

Точные решения нелинейного уравнения Шрёдингера и солитонный газ высокой плотности

Гелаш Андрей Александрович

***Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Новосибирск
Сколковский институт науки и технологий, Москва***

Соавторы:

D. S. Agafontsev, P.P. Shirshov Institute of Oceanology, RAS, Moscow, Russia

R.I. Mullyadzhyanov, Institute of Thermophysics SB RAS, Novosibirsk 630090, Russia

V.E. Zakharov, P.N. Lebedev Physical Institute, Moscow, Russia

Gennady El, Northumbria University, Newcastle upon Tyne, United Kingdom

Stephane Randoux, Univ. Lille, CNRS, Lille, France

Pierre Suret, Univ. Lille, CNRS, Lille, France

«XIX научная школа "Нелинейные волны – 2020"», Нижний Новгород

Открытие метода обратной задачи рассеяния

METHOD FOR SOLVING THE KORTEWEG-deVRIES EQUATION*

Clifford S. Gardner, John M. Greene, Martin D. Kruskal, and Robert M. Miura
Plasma Physics Laboratory, Princeton University, Princeton, New Jersey
(Received 15 September 1967)

EXACT THEORY OF TWO-DIMENSIONAL SELF-FOCUSING AND ONE-DIMENSIONAL SELF-MODULATION OF WAVES IN NONLINEAR MEDIA

V. E. ZAKHAROV and A. B. SHABAT

Institute of Hydrodynamics, Siberian Division, U.S.S.R. Academy of Sciences

Submitted December 22, 1970

Zh. Eksp. Teor. Fiz. 61, 118–134 (July, 1971)

Уравнение Кортевега — де Фриза (КдФ)

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

$$\varphi_{xx} - (u - \lambda)\varphi = 0$$

$$\hat{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x) \quad \hat{L}\varphi = \lambda\varphi$$

Нелинейное уравнение Шрёдингера

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} + |\psi|^2\psi = 0$$

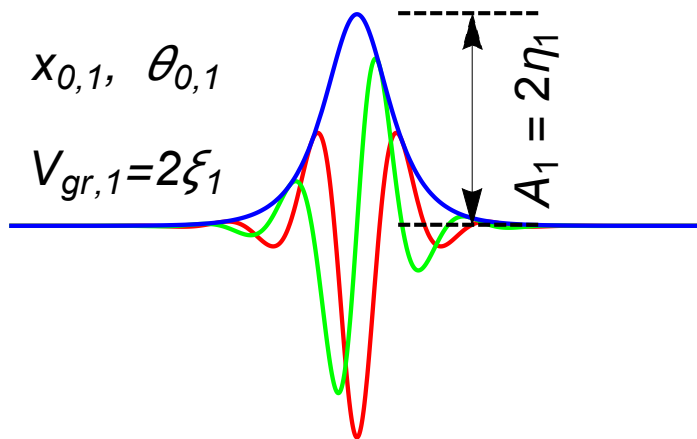
$$\Phi_x - \begin{pmatrix} -i\zeta & \psi \\ -\psi^* & i\zeta \end{pmatrix} \Phi = 0$$

$$\hat{L} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} - i \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ \psi^* & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{L}\Phi = \zeta\Phi$$

Мульти-солитонные решения

Односолитонное решение

$$\psi_{1SS}(x, t) = 2\eta \frac{\exp[-2i\xi(x - x_0) - 2i(\xi^2 - \eta^2)t + i\theta]}{\operatorname{ch}[2\eta(x - x_0) + 4\xi\eta t]}$$



Комплексный дискретный спектральный параметр задачи рассеяния

$$\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$$

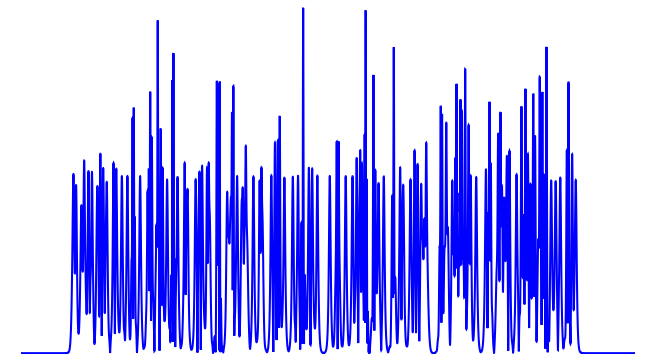
N-солитонное решение

$$\psi_{NSS}(x, t) = 2i \frac{\det \begin{bmatrix} 0 & q_{1,2} & \cdots & q_{N,2} \\ q_{1,1}^* & \frac{(q_1 \cdot q_1^*)}{\zeta_1 + \zeta_1^*} & \cdots & \frac{(q_1 \cdot q_N^*)}{\zeta_1 + \zeta_N^*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{N,1}^* & \frac{(q_N \cdot q_1^*)}{\zeta_N + \zeta_1^*} & \cdots & \frac{(q_N \cdot q_N^*)}{\zeta_N + \zeta_N^*} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} \frac{(q_1 \cdot q_1^*)}{\zeta_1 + \zeta_1^*} & \cdots & \frac{(q_1 \cdot q_N^*)}{\zeta_1 + \zeta_N^*} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(q_N \cdot q_1^*)}{\zeta_N + \zeta_1^*} & \cdots & \frac{(q_N \cdot q_N^*)}{\zeta_N + \zeta_N^*} \end{bmatrix}}$$

$$q_j = (e^{-\phi_j}, e^{+\phi_j})^T$$

$$\phi_j = -i\zeta_j(x - x_{0,j}) - i\zeta_j^2 t - i\theta_j/2$$

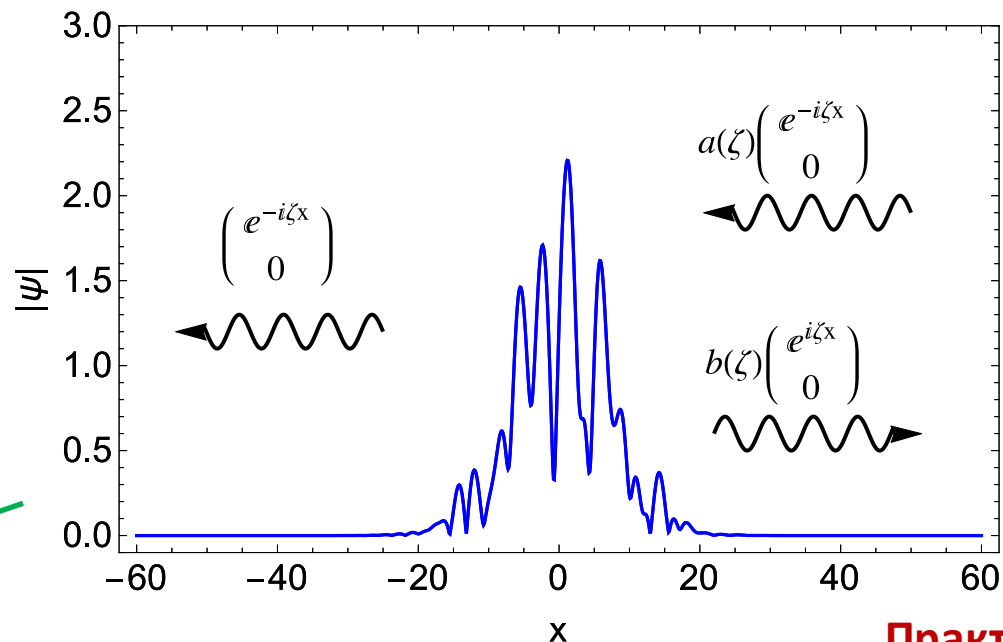
N-SS



Волновое поле и задача рассеяния

Комплексное волновое поле в фиксированный момент времени

$$\psi(x, t_0)$$



Комплексный спектральный параметр задачи рассеяния

$$\zeta = \xi + i\eta$$

Математическая постановка (на бесконечном интервале)

$$\Phi_x = \begin{pmatrix} -i\zeta & \psi \\ -\psi^* & i\zeta \end{pmatrix} \Phi \quad \text{Система Захарова-Шабата}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi = \begin{pmatrix} e^{-i\zeta x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi = \begin{pmatrix} a(\zeta)e^{-i\zeta x} \\ b(\zeta)e^{+i\zeta x} \end{pmatrix} \quad \text{Асимптотики волновой функции}$$

$$\left\{ a(\zeta_n) = 0; \quad \rho_n = \frac{b(\zeta)}{a'(\zeta)} \Big|_{\zeta=\zeta_n}; \quad r(\zeta) = \frac{b(\zeta)}{a(\zeta)} \right\}$$

Данные рассеяния!

Практическая постановка (на интервале L)

$$\Phi_{tr}(-L) = \begin{pmatrix} e^{-i\zeta L} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \Phi_{tr}(L) = \begin{pmatrix} a_{tr}(\zeta)e^{-i\zeta L} \\ b_{tr}(\zeta)e^{+i\zeta L} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_{tr}(L, \zeta) \\ \Phi'_{tr}(L, \zeta) \end{pmatrix} = \hat{S} \begin{pmatrix} \Phi_{tr}(-L, \zeta) \\ \Phi'_{tr}(-L, \zeta) \end{pmatrix}$$

$$b_{tr}(\zeta) = S_{21}; \quad a_{tr}(\zeta) = S_{11}e^{2i\zeta L};$$

$$a'_{tr}(\zeta) = [S_{31} + iL(S_{11} + S_{33})]e^{2i\zeta L}$$

$$\left\{ a_{tr}(\zeta_n) = 0; \quad \rho_n = \frac{b_{tr}(\zeta)}{a'_{tr}(\zeta)} \Big|_{\zeta=\zeta_n}; \quad r(\zeta) = \frac{b_{tr}(\zeta)}{a_{tr}(\zeta)} \right\}$$

Полная характеристика волнового поля в терминах данных рассеяния

$$\Phi_{tr}(-L) = \begin{pmatrix} e^{-i\zeta L} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \Phi_{tr}(L) = \begin{pmatrix} a_{tr}(\zeta)e^{-i\zeta L} \\ b_{tr}(\zeta)e^{+i\zeta L} \end{pmatrix}$$

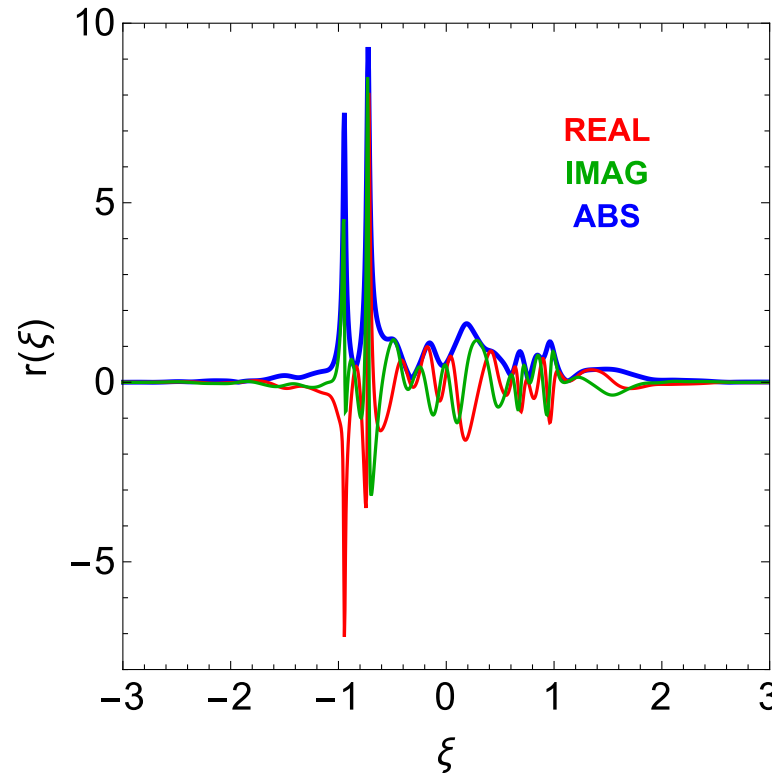
$$\begin{pmatrix} \Phi_{tr}(L, \zeta) \\ \Phi'_{tr}(L, \zeta) \end{pmatrix} = \mathcal{S} \begin{pmatrix} \Phi_{tr}(-L, \zeta) \\ \Phi'_{tr}(-L, \zeta) \end{pmatrix}$$

