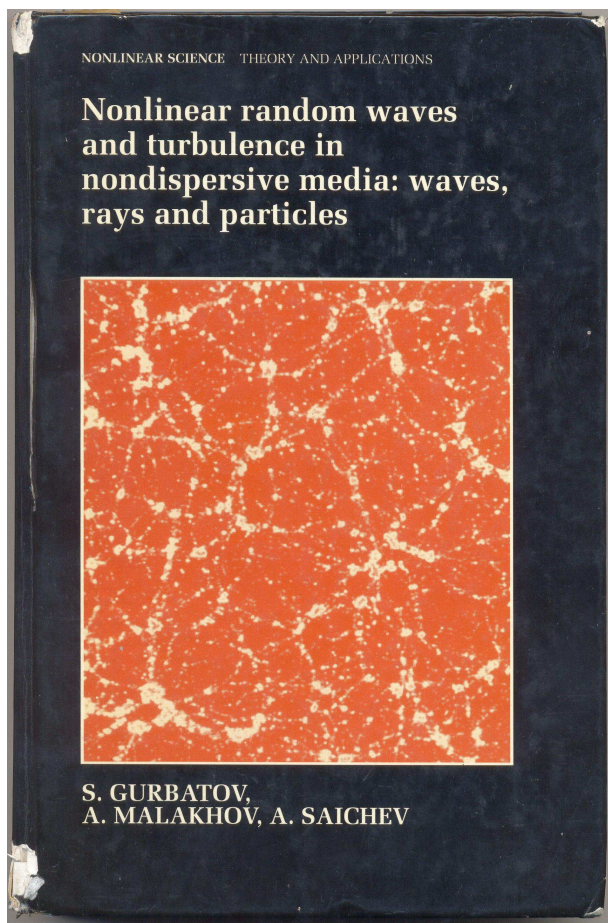
Supplement 2 в монографии

S. N. Gurbatov, A.N.Malakhov, A. I. Saichev, Nonlinear random waves and turbulence in nondispersive media: waves, rays, particles. Manchester University Press, 1991

Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996. - 334 с. (Библиотека математика. Вып, 1)

Владимир Игоревич Арнольд (1937 - 2010) - советский и российский математик, автор работ в области топологии, теории дифференциальных уравнений, теории особенностей гладких отображений и теоретической механики. Один из крупнейших математиков XX века. Академик АН СССР, иностранный член Национальной АН США, Французской АН, Лондонского королевского общества..... . Лауреат Ленинской премии, премии Крафорда, премии Вольфа, Государственной премии РФ, премии Шао





→ Prof. S. Gurbatov

With the compliments of

The Head of the Department

*Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics
University of Cambridge
Silver Street, Cambridge CB3 9EW*



David Grighton - Head of DAMPT в ННГУ.

Международная школа семинар - 1992, 1994.

Одномерное уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Решение Флорина - Хопфа - Коула

$$v(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} s(x, t) = -2\mu \frac{\partial}{\partial x} \ln \varphi(x, t) = -\frac{2\mu}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \varphi_0(x) = \exp\left(-\frac{s_0(x)}{2\mu}\right).$$

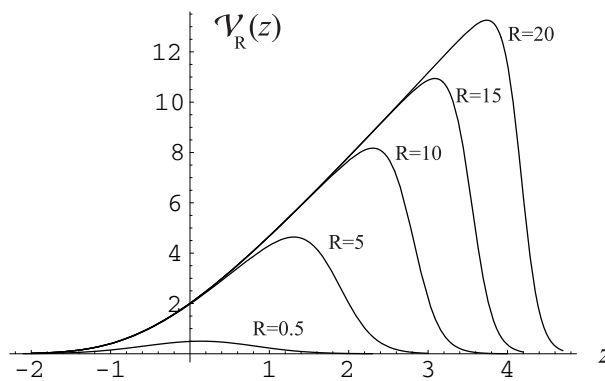
Здесь $s_0(x) = \int^x v_0(x') dx'$

Переход обратный к переходу от параболического уравнения квазиоптики к приближению геометрической оптики ($\mu = 1/2ik$). Здесь k волновое число.

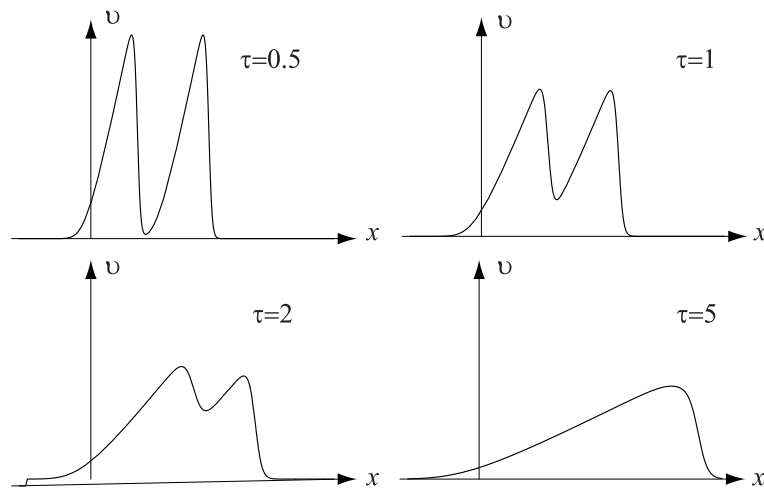
$$2ik \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}, \quad E(x, z) = \exp(-iks(x, z))$$

Автомодельные решения уравнения Бюргерса

$$v(x, t) = \sqrt{\frac{\mu}{\pi t}} \mathcal{V}_R \left(\frac{x}{2\sqrt{\mu t}} \right).$$



Функция $\mathcal{V}_R(z)$ при разных значениях $R = S/\mu$.



Автомодельное решение является асимптотическим для произвольного финитного возмущения с ненулевой площадью.

Решение уравнения Бюргерса при $\mu \rightarrow 0$

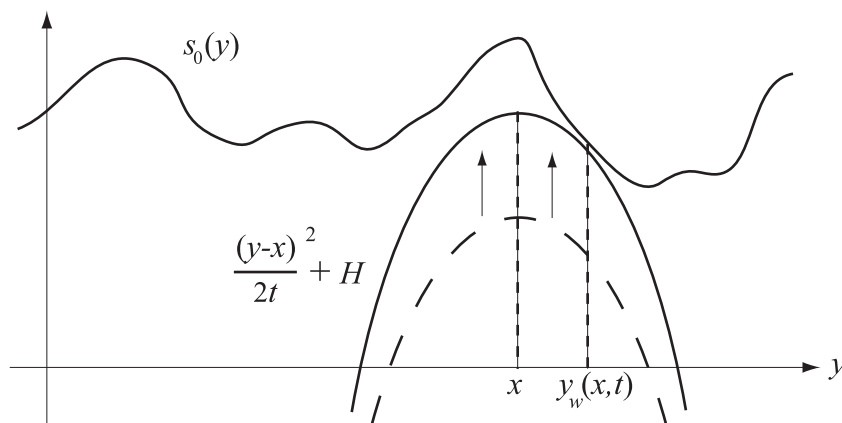
Принцип абсолютного минимума Олейник-Лэкса.

