



ЭМПИРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КЛИМАТА

Александр Фейгин

*Федеральный исследовательский центр
«Институт прикладной физики РАН»*



КЛИМАТ И ПОГОДА

ПОГОДА:

текущее («мгновенное») состояние окружающей среды,
задаваемое набором характеристик
(температура, влажность, атмосферное давление и др.)

КЛИМАТ:

Многолетний (порядка нескольких десятилетий) режим погоды

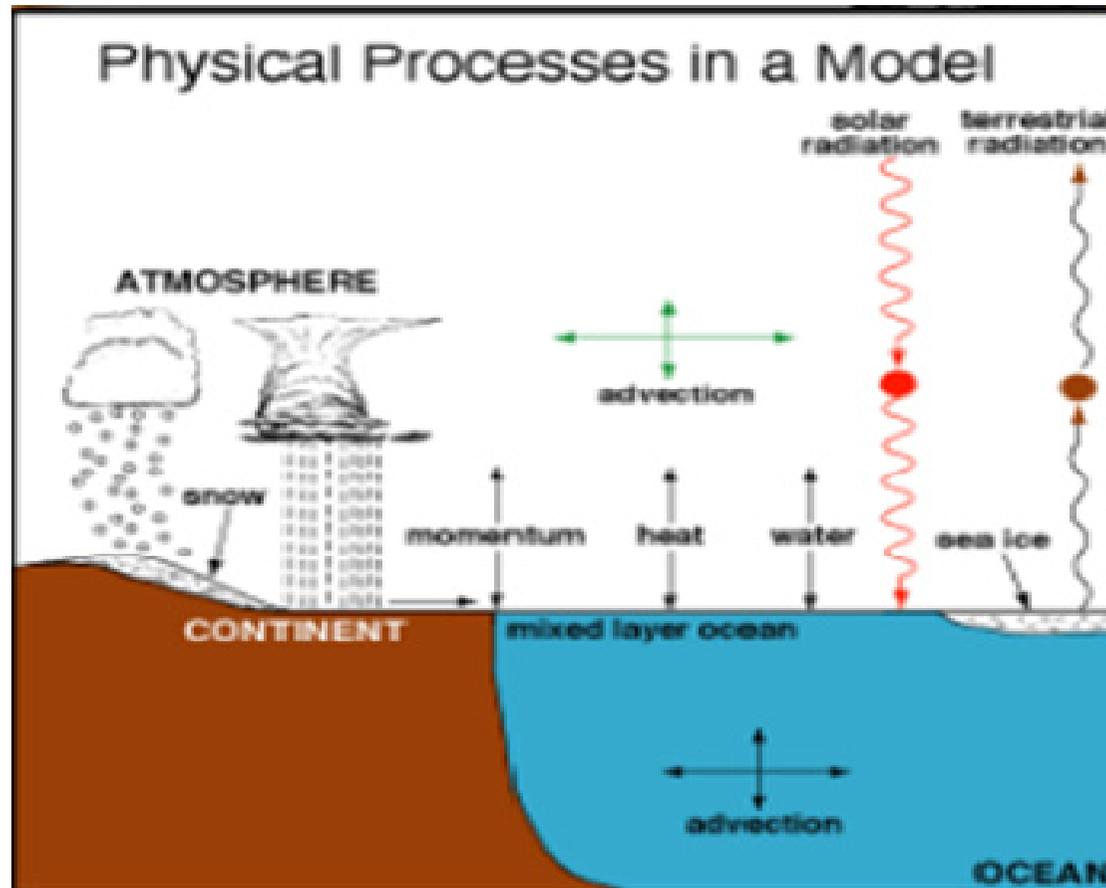


Климат – это статистические характеристики погоды

КЛИМАТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ЗЕМЛИ

КОМПОНЕНТЫ:

Атмосфера + Гидросфера + Суша + Криосфера + Биосфера



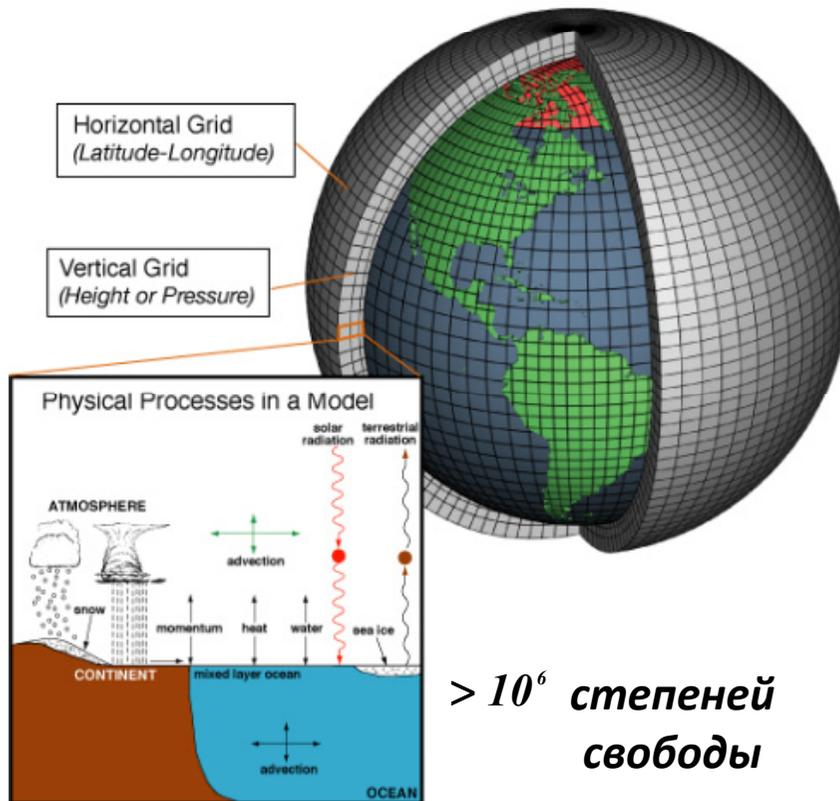


ОСОБЕННОСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ КЛИМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ИХ МОДЕЛИРОВАНИЯ:

- *Климатический эксперимент был спланирован без нашего участия, и его цель нам неизвестна*
 - *Возможно, мы начали влиять на его протекание*
- *Климатические прогнозы основаны на использовании моделей, в первую очередь – моделей из первых принципов*
- *Невозможна постановка нацеленного эксперимента: единственным критерием оценки адекватности существующих моделей является их способность воспроизводить данные наблюдений*

КЛИМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Модели «из первых принципов»



> 10^6 степеней свободы

+

-

Построены на основании физических законов («*первых принципов*»)

Способны воспроизводить динамику климата при различных условиях

Пригодны для построения долгосрочного прогноза

Зависят от способа описания мелкомасштабных процессов

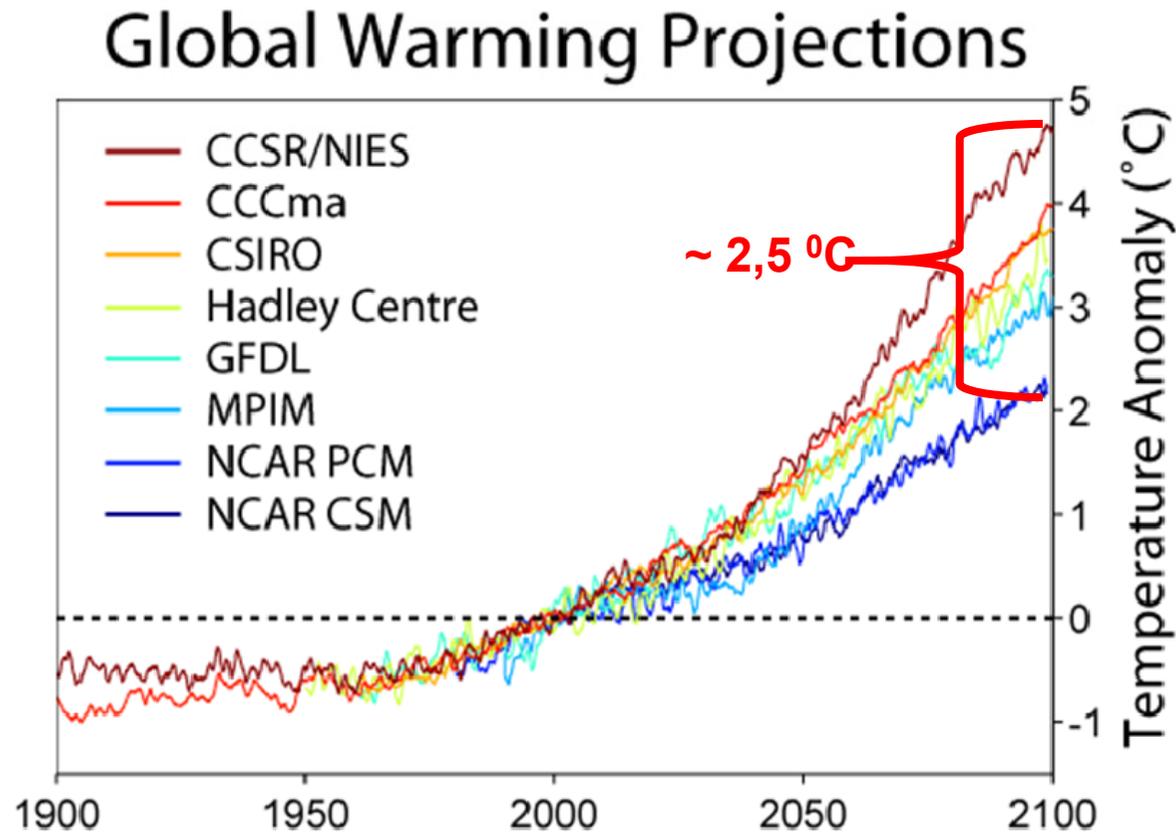
Чувствительны к вариациям начальных и граничных условий