$$b_{tr}(\zeta) = S_{21}; \quad a_{tr}(\zeta) = S_{11}e^{2i\zeta L};$$

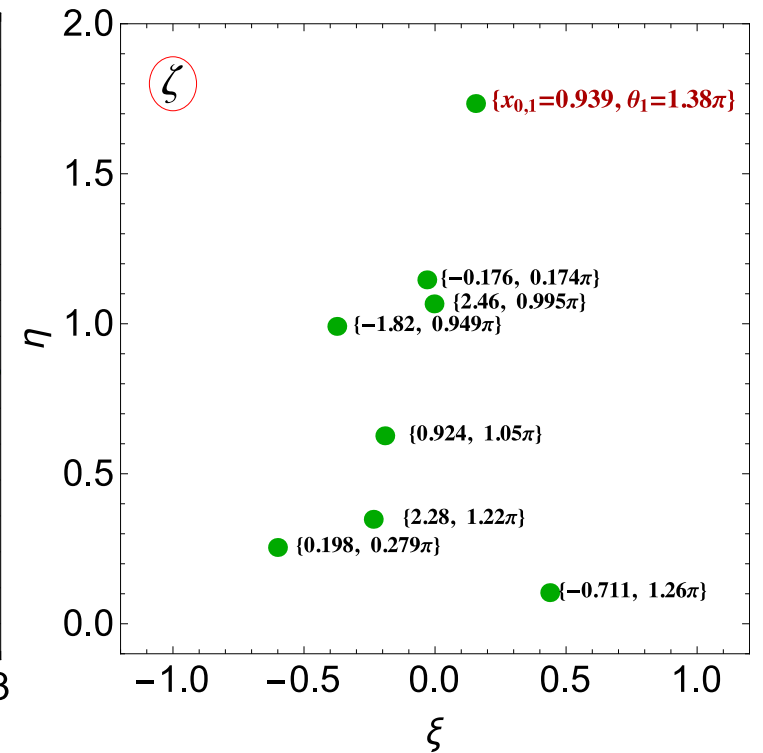
$$a'_{tr}(\zeta) = [S_{31} + iL(S_{11} + S_{33})]e^{2i\zeta L}$$

$$\left\{ a_{tr}(\zeta_n) = 0; \rho_n = \frac{b_{tr}(\zeta)}{a'_{tr}(\zeta)} \Big|_{\zeta=\zeta_n}; r(\zeta) = \frac{b_{tr}(\zeta)}{a_{tr}(\zeta)} \right\}$$

Непрерывный спектр



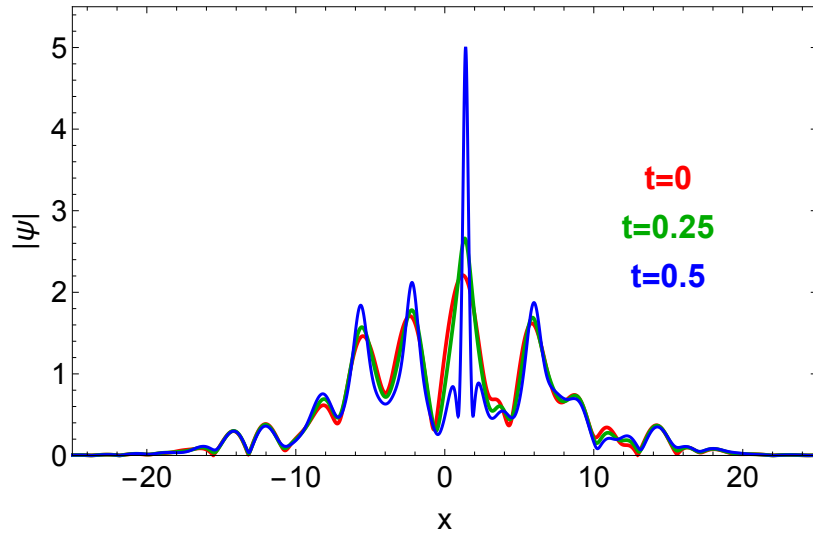
Дискретный спектр



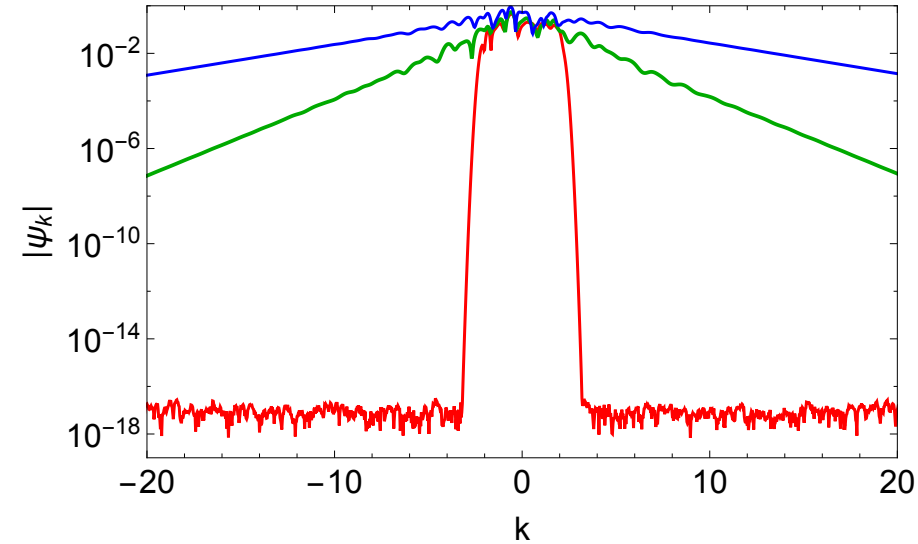
$$\rho_n = \rho_n(x_{0,1}, \theta_n)$$

Эволюция во времени

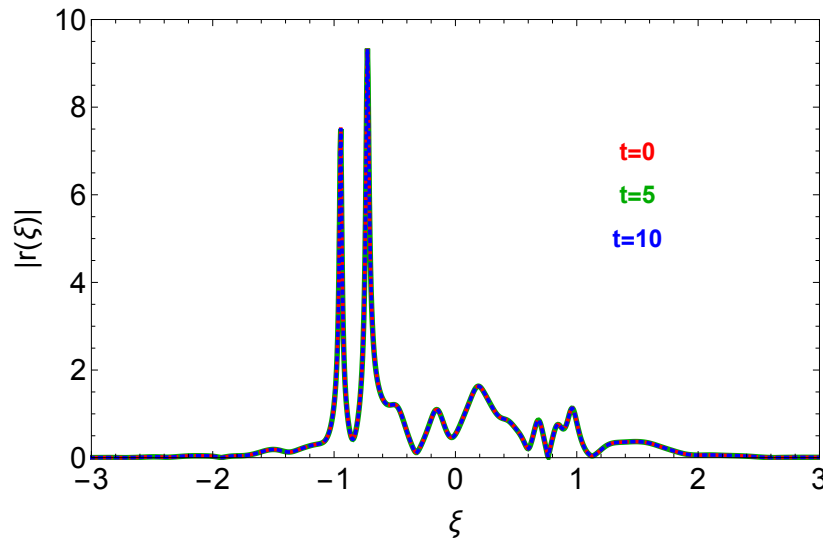
Эволюция волнового поля:



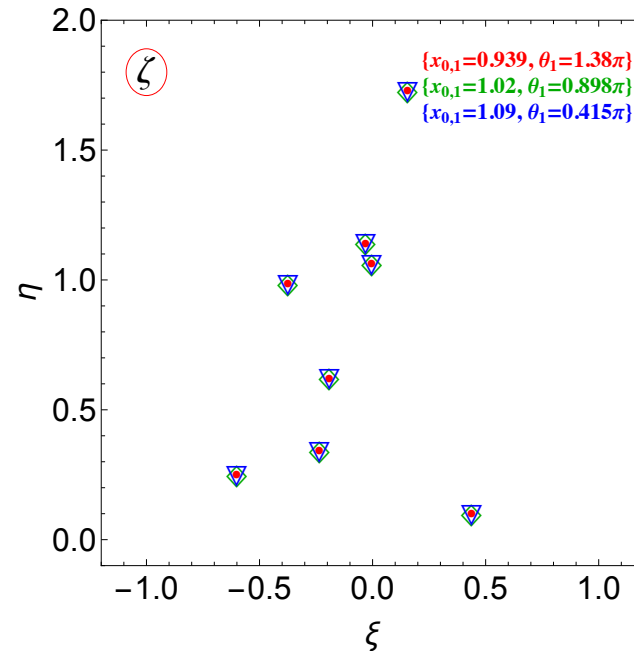
Эволюция Фурье спектра:



Непрерывный спектр:



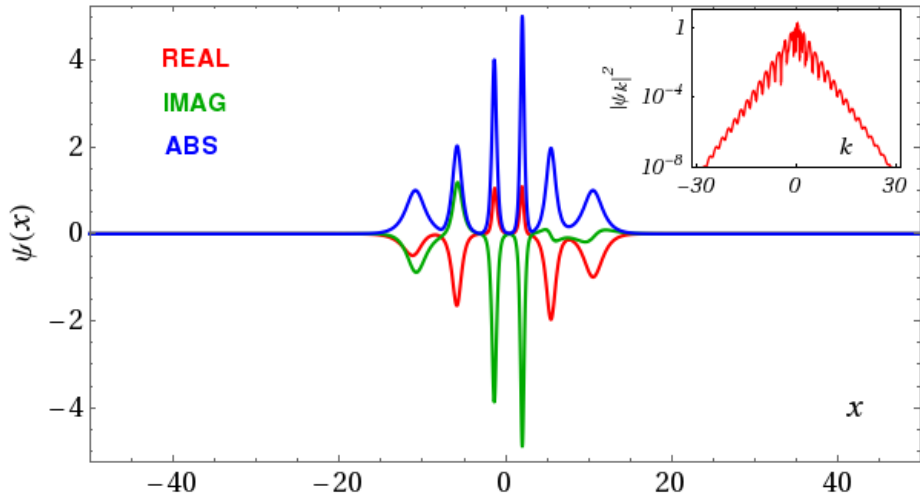
Дискретный спектр:



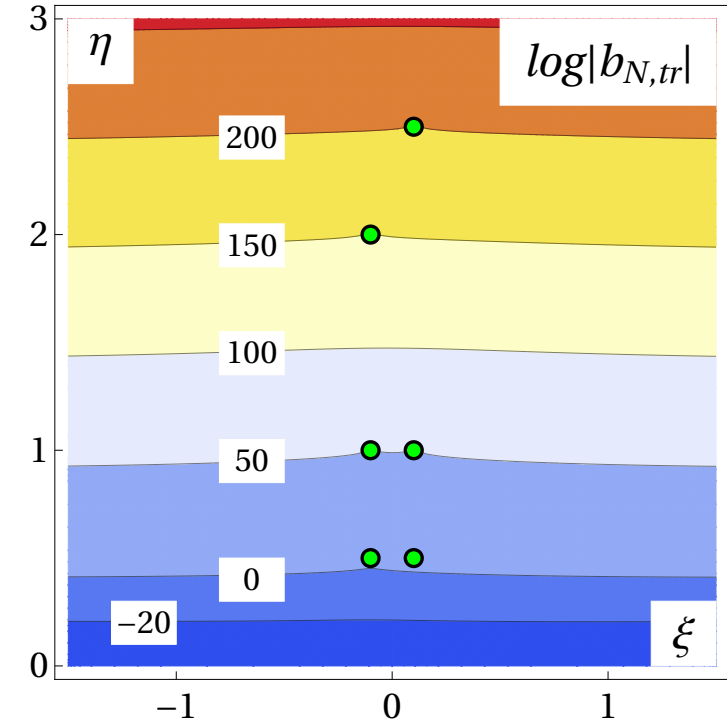
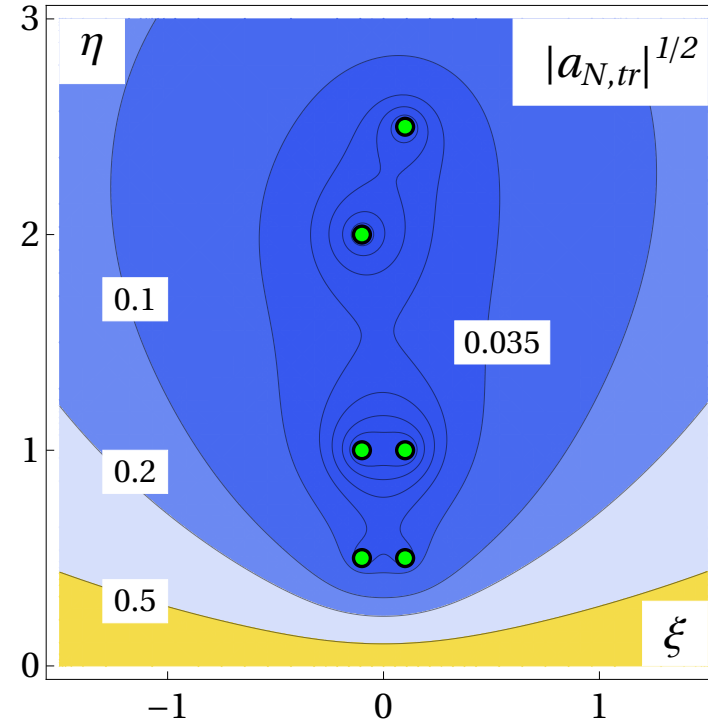
$$r(\xi, t) = r(\xi, 0) e^{-2i\xi^2 t}$$

$$\rho_n(t) = \rho_n(0) e^{-2i\zeta_n^2 t}$$

Поведение коэффициентов рассеяния в ζ -плоскости



6-ти солтонное волновое поле и его коэффициенты рассеяния



Точный результат для бесконечного интервала:

$$a_N(\zeta) = \prod_{k=1}^N \frac{\zeta - \zeta_k}{\zeta - \zeta_k^*},$$

$$b(\zeta_k) = \rho_n a_{tr}'(\zeta) \Big|_{\zeta=\zeta_n}$$

Ответ в главном порядке на интервале L:

$$a_{N,tr}(\zeta) = a_N(\zeta) + o_N, \quad o_N = p(\zeta) o(e^{-2\eta_{\min} L})$$

$$b_{N,tr}(\zeta) = a_N(\zeta) \sum_{k=1}^N \frac{\rho_k e^{-2i(\zeta - \zeta_k)L}}{\zeta - \zeta_k} + o_N$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} b_{N,tr}(\zeta_k) = b(\zeta_k)$$

• Gelash A., Mullyadzhyanov R. Direct scattering transform: catch a soliton if you can // arXiv preprint arXiv:1912.00203, 2019.