$$v_w(x, t) = \frac{1}{t} [x - y_w(x, t)]$$

где $y_w(x, t)$ – координата абсолютного минимума функции

$$\mathcal{G}(y; x, t) = s_0(y) + \frac{1}{2t}(y-x)^2, \quad s_0(x) = \int^x v_0(x') dx'$$

Геометрическое построение слабых решений



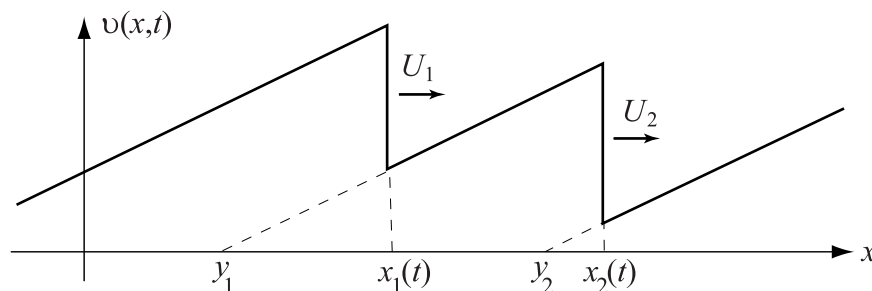
Поднимая параболу $P(y; x, t) = -\frac{(y-x)^2}{2t} + H$ с центром в точке x , находим координату $y_w(x, t)$ точки ее первого касания с графиком начального потенциала $s_0(y)$

Качественная теория ТБ.

Локальная автомодельность

$$v(x, t) = \frac{x - y_n}{t}, \quad x \in [x_n, x_{n+1}]$$

Профиль поля на больших временах.



Внешний масштаб турбулентности и энергия

$$L(t) \sim |x - y_w(x, t)|, \quad \sigma^2(t) = \langle v^2(x, t) \rangle \sim L^2(t)/t^2$$

Для достаточно больших волновых чисел поведение спектра всегда определяется разрывами

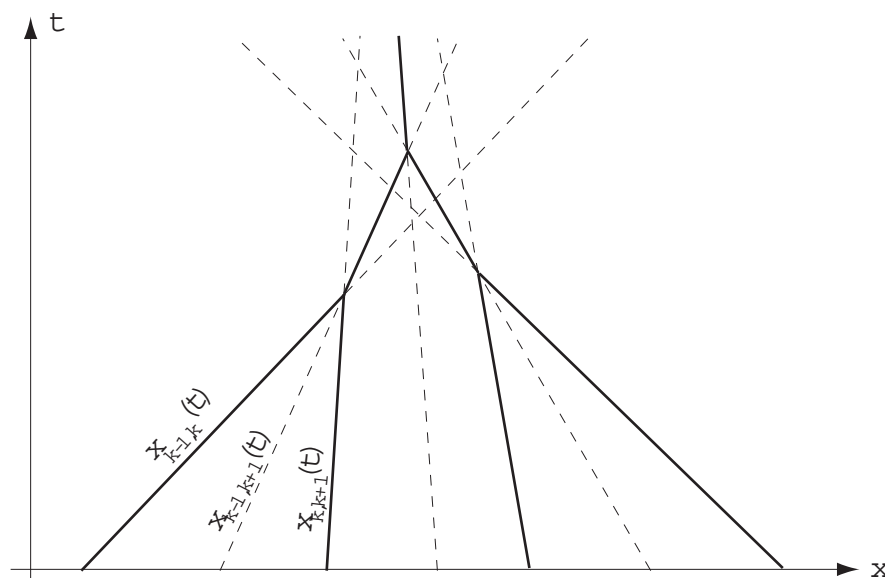
$$E(k, t) \sim \frac{B(t)}{k^2} \quad \text{большие } k$$

**Решение уравнения Бюргерса при $\mu \rightarrow 0$,
поток неупруго слипающихся частиц.**

Законы слияния разрывов.

$$V_{k,n} = \frac{s_n - s_k}{y_n - y_k} = \frac{M_{k,m}V_{k,m} + M_{m,n}V_{m,n}}{M_{k,m} + M_{m,n}}.$$

Эта формула совпадает с законом изменения скорости частиц, массами $M_{k,m}$ и $M_{m,n}$, при абсолютно неупругом столкновении.



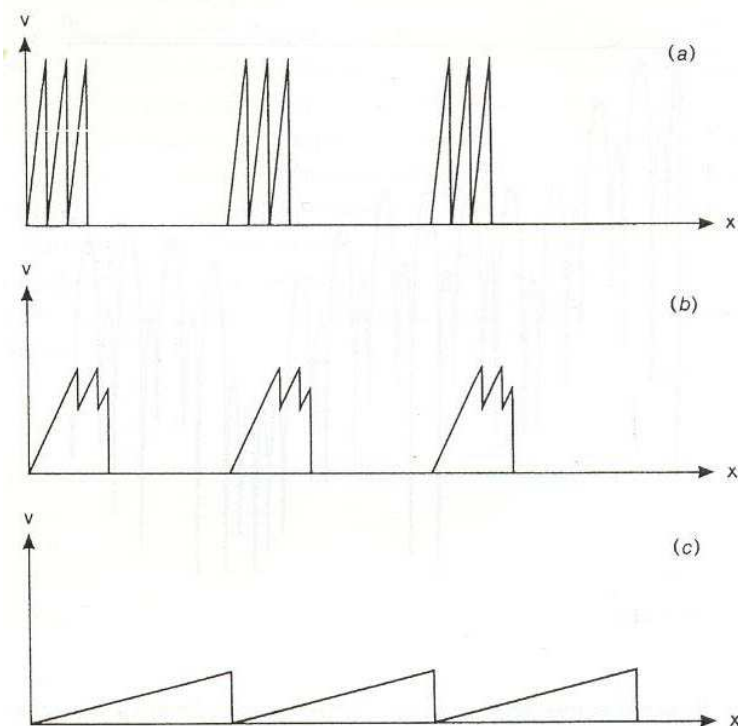
Узор траекторий сливающихся разрывов. Сплошными линиями обозначены траектории действительно существующих разрывов

Автомодельность сложных сигналов.