Не связаны напрямую с данными измерений

Невозможно сравнение «устройства» модели и системы



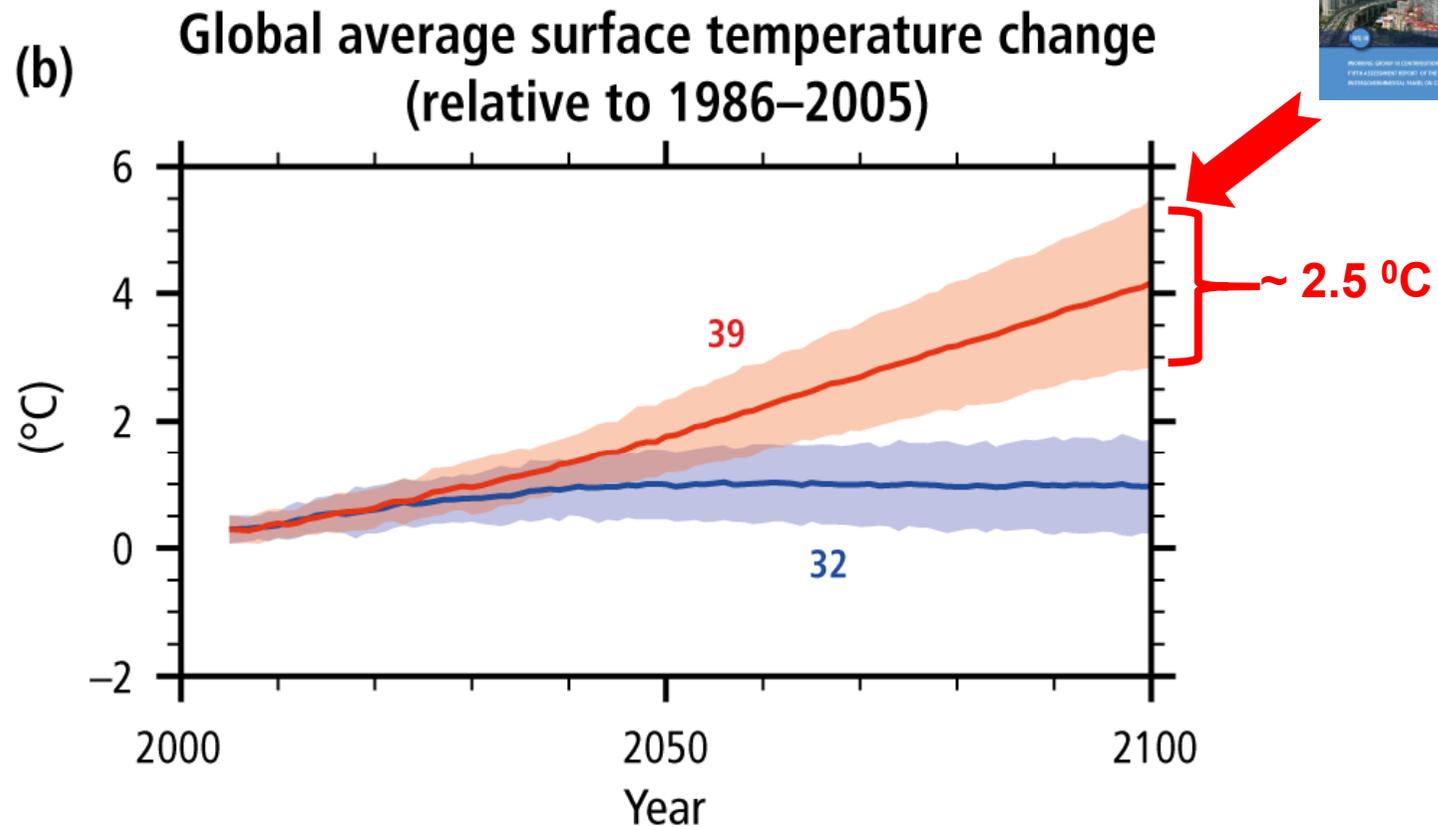
Прогноз глобального потепления на основе больших климатических моделей (2000 г.)