Аномальные численные ошибки при решении прямой задачи рассеяния и как с ними бороться

Разложение в окрестности ζ_k :

$$b_{N,tr}(\zeta_k + \delta\zeta_k) \approx \underbrace{\frac{\rho_k}{\zeta_k - \zeta_k^*} \prod_{j \neq k}^N \frac{\zeta_k - \zeta_j}{\zeta_k - \zeta_j^*}}_{\text{I term}} + \underbrace{\delta\zeta_k \left(\sum_{l \neq k}^N \frac{\rho_l e^{-2i(\zeta_k - \zeta_l)L}}{(\zeta_k - \zeta_l)(\zeta_k - \zeta_l^*)} \prod_{j \neq k}^N \frac{\zeta_k - \zeta_j}{\zeta_k - \zeta_j^*} \right)}_{\text{II term}}$$

Поведение ошибок с L :

$$\text{error}[\rho_k](L) \sim \text{term II} \sim e^{2(\eta_k - \eta_{\min})L}$$

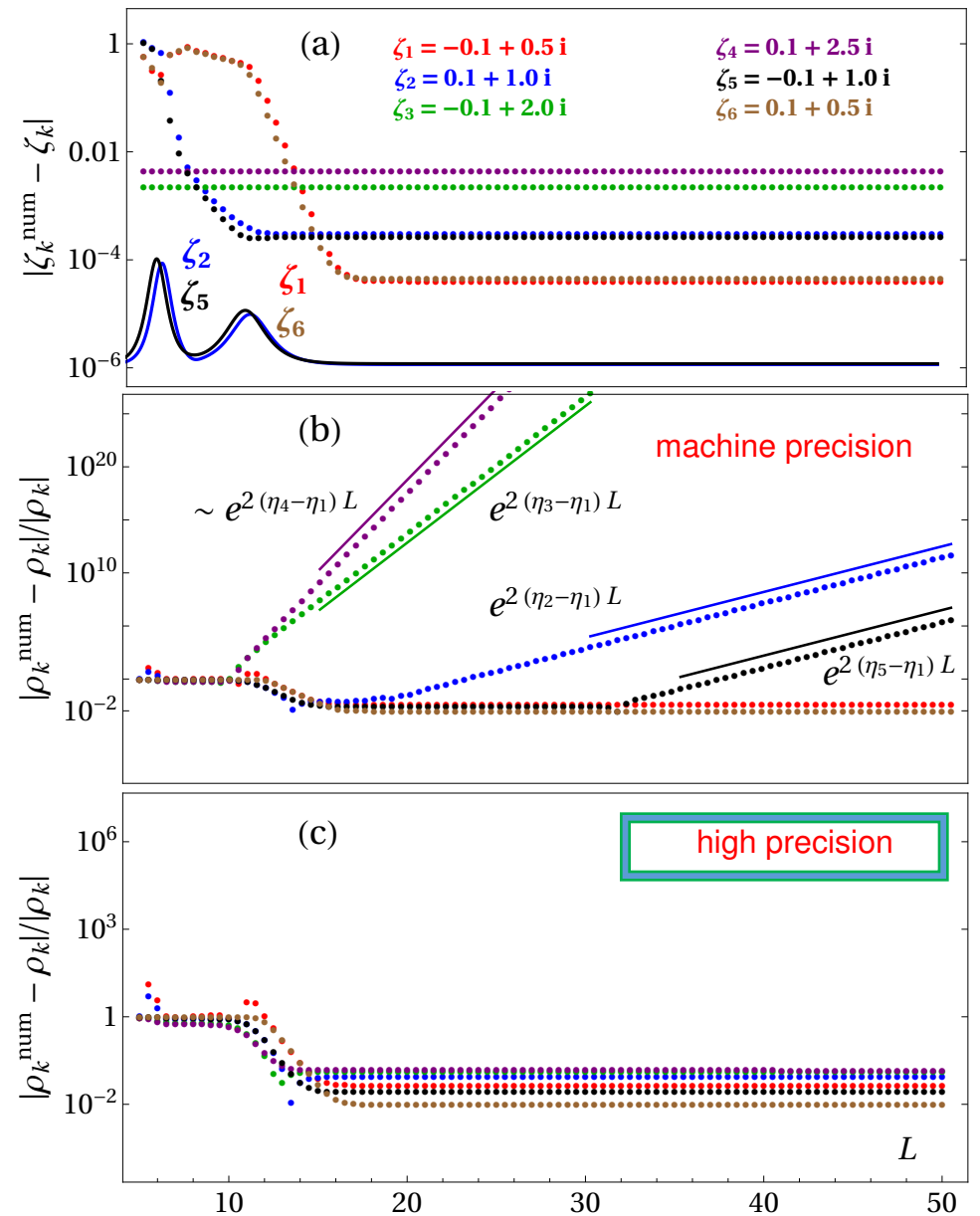
Критические ошибки:

$$\text{term I} \sim \text{term II}$$

Двухсолитонный пример:

$$\delta\zeta_1^{cr} \sim \frac{\rho_1}{\rho_2} (\zeta_1 - \zeta_2) e^{-2i(\xi_2 - \xi_1)L} e^{2(\eta_2 - \eta_1)L}$$

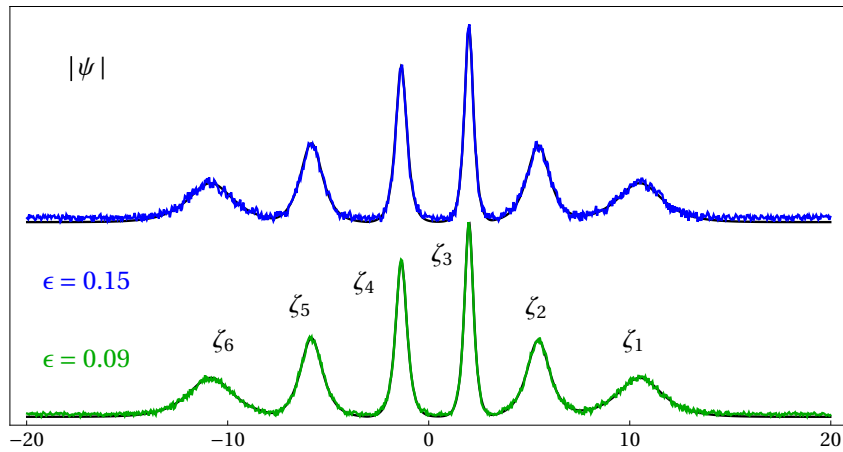
$$\delta\zeta_2^{cr} \sim \frac{\rho_2}{\rho_1} (\zeta_2 - \zeta_1) e^{-2i(\xi_1 - \xi_2)L} e^{2(\eta_1 - \eta_2)L}$$



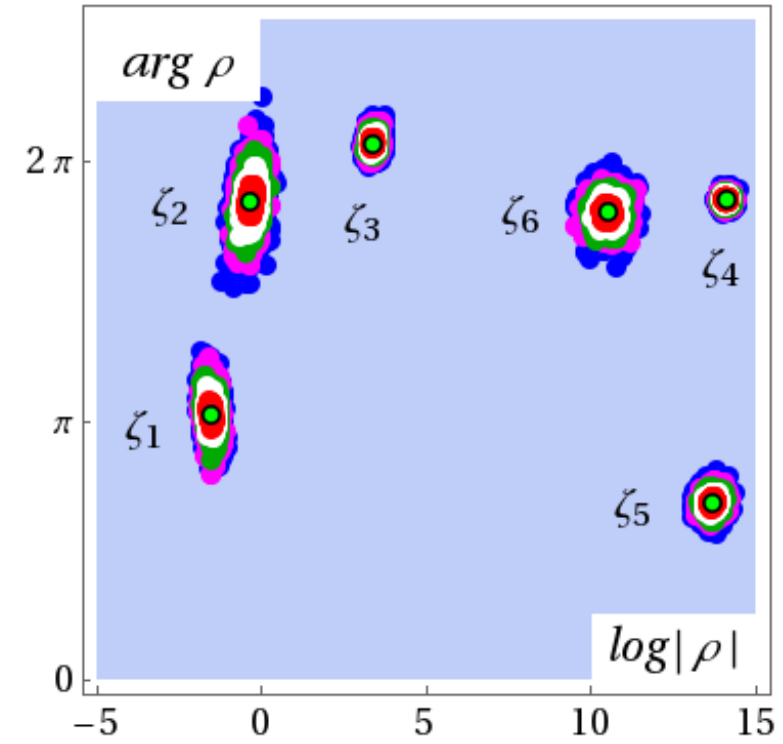
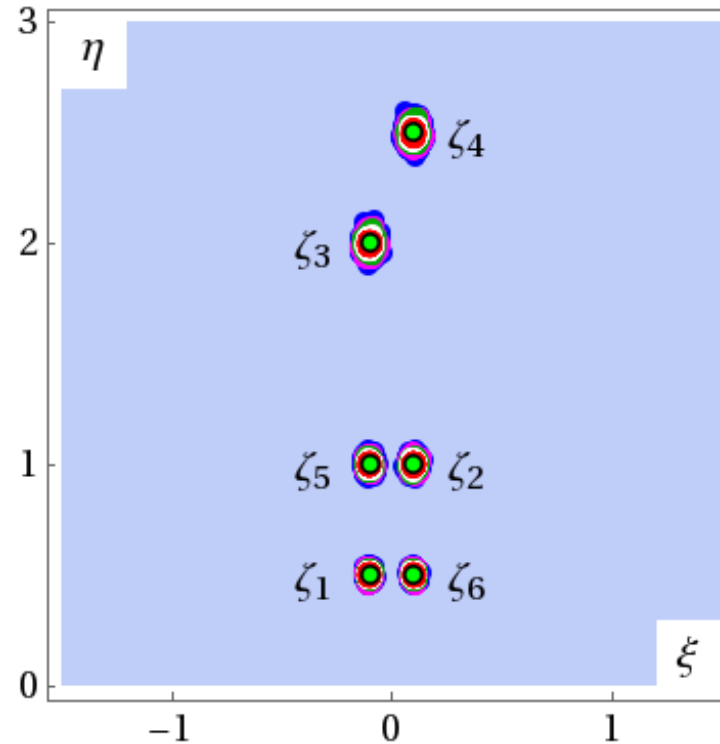
Gelash A., Mullyadzhanov R. Direct scattering transform: catch a soliton if you can // arXiv preprint arXiv:1912.00203. – 2019.

Good news, everyone: прямая задача рассеяния устойчива по отношению к возмущению входного волнового поля!

Неустойчивость всегда может быть подавлена применением арифметики высокой точности.