Канторовское множество

Базовый элемент - N импульсов с периодом L_1 . Структура воспроизводится N раз с периодом $L_2 = \beta L_1, \dots$

$$L_i = \beta L_{i-1}, \quad \beta = (N - 1)\gamma, \quad \gamma > 1$$



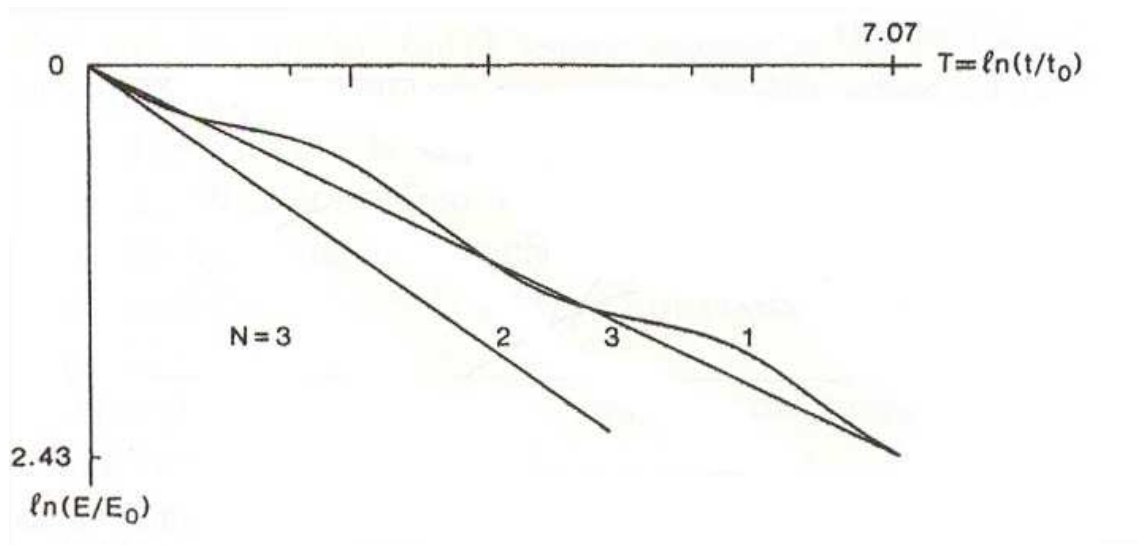
Эволюция канторовского множества в уравнении Бюргера

Фрактальная размерность, $R = N^i, L = L_1 N \beta^{i-1}$

$$D = \lim (\ln R / \ln L) = \ln N / \ln[(N - 1)\gamma]$$

Логарифмически периодическая автомодельность

$$t \in [t_0, t_0 \beta^2 / N], \quad t \in [t_0 (\beta^2 / N)^i, t_0 (\beta^2 / N)^{i+1}]$$



- 1 - затухание энергии канторовского множества
- 2 - усредненная эволюция энергии канторовского множества
- 3 - энергия одиночного импульса

Усредненное затухание энергии

$$E(t) = C_E (t/t_0)^{-p}, \quad p = (1 - D)/(2 - D).$$

$$0 < p < 1/2$$

Логарифмически периодическая автомодельность.

Затухание многомасштабных сигналов.

$$v_0(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p A_{inv}(k_p x),$$

Инверсная Функция Вейерштрасса -Мандельброта

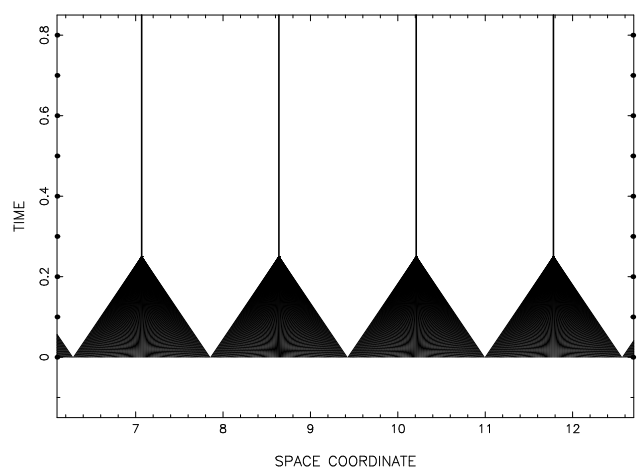
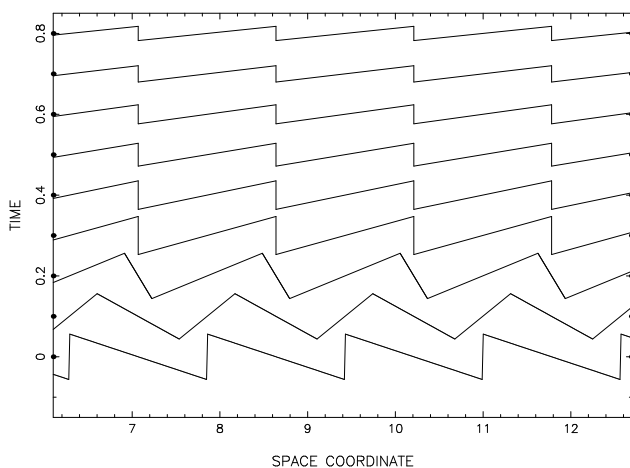
$$k_p = k_0 \epsilon^p, \quad a_p = a_0 \epsilon^{-hp},$$

$$h = -\left(\frac{n+1}{2}\right), \quad a_0 = \alpha k_0^{(n+1)/2}.$$

Пространственные частоты k_p аккумулируются к нулевой частоте, $\epsilon < 1$.

$$(a_p^2 = E(k_p) \Delta_p), \quad E(k) \sim k^n$$

$A_{inv}(x)$ инверсная пилообразная мода. Эволюция инверсной пилообразной моды и траектории частиц