6-ти солитонное волновое поле + шум

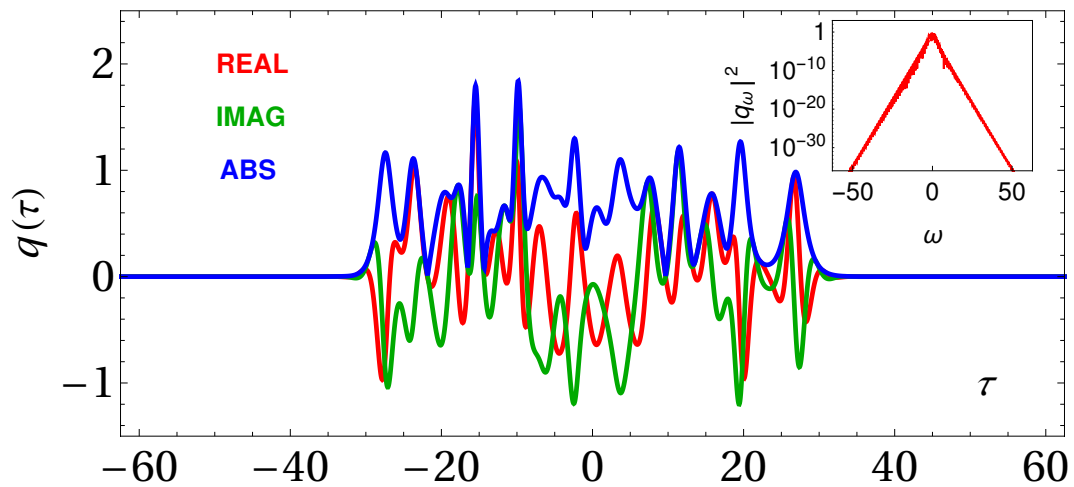


Восстановление данных рассеяния для 2000 случайных реализаций шума

Не очень good news: арифметика высокой точности чрезвычайно ресурсоёмка

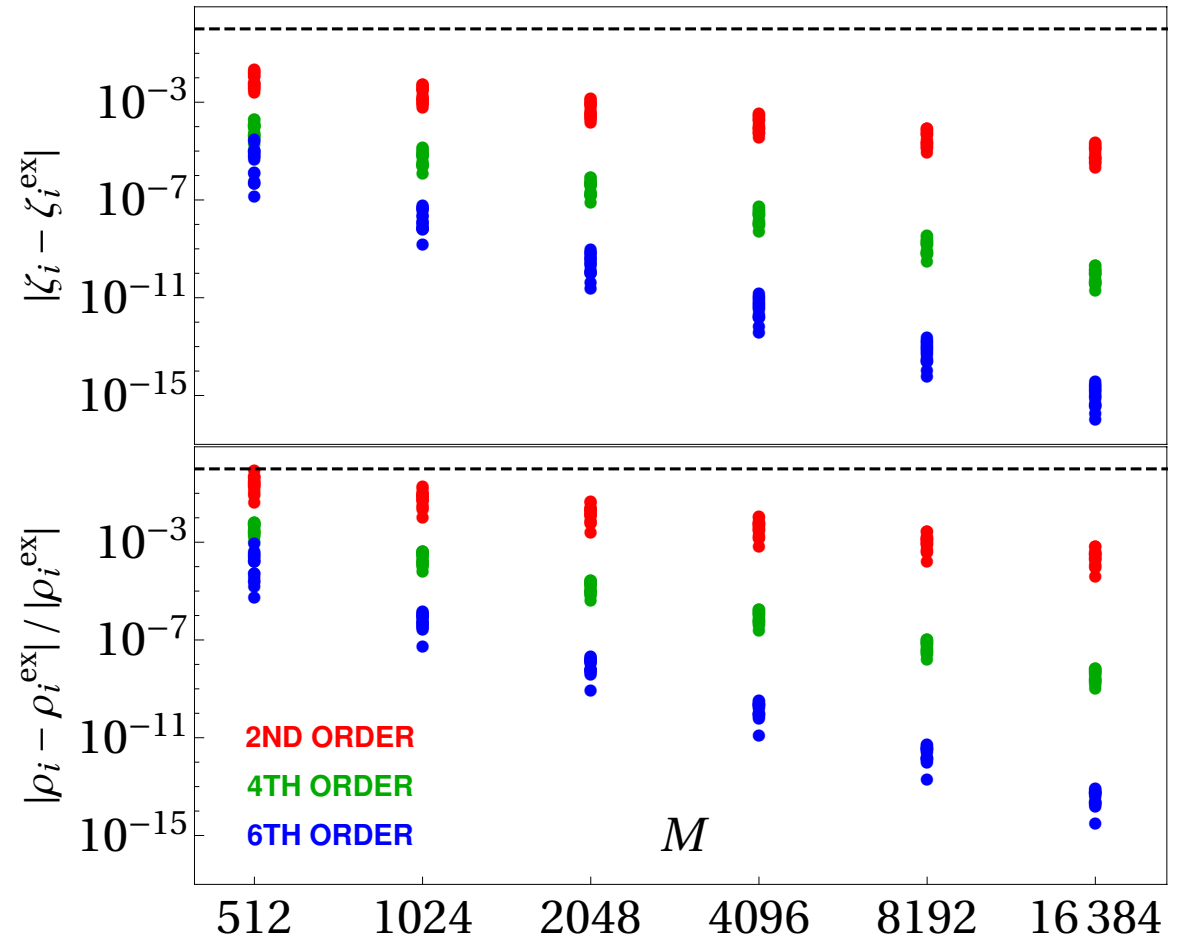
- Gelash A., Mullyadzhyanov R. Direct scattering transform: catch a soliton if you can // arXiv preprint arXiv:1912.00203, 2019.

Еще один источник ошибок прямой задачи рассеяния – рассеяние через протяженные волновые поля



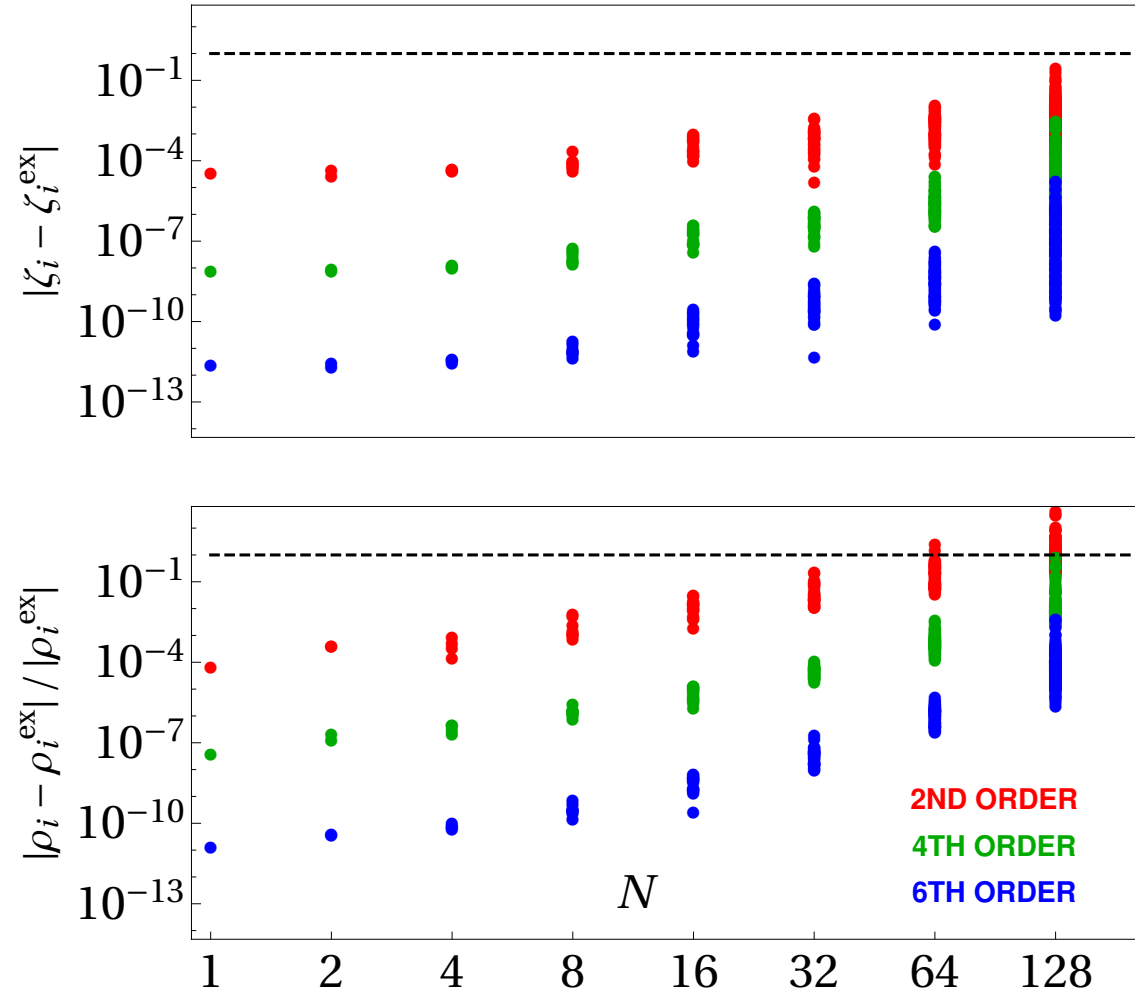
16-ти солитонное волновое поле

R. Mullyadzhanov, and A. Gelash, Direct scattering Transform of large wave packets. Optics Letters 2019.



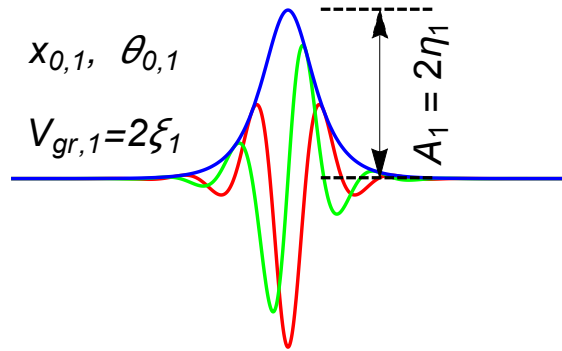
Ошибки определения данных рассеяния в зависимости
от числа точек дискретизации волнового поля

Использование схем высокого порядка становится принципиально необходимым для волновых полей содержащих порядка 100 и более солитонов



Ошибки определения данных рассеяния в зависимости от числа солитонов

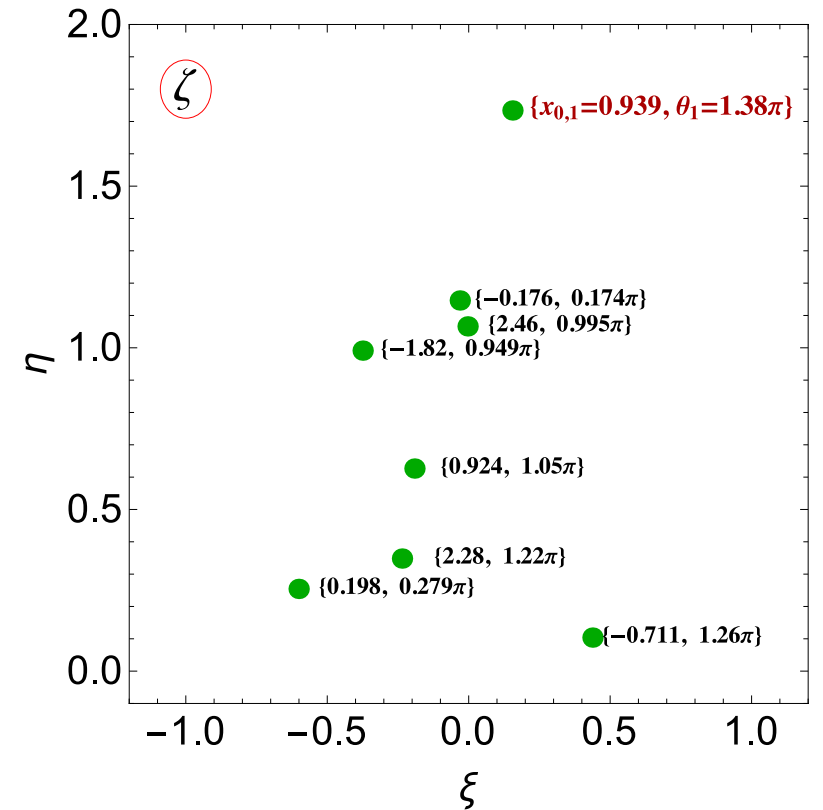
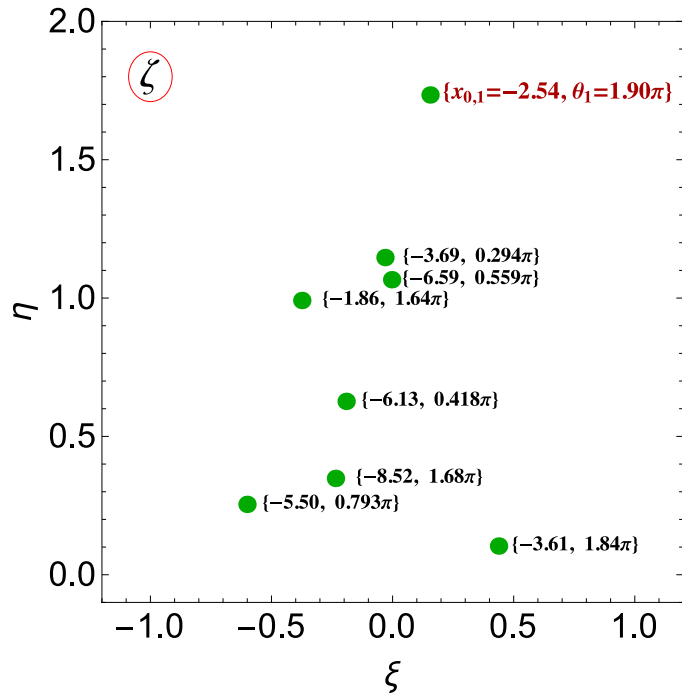
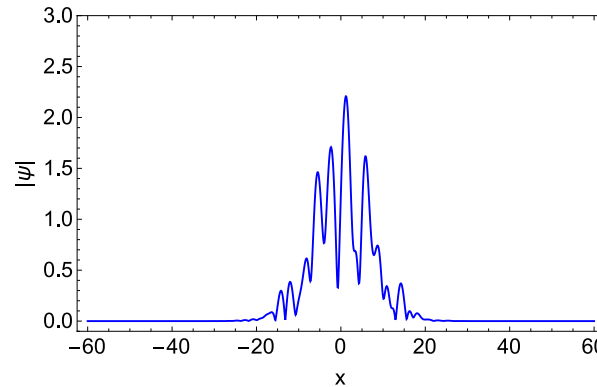
Как понять где расположен солитон по данным рассеяния ?



$$C_k = \frac{1}{\rho_k} \frac{b_N(\zeta_k)}{a'_N(\zeta_k)}$$

$$C_k = e^{i(2\zeta_k x_{0,k} + \theta_k)}$$

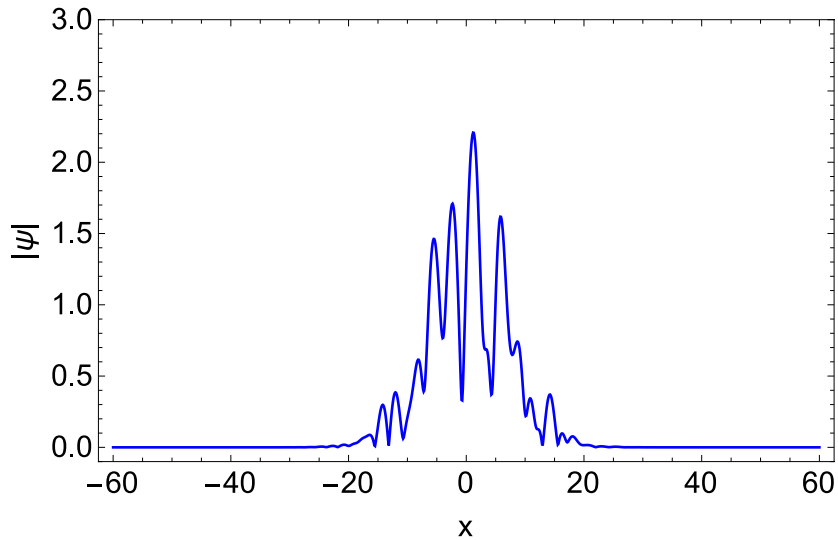
$$\rho_k = iA_k e^{A_k x_{0,k} - i\theta_k}$$



Прямая + обратная задачи рассеяния

Данные рассеяния

$$\left\{ a(\zeta_n) = 0; \quad \rho_n = \frac{b(\zeta)}{a'(\zeta)} \Big|_{\zeta=\zeta_n}; \quad r(\zeta) = \frac{b(\zeta)}{a(\zeta)} \right\}$$



$$\psi(x) = -2A_2^*(x, x)$$

Вычисляем эволюцию по времени (при желании)

$$r(\xi, t) = r(\xi, 0) e^{-2i\xi^2 t}$$

$$\rho_n(t) = \rho_n(0) e^{-2i\zeta_n^2 t}$$

Конструируем ядро интегральных уравнений

$$\Omega(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\xi, t) e^{-i\xi x} d\xi + \sum_{k=1}^N \rho_k(t) e^{-i\xi_k x}$$

Решаем интегральные уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко

$$\begin{aligned} A_1^*(x, s) + \int_{-s}^x A_2(x, \tau) \Omega(s + \tau) d\tau &= 0, \\ -A_2^*(x, s) + \int_{-s}^x A_1(x, \tau) \Omega(s + \tau) d\tau + \Omega(t + s) &= 0. \\ -x \leq s < x. \end{aligned}$$

Обратная задачи рассеяния для мульти-солитонных решений

Строим солитонный газ!

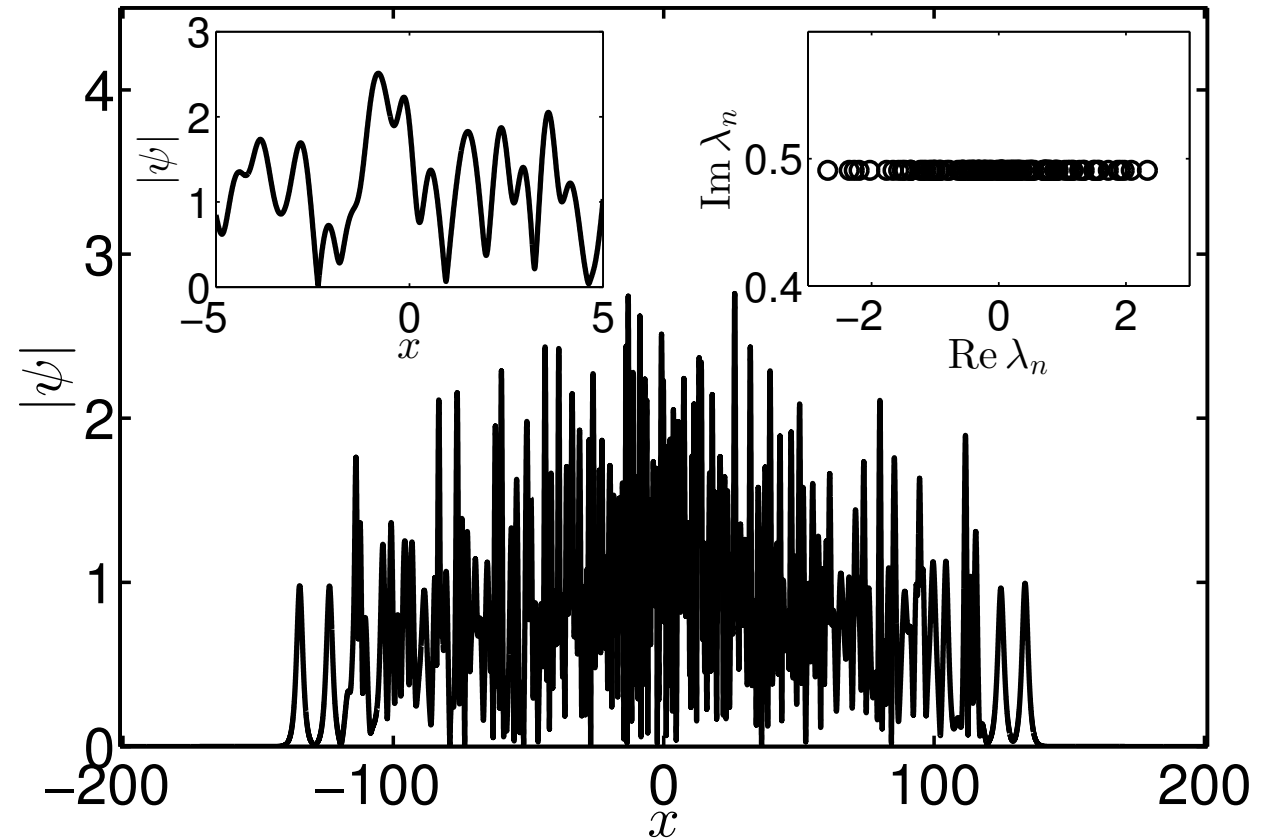
$$\psi_{NSS}(x, t) = 2i \frac{\det \begin{bmatrix} 0 & q_{1,2} & \cdots & q_{N,2} \\ q_{1,1}^* & \frac{(q_1 \cdot q_1^*)}{\zeta_1 + \zeta_1^*} & \cdots & \frac{(q_1 \cdot q_N^*)}{\zeta_1 + \zeta_N^*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{N,1}^* & \frac{(q_N \cdot q_1^*)}{\zeta_N + \zeta_1^*} & \cdots & \frac{(q_N \cdot q_N^*)}{\zeta_N + \zeta_N^*} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} \frac{(q_1 \cdot q_1^*)}{\zeta_1 + \zeta_1^*} & \cdots & \frac{(q_1 \cdot q_N^*)}{\zeta_1 + \zeta_N^*} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(q_N \cdot q_1^*)}{\zeta_N + \zeta_1^*} & \cdots & \frac{(q_N \cdot q_N^*)}{\zeta_N + \zeta_N^*} \end{bmatrix}}$$

$$q_j = (e^{-\phi_j}, e^{+\phi_j})^T$$

$$\phi_j = -i\zeta_j (x - x_{0,j}) - i\zeta_j^2 t - i\theta_j/2$$

Для применения этой точной формулы требуется арифметика высокой точности!

$$x_{0,k} \sim [-2, 2]$$



A.A. Gelash, and D.S. Agafontsev, "Strongly interacting soliton gas and formation of rogue waves", Phys. Rev. E, 98, 042210 (2018)

Статистическое описание нелинейной стадии спонтанной модуляционной неустойчивости

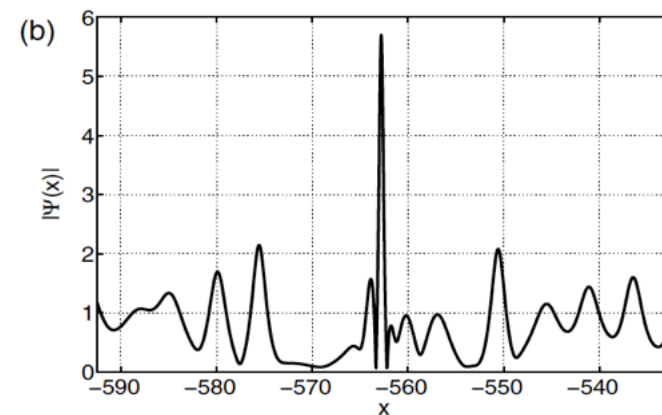
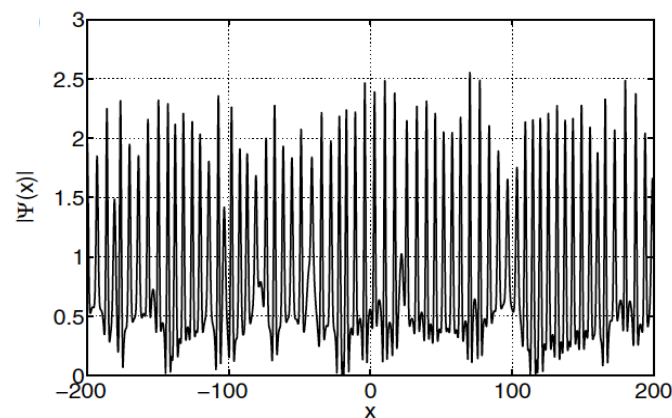
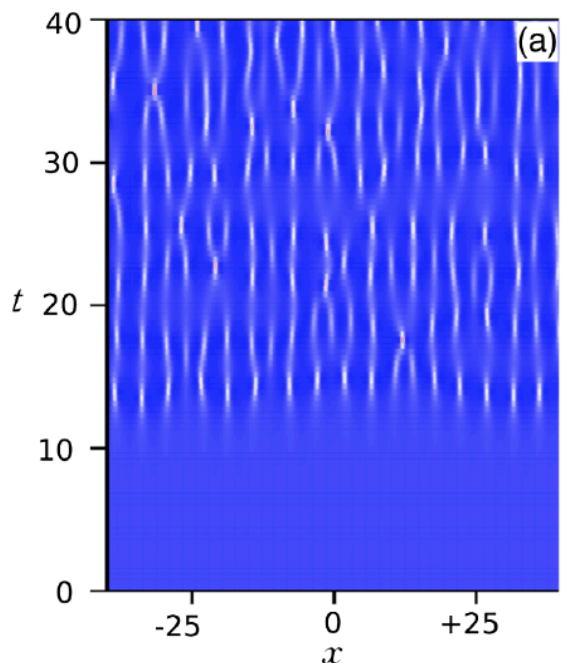
Начальное условие – неустойчивая плоская волна плюс шум:

$$\psi(x, 0) = A + \varepsilon(x), \quad |\varepsilon(x)| \ll A$$

$$\Gamma(k) = k\sqrt{A^2 - k^2/4}.$$

Инкремент неустойчивости

Примеры численных расчетов развития МН:

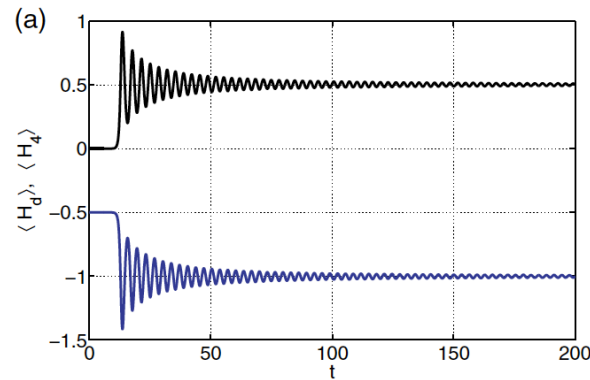
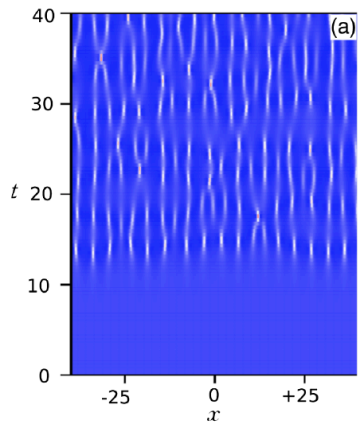


Agafontsev D. S., Zakharov V. E. Integrable turbulence and formation of rogue waves. *Nonlinearity*, 2015

Статистические свойства спонтанной модуляционной неустойчивости в численных экспериментах

- Agafontsev D. S., Zakharov V. E. (2015). Integrable turbulence and formation of rogue waves. *Nonlinearity*, 28(8), 2791.