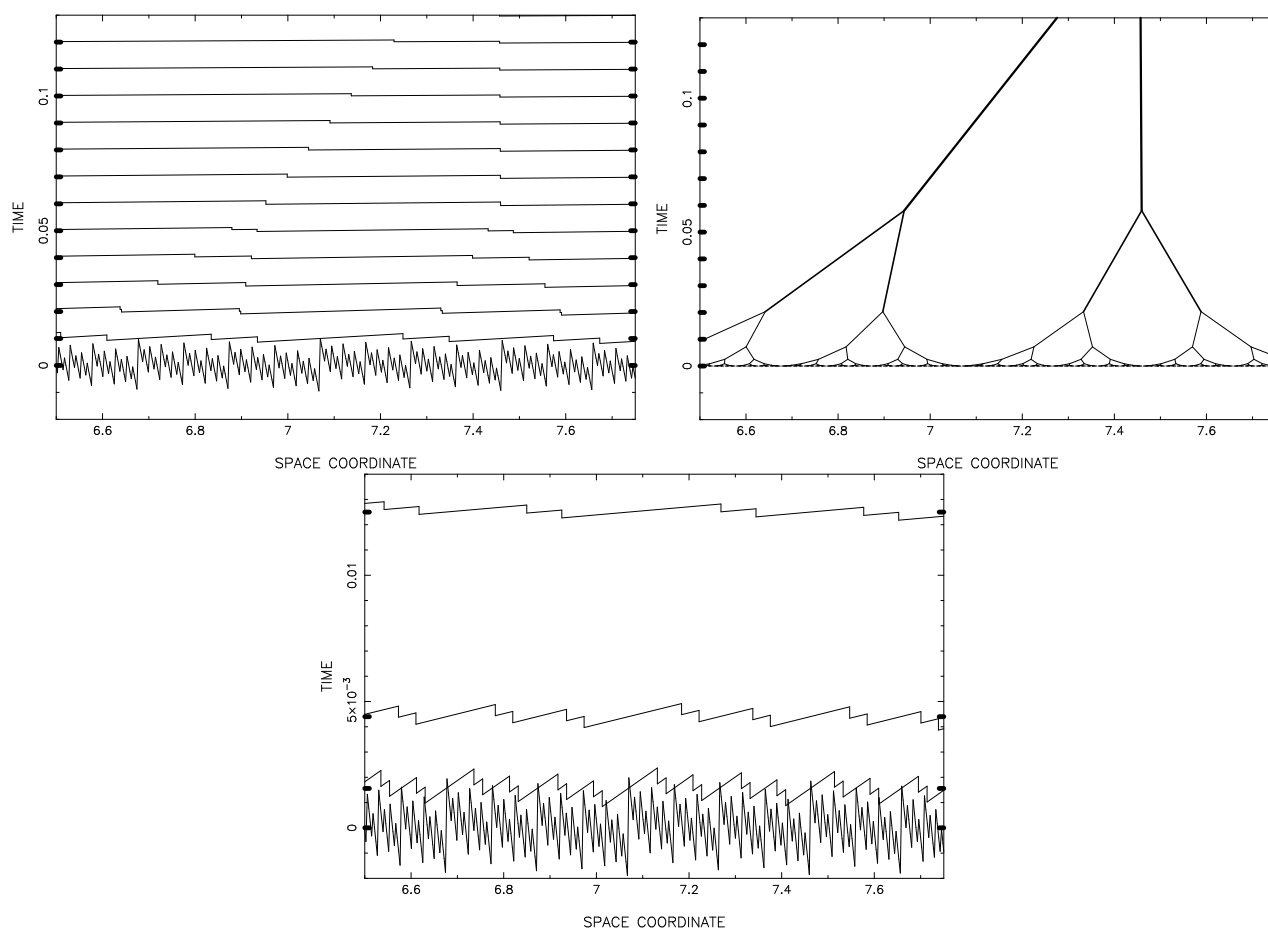


Логарифмически периодическая автомодельность

В произвольном интервале $[\tilde{t}_q, \tilde{t}_{q+1}]$ движение частиц и эволюция поля подобны движению частиц и эволюции поля в интервале $\tilde{t}_p, \tilde{t}_{p+1}$, с пространственным масштабным фактором $x_p/x_q = \epsilon^{p-q}$ и временным масштабным фактором $t_p/t_q = (\epsilon^{-\frac{n+3}{2}})^{p-q}$.

Внешний масштаб $L(t) \simeq m(t) \simeq m_0(t/t_0)^{(n+3)/2}$.

Белый шум $n = 0$.



Статистическая автомодельность ТБ

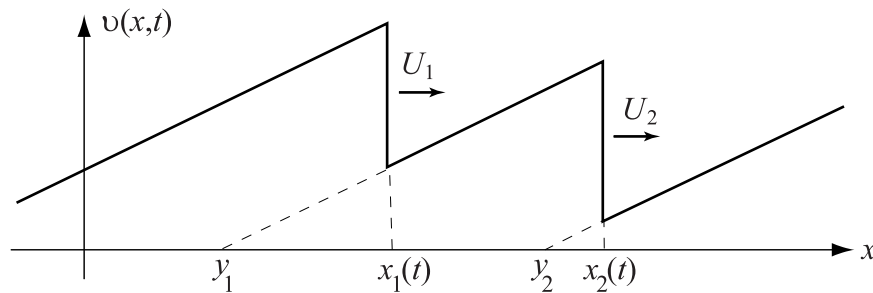
Решение уравнения Бюргера при $\mu \rightarrow 0$

$$v_w(x, t) = \frac{1}{t} [x - y_w(x, t)]$$

$y_w(x, t)$ – координата абсолютного минимума функции

$$\mathcal{G}(y; x, t) = s_0(y) + \frac{1}{2t}(y-x)^2, \quad s_0(x) = \int^x v_0(x') dx'$$

Профиль волны на больших временах.



Множественное слияние разрывов приводит к установлению статистической автомодельности. Скорость разрыва разностью значений начального потенциала

$$U_i \sim s_0(y_i) - s_0(y_{i-1}),$$

Именно статистические свойства начального потенциала и определяют какой из режимов автомодельности будет реализовываться

Статистическая автомодельность. Начальный спектр.

$$E_0(k) = \alpha^2 k^n b_0(k), \quad v_0(x) = \frac{\partial s_0(x)}{\partial x},$$

$$E_s(k) = E_0(k)/k^2 \sim \alpha^2 k^{n-2}$$

Автомодельность спектра

$$E(k, t) = \frac{L^3(t)}{t^2} \tilde{E}(kL(t)), \quad \sigma^2(t) = \frac{L(t)^2}{t^2}$$

Колмогоровский принцип “permanence of large eddies” (PLE).

$$E_0(k) = \frac{L(t)^3}{t^2} \tilde{E}(kL(t)), \quad \text{малые } k$$

Рост внешнего масштаба и затухание энергии

$$L(t) \sim (\alpha t)^{2/(3+n)},$$

$$\sigma^2(t) \sim \alpha^{4/(3+n)} t^{-2(n+1)/(3+n)}$$

Генерация крупномасштабных компонент

$$\Delta E(k, t) = ak^2 t^2$$

Критический индекс $n_p = 2, n < 2$

Качественная теория ТБ на основе решения УБ

Оценки внешнего масштаба

$$L(t) \sim |(x - y_w(x, t))|,$$

где $y_w(x, t)$ – координата абсолютного минимума $G(y; x, t)$

$$G(y; x, t) = s_0(y) + \frac{1}{2t}(y-x)^2, \quad s_0(x) = \int^x v_0(x') dx'$$

Структурная функция потенциала

$$S_{0\psi}(x) \equiv \langle (\psi_0(x) - \psi_0(0))^2 \rangle,$$

Асимптотика структурной функции

$$S_{0\psi}(x) \sim \begin{cases} \sigma_\psi^2 & n > 1 \\ \alpha^2 |x|^{1-n} & n < 1, \end{cases} \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Уравнение для масштаба $L(t)$

$$\sqrt{S_{0\psi}(L)} \sim \frac{L^2}{t}.$$

Критический индекс $n_B = 1$??

$$L(t) \sim \begin{cases} \sigma_\psi t & n > 1 \\ (\alpha t)^{2/3+n} & n < 1, \end{cases} \quad t \rightarrow \infty.$$