Переход к статистически стационарному состоянию



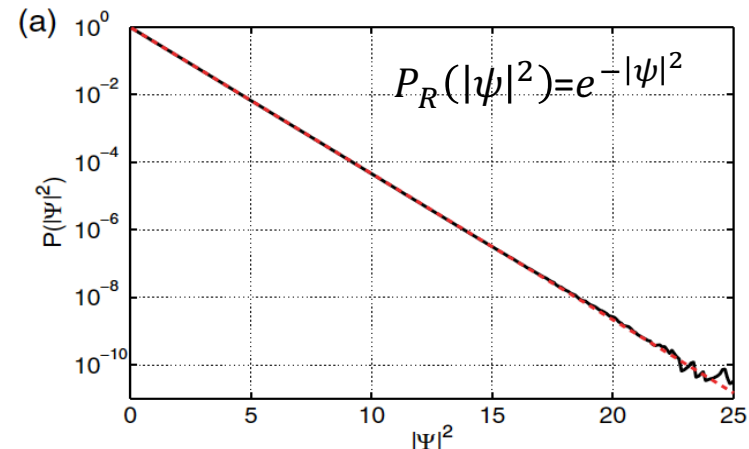
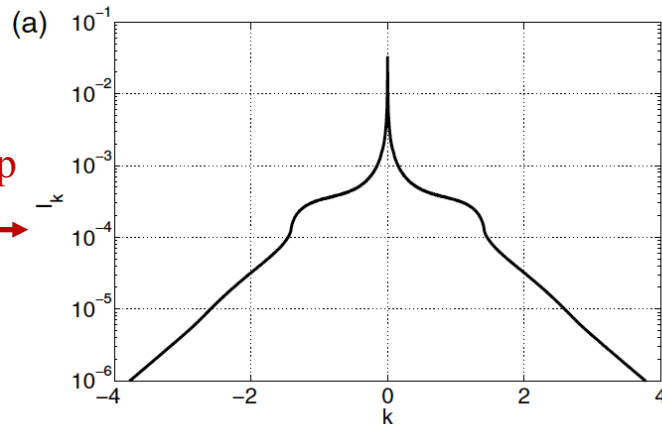
Кинетическая (H_l) и потенциальная (H_{nl}) энергии:

$$\leftarrow H_l = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} |\psi_x|^2 dx,$$

$$\leftarrow H_{nl} = -\frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} |\psi|^4 dx$$

Статистические характеристики статистически стационарного состояния

Средний Фурье спектр



Плотность вероятности волновых амплитуд:



$PDF(I)$

Статистические свойства спонтанной модуляционной неустойчивости в экспериментах по распространению света в оптическом волокне

- Adrien E. Kraych, Dmitry Agafontsev, Stéphane Randoux, and Pierre Suret. Statistical Properties of the Nonlinear Stage of Modulation Instability in Fiber Optics *Phys. Rev. Lett.* 2019

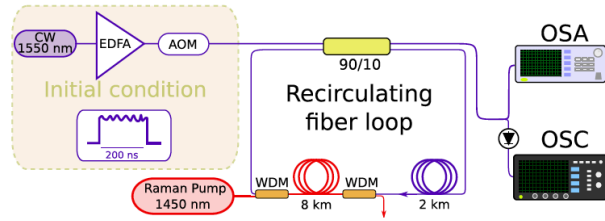


FIG. 1. Schematic experimental setup. The initial field is emitted by a single frequency laser source (cw) amplified by an EDFA. An acousto-optical modulator (AOM) allows us to inject a 200-ns pulse inside the 10-km long recirculating fiber loop. The losses of the cavity are partly compensated by Raman amplification in a 8-km long section of the loop. The signal is observed at each round trip by using ultrafast photodiode, oscilloscope (OSC), and an optical spectrum analyzer (OSA).

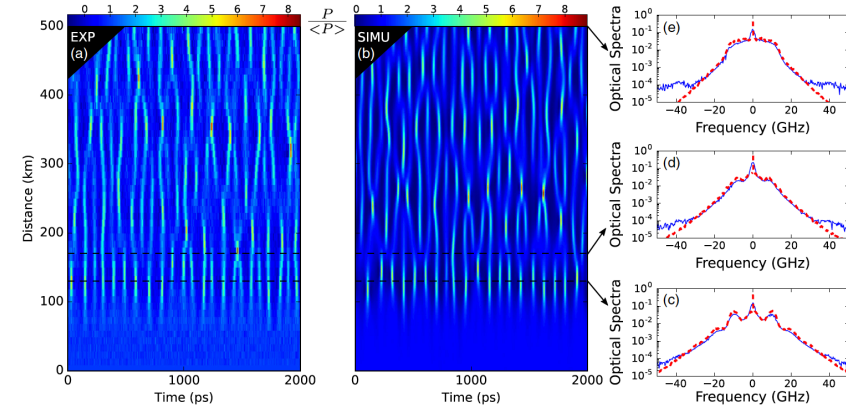


FIG. 2. Typical space-time evolution of the spontaneous modulation instability: (a) experiment and (b) numerical simulation of 1DNLSE (1). [(c)–(e)] Optical spectra recorded in experiments (blue lines) and computed from numerical simulations (dashed red lines) for different propagation distances z : (c) $z = 130$ km, (d) $z = 170$ km, and (e) $z = 500$ km. The parameters used in simulations of Eq. (1) are $\beta_2 = -22$ ps²/km, $\gamma = 1.3$ W⁻¹ km⁻¹, mean optical power of the initial field $P_0 = 43$ mW and $\alpha_{\text{eff}} \approx 1.7 \times 10^{-3}$ km⁻¹. Finite detection bandwidth has been included in the simulation.

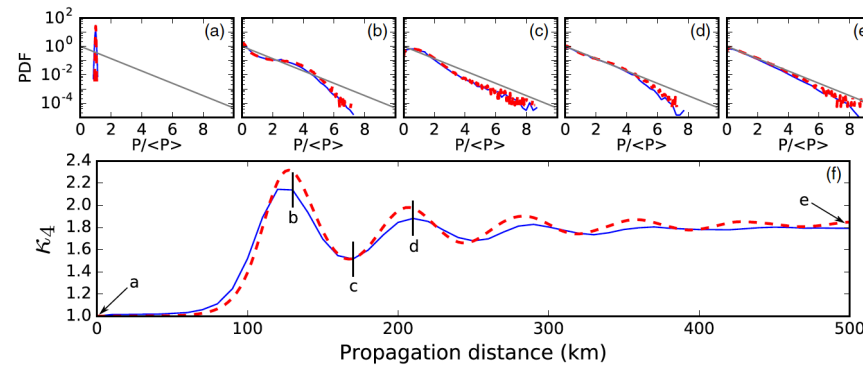
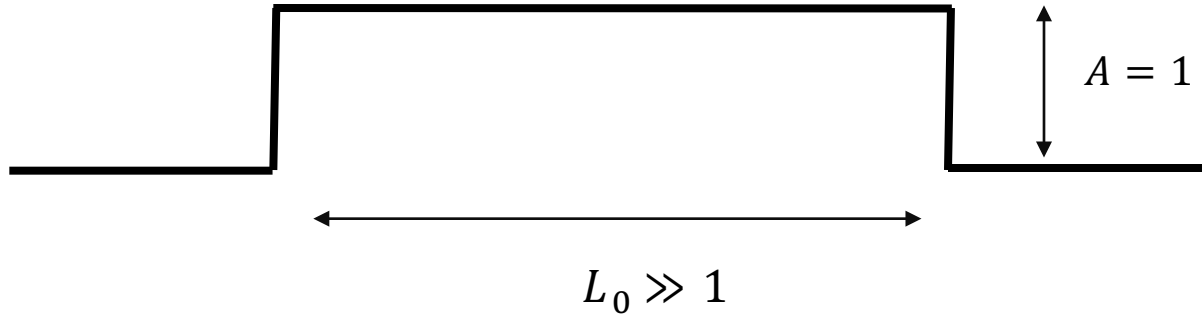


FIG. 3. Single-point statistics of optical power. [(a)–(e)] PDF of the normalized optical power $P/\langle P \rangle$ for different propagation distances (a) $z = 0$ km, (b) $z = 130$ km, (c) $z = 170$ km, (d) $z = 210$ km, and (e) $z = 500$ km. The exponential distribution is shown with thin grey lines. (f) Evolution of the second-order moment $\kappa_4(z) = \langle P(z,t)^2 \rangle / \langle P(z,t) \rangle^2$ of the optical power with propagation distance. Experimental results are plotted in blue lines and numerical simulations of 1DNLSE [Eq. (1), with $\beta_2 = -22$ ps²/km, $\gamma = 1.3$ W⁻¹ km⁻¹, mean initial power $P_0 = 43$ mW, and $\alpha_{\text{eff}} \approx 1.7 \times 10^{-3}$ km⁻¹] are plotted in dashed red lines. Finite detection bandwidth has been included in the simulations.

Задача рассеяния для большого прямоугольного потенциала в квазиклассическом приближении:



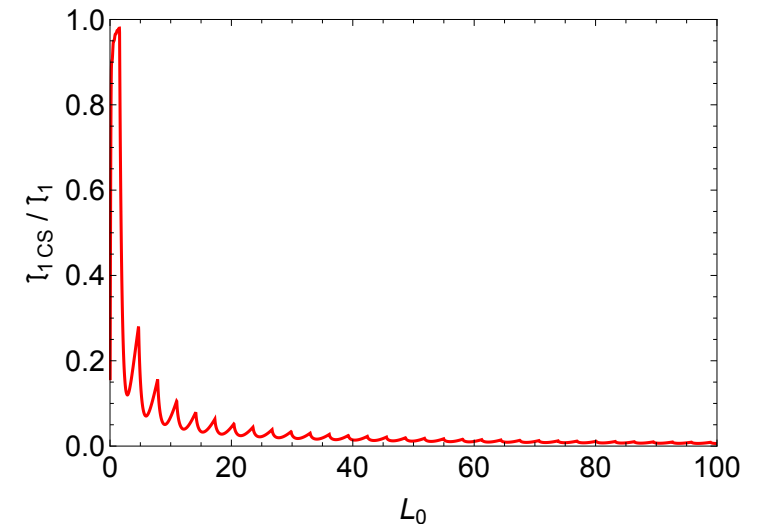
Правило квантования Бора-Зоммерфельда для протяженных медленно меняющихся полей:

$$\lambda_n = \xi_n + i\eta_n \quad \int \sqrt{|\psi|^2 - \eta_n^2} dx = 2\pi(n - 1/2) \quad \frac{\xi}{\eta} \sim N^{-1/2}$$

Получаем связанное состояние - особый класс мульти-солитонных решений при $\xi_n = 0$

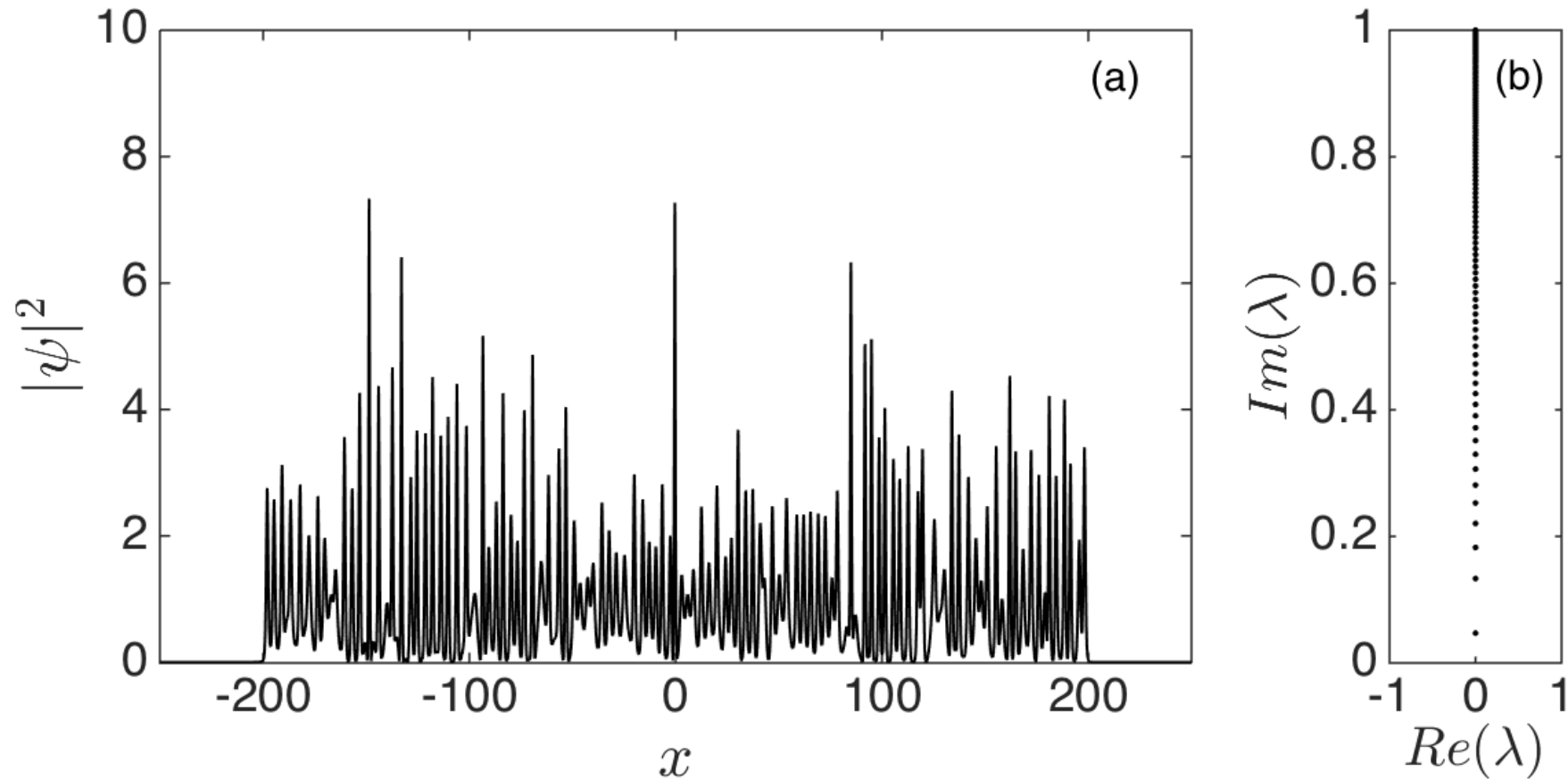
$$\lambda_n = i\eta_n = i \sqrt{1 - \left[\frac{\pi(n - 1/2)}{L_0} \right]^2}, \quad n = 1, 2, \dots, N; \quad N = \text{integer}[L_0/\pi]$$

Доля непрерывного спектра в “массе” волнового поля в зависимости от L_0



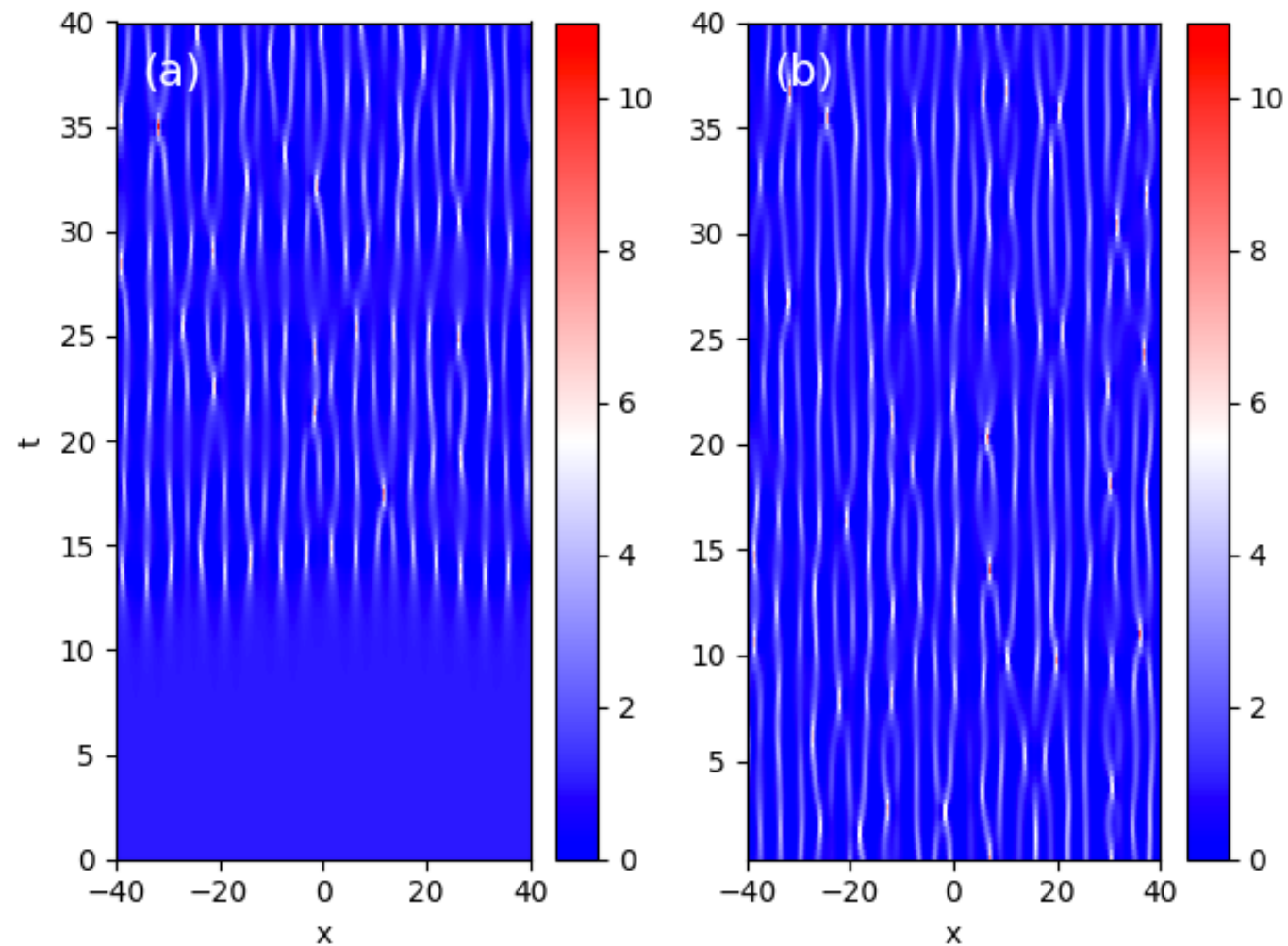
- A. Gelash, D. Agafontsev, V. Zakharov, G. El, S. Randoux and P. Suret, Bound state soliton gas dynamics underlying the noise-induced modulational instability, Physical Review Letters, 2019.

Пример одной реализации 128-SS со случайными фазами солитонов. (a) Профиль интенсивности (b) Собственные числа солитонов вычисленные с помощью правила квантования Бора-Зоммерфельда для $L_0 = N\pi$. Позиции x_{0n} распределены случайно в узком интервале $\sim [-1, 1]$.

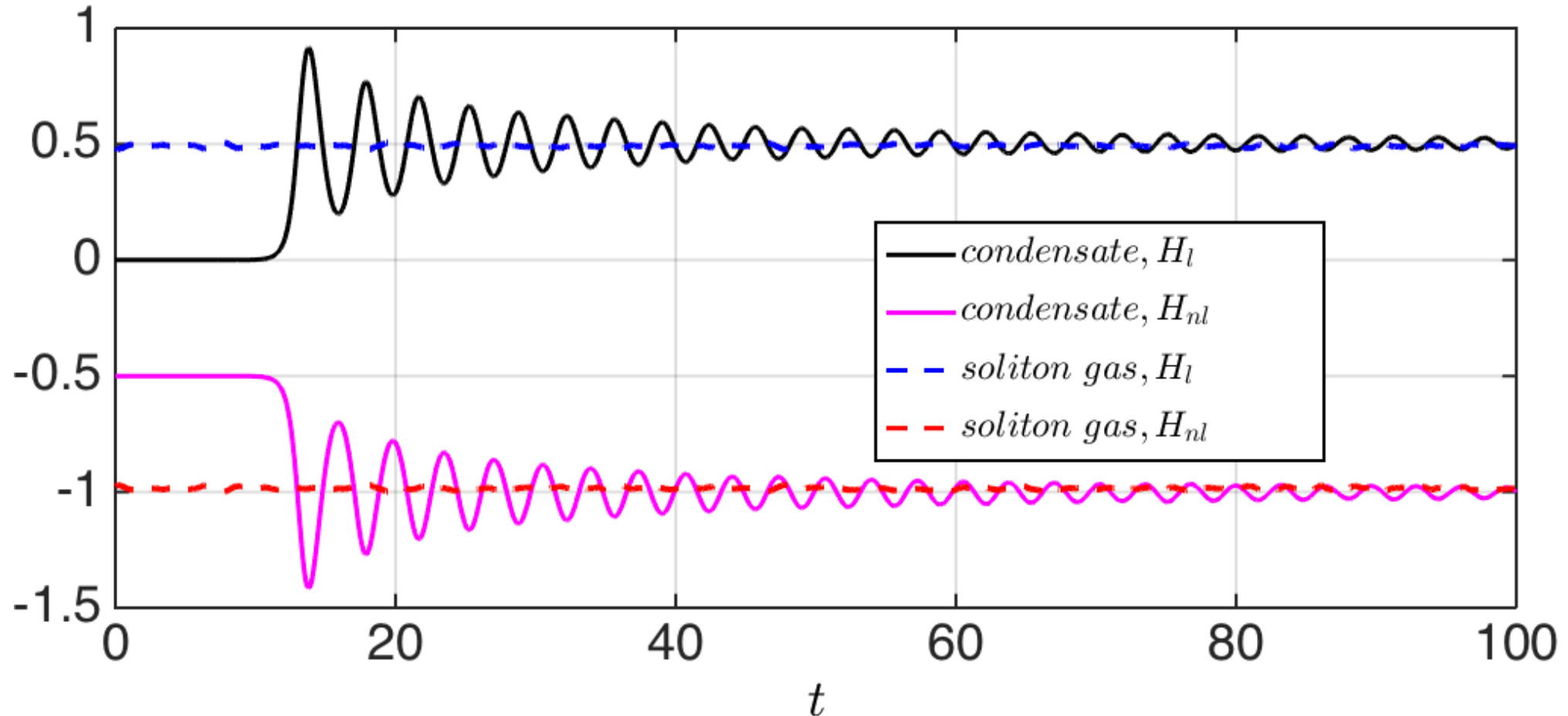


В дальнейшем мы генерируем ансамбли состоящие из 10^3 реализаций таких N-SS со случайными фазами.