Сохранение вихрей и автомодельность

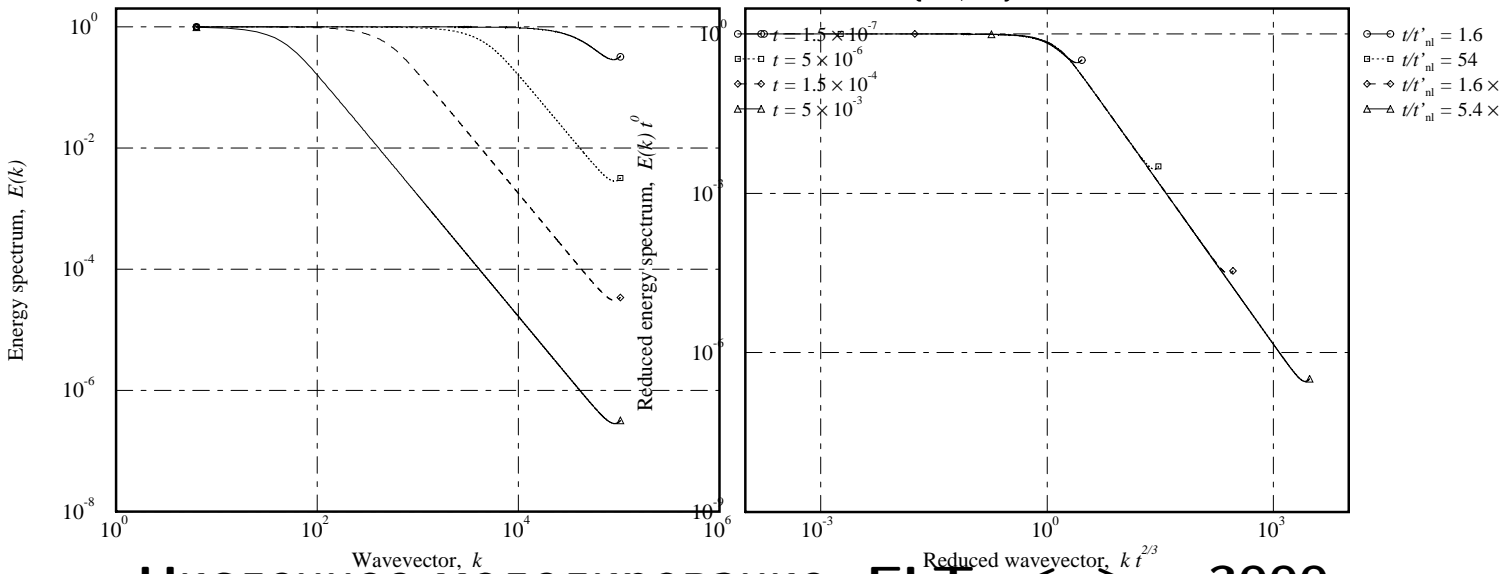
$$-3 < n < 1$$

$$E(k, t) = \begin{cases} \alpha^2 k^n, & \text{при } k < 1/L(t) \\ \frac{L(t)}{t^2} k^{-2}, & \text{при } k > 1/L(t) \end{cases}$$

$$L(t) = (\alpha t)^{\frac{3}{2+n}}$$

Рескэйлинг в глобальном решении

Эволюция спектра $E(k, t)$, $n = 0$



Численное моделирование -FLT, $\langle \dots \rangle = 3000$

Число Рейнольдса ($\mu \neq 0$) растет

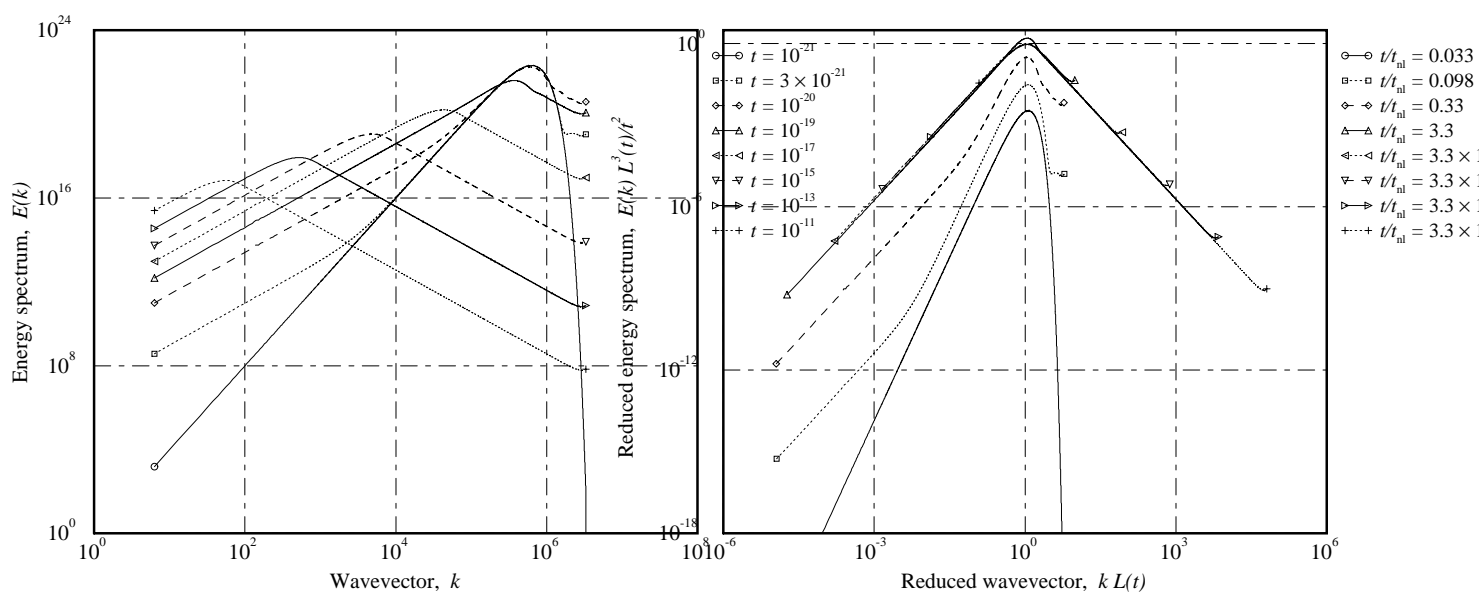
$$R(t) = \frac{V_c(t)L_c(t)}{\mu} \sim t^{\frac{1-n}{n+3}}$$

Параметрическая генерация крупномасштабных структур

$$(n > 2, n = 4)$$

$$E(k, t) = \begin{cases} \frac{k^2 L^5}{t^2}, & \text{при } k < 1/L, \\ \frac{2L(t)k^{-2}}{\pi^{3/2}t^2}, & \text{при } k > 1/L. \end{cases} \quad (1)$$

$$L(t) = \sqrt{\sigma_s t} \ln^{-1/4} \left(\frac{t}{2\pi t_{nl}} \right)$$



Число Рейнольдса ($\mu \neq 0$)

$$R(t) = \frac{V_c(t)L_c(t)}{\mu} \sim R_0 \ln^{-1/2} \left(\frac{t}{2\pi t_{nl}} \right)$$

Неполная автомодельность ($1 < n < 2$)

Сохранение крупных вихрей

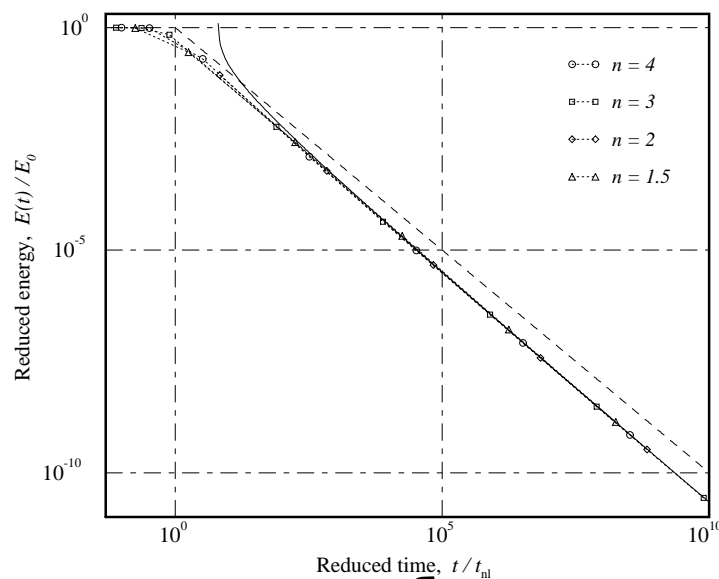
$$E_0(k) \simeq \alpha^2 k^n, \quad k < k_s(t)$$

$$k_s \cdot L(t) = \frac{k_s(t)}{k_L(t)} \sim t^{-\frac{n-1}{2(2-n)}}$$

Параметрическая генерация крупномасштабных структур

$$E_0(k) \simeq \alpha^2 k^2, \quad 1/L(t) > k > k_s(t)$$

$$E(t) = L^2(t)/t^2, \quad L(t) = \sqrt{\sigma_s t} n^{-1/4} \left(\frac{t}{2\pi t_{nl}} \right)$$



Гидродинамическая турбулентность: Eyink, G.L., Thomson, D.J.: Free decay of turbulence and breakdown of self-similarity. Phys. Fluids 12, 477 - 479 (2000)

Gregory L. Eyink, David J. Thomson Free decay of turbulence and breakdown of self-similarity Phys. Fluids 12, 477 (2000)

It has been generally assumed, since the work of von Karman and Howarth in 1938, that free decay of fully-developed turbulence is self-similar. We present here a simple phenomenological model of the decay of 3D incompressible turbulence, which predicts breakdown of self-similarity for low-wavenumber spectral exponents n in the range $n_c < n < 4$, where n_c is some threshold wavenumber. Calculations with the eddy-damped quasi-normal Markovian approximation give the value as $n_c = 3.45$. The energy spectrum for this range of exponents develops two length-scales, separating three distinct wavenumber ranges.

In particular, Gurbatov et al. observed that decaying Burgers turbulence develops two distinct length-scales when the low wave number spectral exponent n lies in the range $1 < n < 2$. Since it was the first author of reference 3 who observed this state of affairs in Burgers decay, we call it the "Gurbatov phenomenon".

Эволюция многомерной ТБ

Многомерное уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mu \Delta \mathbf{v},$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\nabla \psi(\mathbf{x}, t).$$

Решение уравнения Бюргерса при $\mu \rightarrow 0$

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \max(\psi_0(\mathbf{y}) - \frac{1}{2t}(\mathbf{y} - \mathbf{x})^2),$$

В общем случае поведение турбулентности на больших временах определяется «хвостами» функции распределения начального потенциала.

При этом в зависимости от вида начального распределения потенциала могут реализоваться три универсальных автомодельных режима затухания турбулентности.

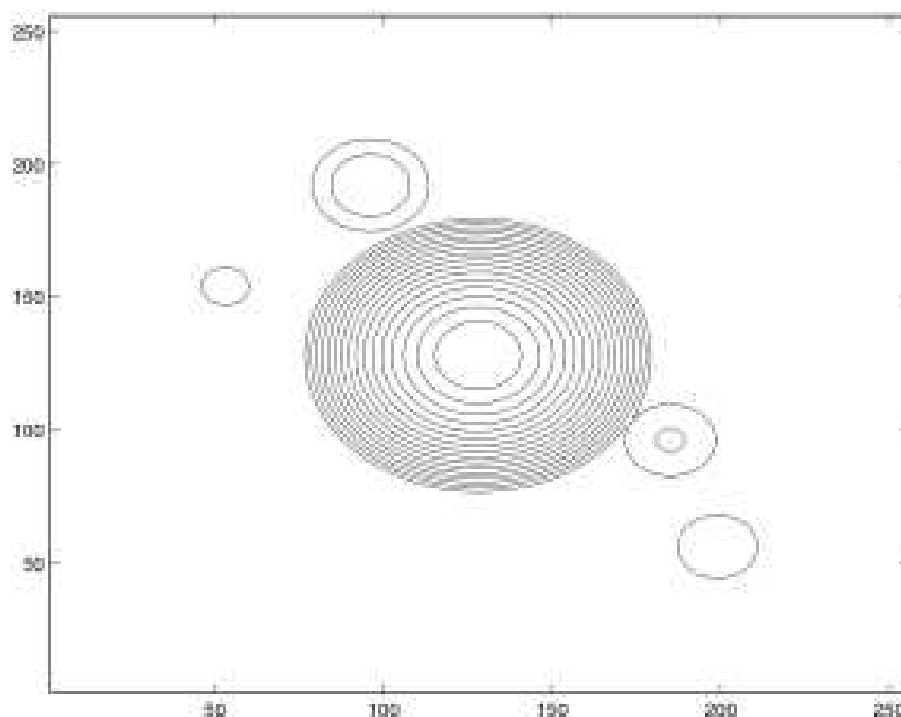
Эволюция многомерной ТБ

Ячеистая модель в d-пространстве

$$\psi_{0,i}(\mathbf{x}) \neq 0, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}_i| < l_0^d; \quad \psi_{0,i} = \max \psi_{0,i}(\mathbf{x})$$

Начальная стадия эволюции

$$\mathbf{v}(x, t) = \frac{1}{t}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_i), \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}_i| \leq x_s = (2\psi_{0,i}t)^{1/2}$$



Эволюция многомерной ТБ

Начальная стадия эволюции.

Универсальная структура поля скорости и потенциала. Рост размера ячеек.

$$\mathbf{v}(x, t) = \frac{1}{t}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_i), \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}_i| \leq x_s = (2\psi_{0,i}t)^{1/2}$$

"Энергия" турбулентности - среднеквадратичная изрезанность

$$E(t) = \langle \mathbf{v}^2(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle (\nabla \psi(\mathbf{x}, t))^2 \rangle$$

$$E(t) \sim (\psi_{0,i})^{\frac{d+2}{2}} t^{\frac{d-2}{2}}$$

$d=1$, $E(t)$ убывает

$d=2$, $E(t)$ постоянная

$d=3$, $E(t)$ возрастает

Эволюция многомерной ТБ

Многократное слияние ячеек приводит к возникновению автомодельных режимов эволюции. Поле в некоторой фиксированной точке на больших временах определяется в результате конкуренции большого числа локальных максимумов.

$$v(x, t) = \frac{1}{t}(x - y_i), \quad W(y) = \frac{1}{L^d(t)} W_s \left(\frac{y}{L(t)} \right)$$

Асимптотическое поведение вероятностного распределения абсолютного максимума большого числа случайных величин определяется хвостами интегрального распределения

$$Prob(\psi_0 < H) = F(H) = 1 - f(H)$$

Известны три класса универсальных асимптотик -Frechet, Weibull and Cumbel classes

M.R. Leadbetter, G. Lindgren and H. Rootzen. Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes. (Springer, Berlin, 1983)

Три типа автомодельности.

Frechet class. Степенной хвост интегрального распределения потенциала

$$f(H) = \left(\frac{H_*}{H} \right)^\gamma$$

"Энергия" и внешний масштаб турбулентности

$$E(t) \sim t^{-p}, \quad p = \frac{2(\gamma - d)}{2\gamma - d}, \quad \gamma > d/2 + 1$$

$$L(t) \sim t^m, \quad m = \frac{\gamma}{2\gamma - d}$$

Если $d = 3$ то $E(t)$ возрастает если $d/2 + 1 < \gamma < d$

Weibull class. Компактный потенциал

$$f(H) = \left(\frac{H_M - H}{H_*} \right)^\alpha, \quad H < H_*$$

$$E(t) \sim t^{-p}, \quad p = \frac{2(\alpha + d)}{2\alpha + d},$$

$$L(t) \sim t^m, \quad m = \frac{\alpha}{2\alpha + d}$$

$$\alpha \rightarrow 0, \quad L(t) \simeq const, \quad E(t) \sim t^{-2}$$

$$W_s(z) \sim \exp(-z^d)$$

Три типа автомодельности.