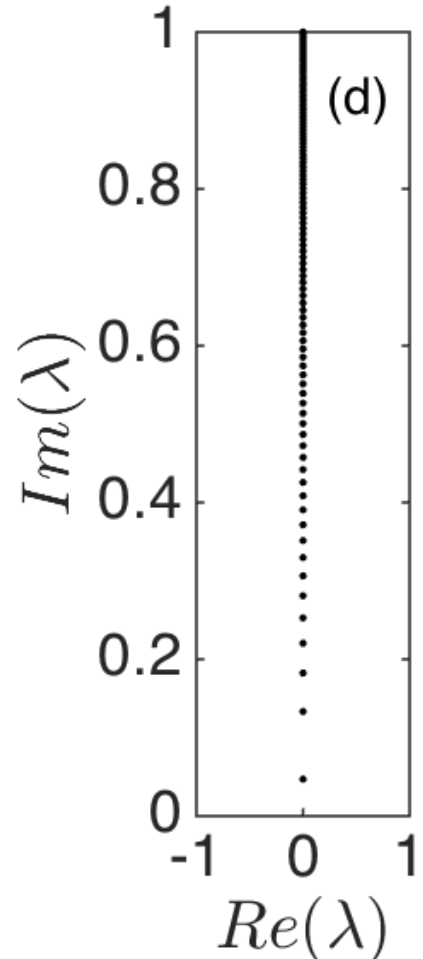
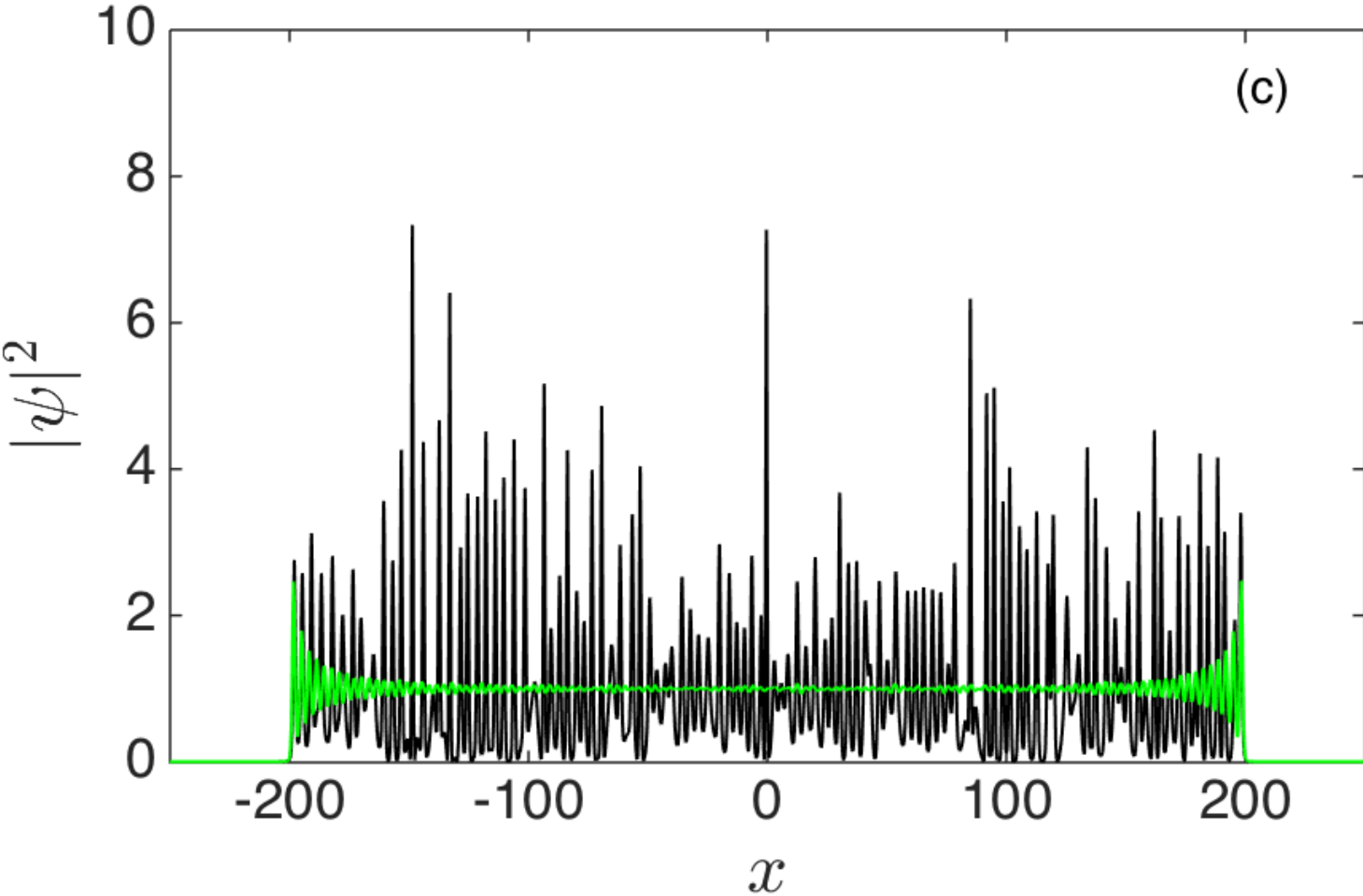
Численный расчет эволюции НУШ: Пространственно-временные диаграммы (a) Развития спонтанной модуляционной неустойчивости (b) Динамики N-SS со случайными фазами (начальное условие с предыдущего слайда).



Эволюция усредненной по ансамблю кинетической $\langle H_l(t) \rangle$ и потенциальной $\langle H_{nl}(t) \rangle$ энергии для развития спонтанной модуляционной неустойчивости (черная и малиновая кривые) и 128-SS решений со случайными фазами (красная и синяя кривая)

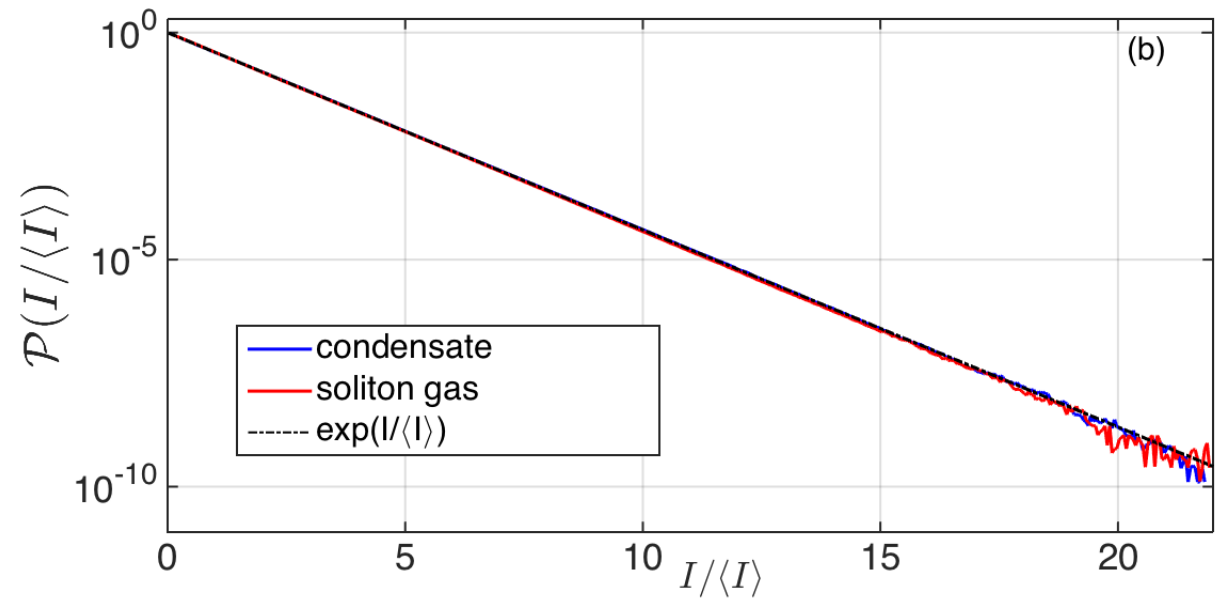
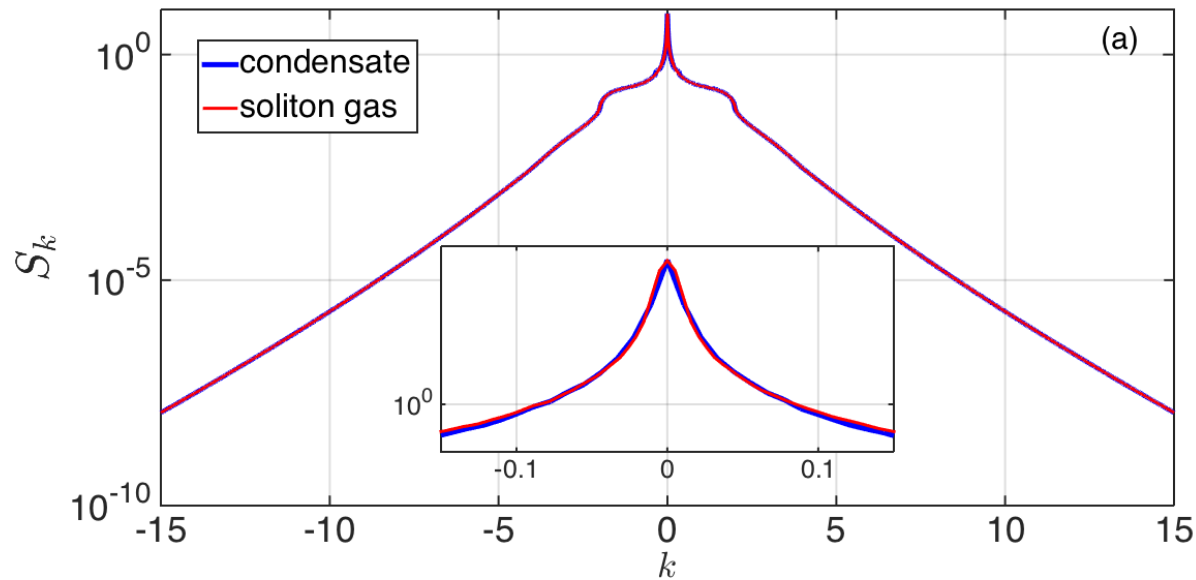


Пример 128-SS (черные линии) в сравнении с пространственным распределением первого статистического момента $\langle |\psi|^2 \rangle$ (зеленые линии)



Сравнение усредненных по ансамблю и времени статистических характеристик асимптотического состояния спонтанной модуляционной неустойчивости и 128-SS.

(a) Средний Фурье спектр (b) PDF



- A. Gelash, D. Agafontsev, V. Zakharov, G. El, S. Randoux and P. Suret, Bound state soliton gas dynamics underlying the noise-induced modulational instability, Physical Review Letters, 2019.

Работы разных коллективов, посвященные численным схемам решения прямой и обратной задач рассеяния:

- G. Boetta and A. R. Osborne, *Journal of Computational Physics* 102, 252 (1992).
- S. Burtsev, R. Camassa, and I. Timofeyev, *Journal of Computational Physics* 147, 166 (1998).
- O. Belai, L. Frumin, E. Podivilov, and D. Shapiro, *J. Opt. Soc. Am. B* 24, 1451 (2007).
- M. I. Youse and F. R. Kschischang, *IEEE Transactions on Information Theory* 60, 4312 (2014).
- L. L. Frumin, O. V. Belai, E. V. Podivilov, and D. A. Shapiro, *Journal of the Optical Society of America B* 32,290 (2015).
- S. K. Turitsyn, J. E. Prilepsky, S. T. Le, S. Wahls, L. L. Frumin, M. Kamalian, and S. A. Derevyanko, *Optica* 4, 307 (2017).
- V. Vaibhav, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 61, 22 (2018).
- A. Vasylichenkova, J. E. Prilepsky, and S. K. Turitsyn, *Optics Letters* 43, 3690 (2018).
- F. J. Garca-Gmez and V. Aref, *Journal of Lightwave Technology* 37, 3563 (2019).
- V. Aref, in *SCC 2019; 12th International ITG Conference on Systems, Communications and Coding* (VDE, 2019)
- P. J. Prins and S. Wahls, *IEEE Access* 7, 122914 (2019).
- S. Medvedev, I. Vaseva, I. Chekhovskoy, and M. Fedoruk, *Optics Letters* 44, 2264 (2019).

Классические работы и монографии

- C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, and R. M. Miura, Physical Review Letters 19, 1095 (1967).
- V. Zakharov and A. Shabat, Soviet Physics JETP 34, 62 (1972).
- S. Novikov, S. Manakov, L. Pitaevskii, and V. Zakharov, Theory of solitons: the inverse scattering method (Springer Science & Business Media, 1984).
- M. J. Ablowitz and H. Segur, Solitons and the inverse scattering transform, Vol. 4 (Siam, 1981).
- A. Osborne, Nonlinear ocean waves (Academic Press, 2010).

Работы, которые послужили основой данной лекции:

- Agafontsev D. S., Zakharov V. E. Integrable turbulence and formation of rogue waves. *Nonlinearity*, 2015.
- A.A. Gelash, and D.S. Agafontsev, Strongly interacting soliton gas and formation of rogue waves, Physical Review E, 2018.
- Adrien E. Kraych, Dmitry Agafontsev, Stéphane Randoux, and Pierre Suret. Statistical Properties of the Nonlinear Stage of Modulation Instability in Fiber Optics, Physical Review Letters, 2019.
- R. Mullyadzhyanov, and A. Gelash, Direct scattering transform of large wave packets, Optics Letters, 2019.
- A. Gelash, D. Agafontsev, V. Zakharov, G. El, S. Randoux and P. Suret, Bound state soliton gas dynamics underlying the noise-induced modulational instability, Physical Review Letters, 2019.
- Gelash A., Mullyadzhyanov R. Direct scattering transform: catch a soliton if you can // arXiv preprint arXiv:1912.00203, 2019.

The background features a series of overlapping bell-shaped curves. The curves are colored in a light blue and a light red/pink. They are arranged in a sequence that creates a sense of depth and movement, with some curves appearing to be in front of others. The curves are centered around the text.

Спасибо за внимание!