CumbeI class. Stretched exponential tail

$$f(H) = \left(\frac{H}{H_p} \right) \exp[-(H/H_*)^\beta]$$

$$v(x, t) = \frac{1}{t}(x - y_i),$$

Вероятностное распределение координаты y и скорости является Гауссовым

$$L(t) \sim \frac{(tH_*)^{1/2}}{(\ln(t/t_{tn}))^{(\beta-1)/2\beta}}$$

$$t_{nl} = \frac{L_0^2}{2\pi H_*} \left(\frac{H_p}{H_*} \right)^{2\alpha/d}$$

$$\langle v_i^2 \rangle = \frac{L^2(t)}{t^2}$$

Эволюция многомерной ТБ

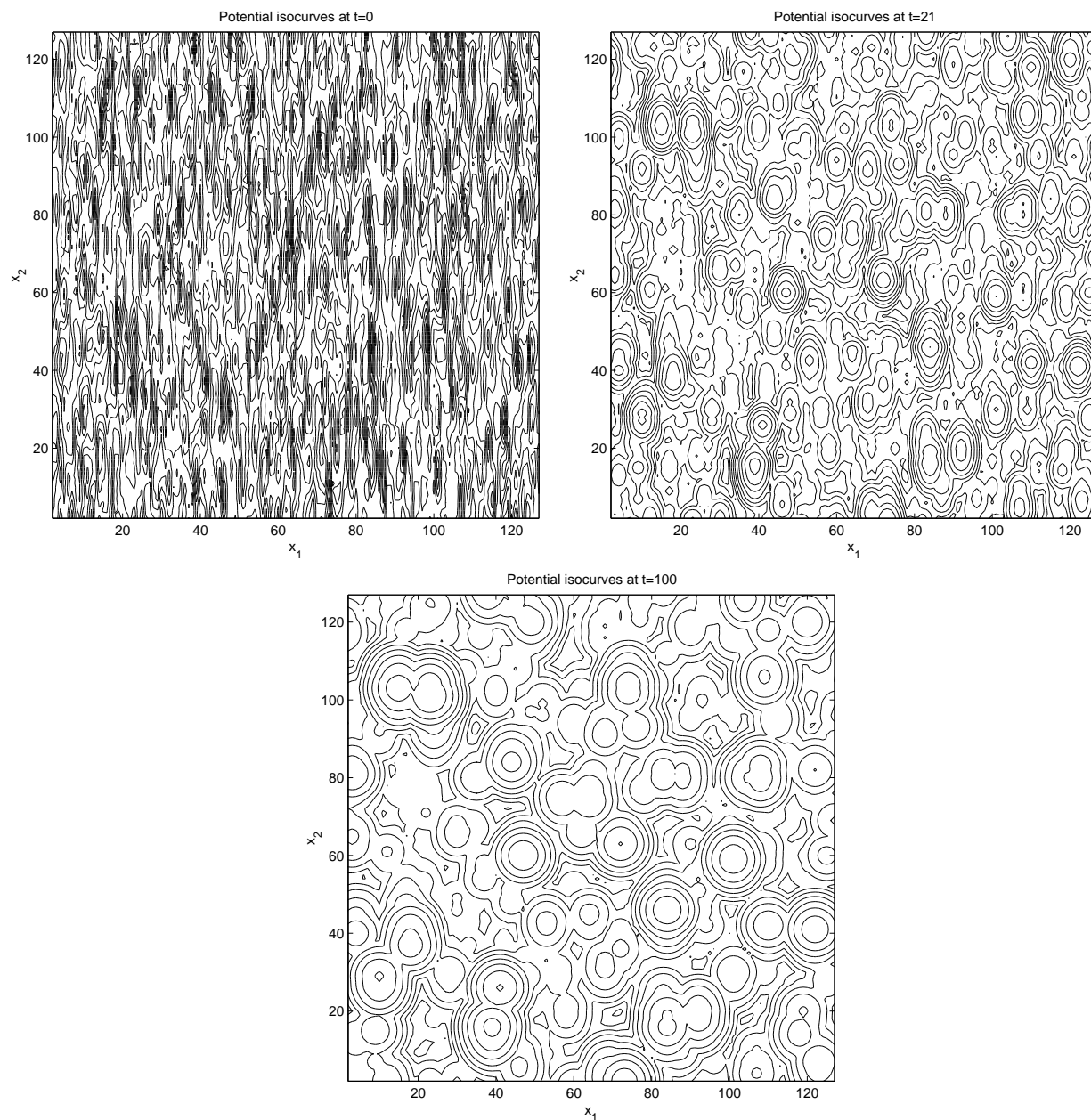
Для случайного поля происходит непрерывное поглощение одних ячеек другими, и, следовательно, характерный масштаб поля растет.

$$L(t) = (\sigma_\psi t)^{1/2} \left(\log \frac{\sigma_\psi t}{l_{eff}^2} \right)^{-1/4}, \quad l_{eff}^d = l_{0,1} \dots l_{0,d}.$$

При этом происходит изотропизация поля и установление как локальной так и статистической автомодельности.

Как и в одномерном случае, для многомерной турбулентности Бюргерса с конечной дисперсией начального потенциала удастся дать исчерпывающее описание турбулентности, найти **одно- и двухточечные вероятностные распределения, спектры и корреляционные функции векторного поля.**

Локальная автомодельность и изотропизация ТБ



Линии уровня потенциала $t_3 > t_2 > t_0$

Автомодельность n-мерных PDF

Одномерное распределение гауссово.

Нормированная функции корреляции продольной (LL) и поперечной (NN) компонент поля $\tilde{v} = \vec{v}/\sigma_{v,i}$

$$\tilde{B}_{LL}(\tilde{x}) = \langle \tilde{v}_{1L}\tilde{v}_{2L} \rangle = \frac{d}{d\tilde{x}} (\tilde{x}P(\tilde{x})),$$

$$\tilde{B}_{NN}(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \langle \tilde{v}_{1N}\tilde{v}_{2N} \rangle = P(\tilde{x}),$$

где $\tilde{x} = x/L(t)$ и

$$P(\tilde{x}) =$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{g\left(\frac{\tilde{x}+z}{2}\right) \exp\left[\frac{(\tilde{x}+z)^2}{8}\right] + g\left(\frac{\tilde{x}-z}{2}\right) \exp\left[\frac{(\tilde{x}-z)^2}{8}\right]},$$

$$g(z) \equiv \int_{-\infty}^z e^{-s^2/2} ds .$$

Где $P(\tilde{x})$ является вероятностью отсутствия разрывов на эйлеровом интервале длиной $\tilde{x}L(t)$.

Поскольку рассматриваются потенциальные изотропные поля, нормированный спектр энергии $e(k)$ выражается через одномерный спектр $e_{NN}(k)$ поперечной компоненты.

Спектральная плотность $E_v(k, t)$ также изотропна и самоподобна

$$E(k, t) = \frac{L^3(t)}{t^2} \tilde{E}(kL(t)).$$

При больших волновых числах k образование разрывов (мелкомасштабных скачков) приводит к появлению степенной асимптотической зависимости $E(k) \sim k^{-2}$. В области малых волновых чисел в трехмерном случае спектр также характеризуется универсальным поведением

$$E(k, t) = k^{d+1} \frac{L^{4+d}(t)}{t^2} \sim k^{d+1} t^{d/2},$$

которое означает нелинейную генерацию крупномасштабной компоненты, отвечающей области малых волновых чисел.

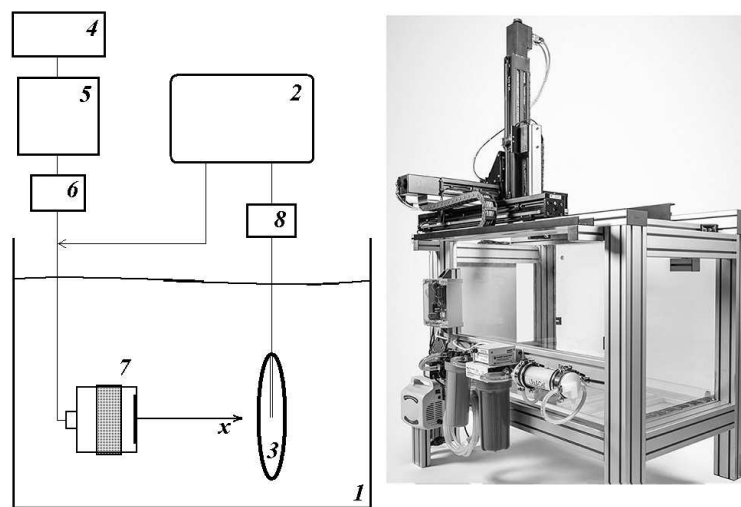
Так, в случае трехмерной турбулентности Бюргерса $E(k, t) \sim k^4 t^{3/2}$. Для больших, но конечных чисел Рейнольдса, разрывы имеют конечную ширину $\delta \sim \mu t / L(t)$ и растут со временем по сравнению с интегральным масштабом как $\delta / L(t) \sim (\ln(\sigma_\psi t / l_{\text{eff}}^2))^{1/2}$. За счет этого на очень больших временах наступает линейная стадия эволюции.

На очень больших временах спектр поля является изотропным и имеет универсальный вид

$$E(\mathbf{k}, t) = D e^{2\mu k^2 t}, \quad D \sim \exp(Re_0^2)$$

Эволюция интенсивного шума

Рабочая частота излучателя 2 МГц, эффективный радиус апертуры 13 мм. Добротность излучателя составляет не более 3-х. Характерная амплитуда 1 МПа.. В экспериментах поле измерялось в диапазоне расстояний от начальной апертуры 50 - 500 мм, с шагом 1 мм.



Узкополосный шум можно представить как квазимонохроматический сигнал

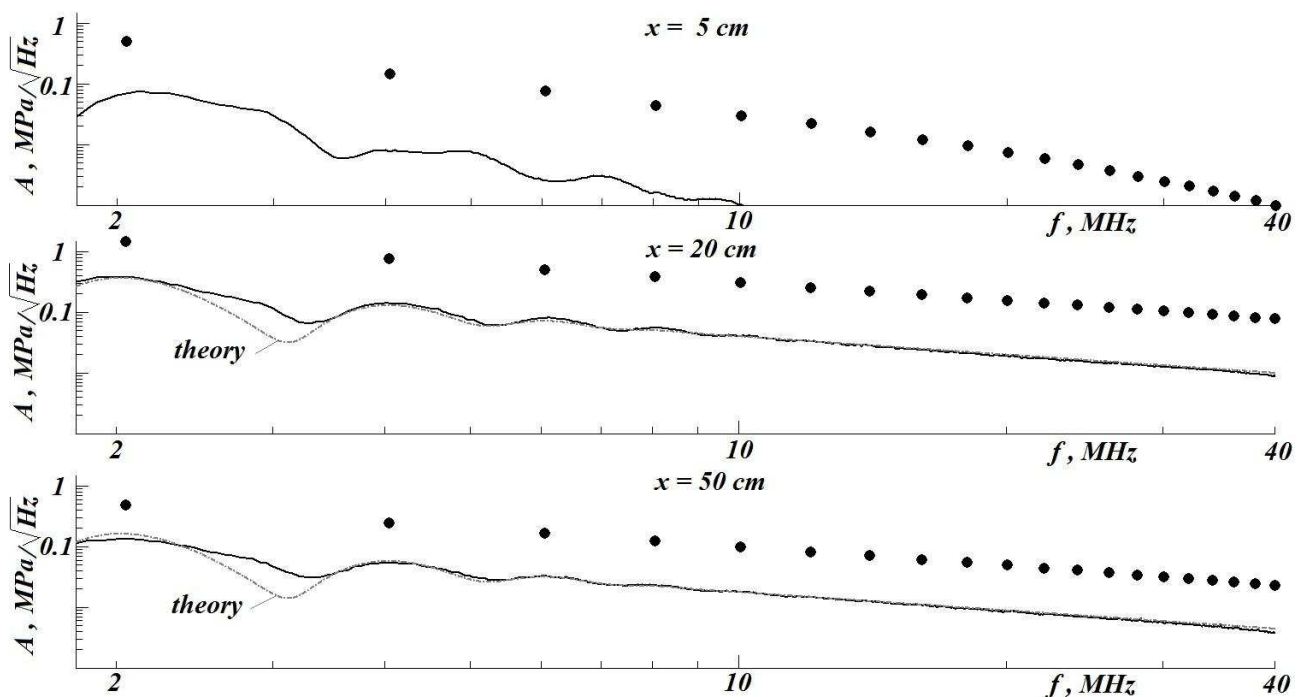
$$v_0(t) = a(t) \sin(\omega_* t + \varphi(t)),$$

где $a(t)$ и $\varphi(t)$ случайная амплитуда и фаза (частота - $\Omega(t) = \varphi'(t)$).

Волна трансформируется в последовательность "треугольных импульсов" в одинаковом наклоне и со случайной амплитудой и положением разрыва.

Форма спектра определяется PDF частоты $W_{\Omega}(\Omega)$

$$S(\omega, z) = \frac{\Delta U_*^2(z) \omega_*^2}{4\pi^2 \omega^2} \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{k=\infty} \frac{\omega_*}{\omega} W_{\Omega}\left(\left(\omega - k\omega_*\right) \frac{\omega_*}{\omega}\right).$$



Эксперимент и теория $z = 5 \text{ cm}$, $z = 20 \text{ cm}$, $z = 50 \text{ cm}$ в двойном логарифмическом масштабе.

Для входного шумового узкополосного сигнала спектр волны на разрывной стадии сохраняет свою форму не только для плоской волны, но и для волновых пучков

Олег Руденко - зав. кафедрой акустики МГУ, академик