This figure was created by **Robert A. Rohde** from published data
http://www.globalwarmingart.com/wiki/File:Global_Warming_Predictions_png



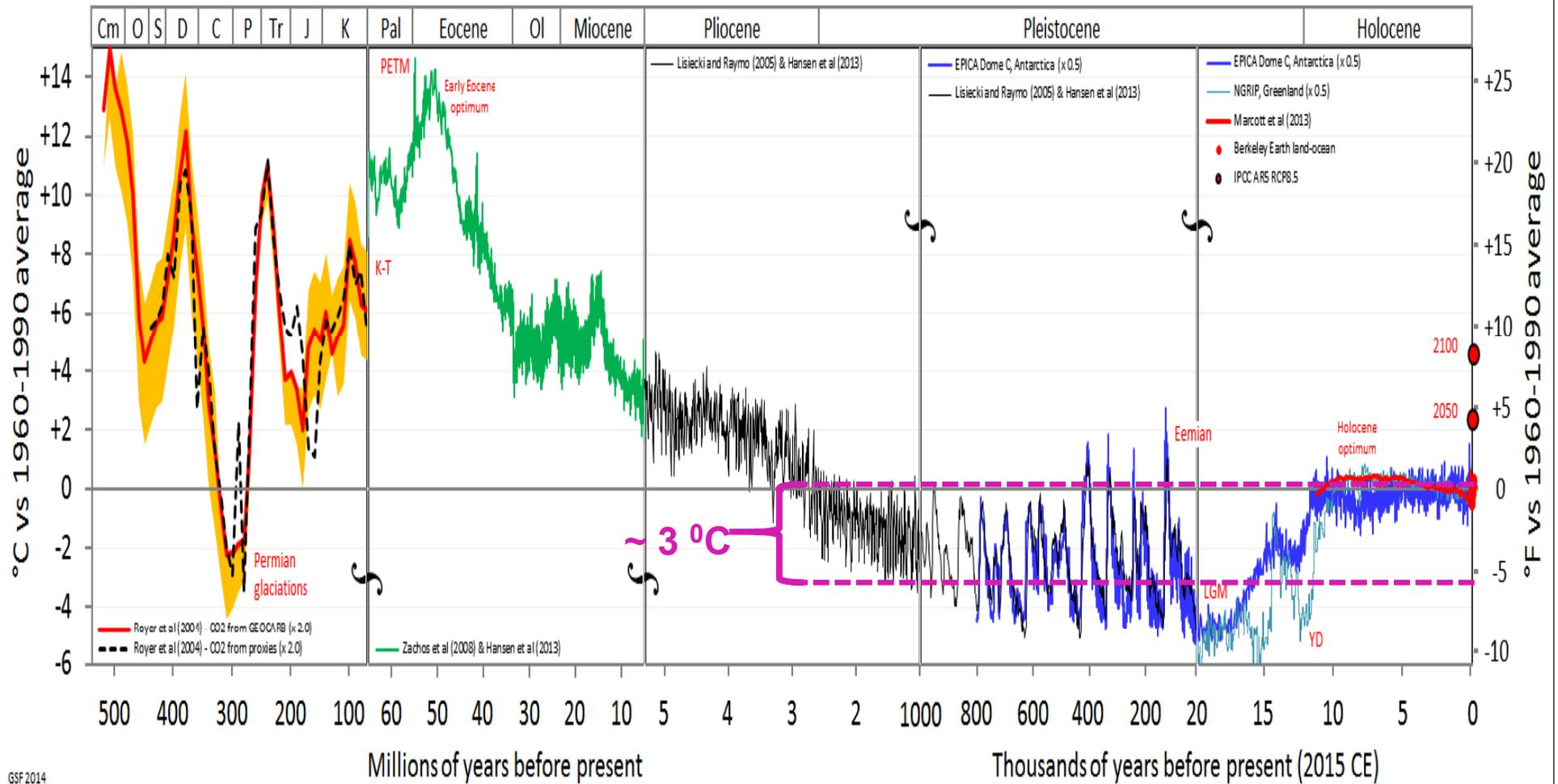
Прогноз глобального потепления на основе больших климатических моделей (БКМ) (2005г.)



Прогноз изменения средне годичной глобальной поверхностной температуры на период 2006–2100 (по отношению к периоду 1986–2005) на основе ансамбля БКМ в рамках проекта CMIP5. Сплошная линия – среднее по ансамблю, цветной фон – соответствующий 90% доверительный интервал.



Temperature of Planet Earth



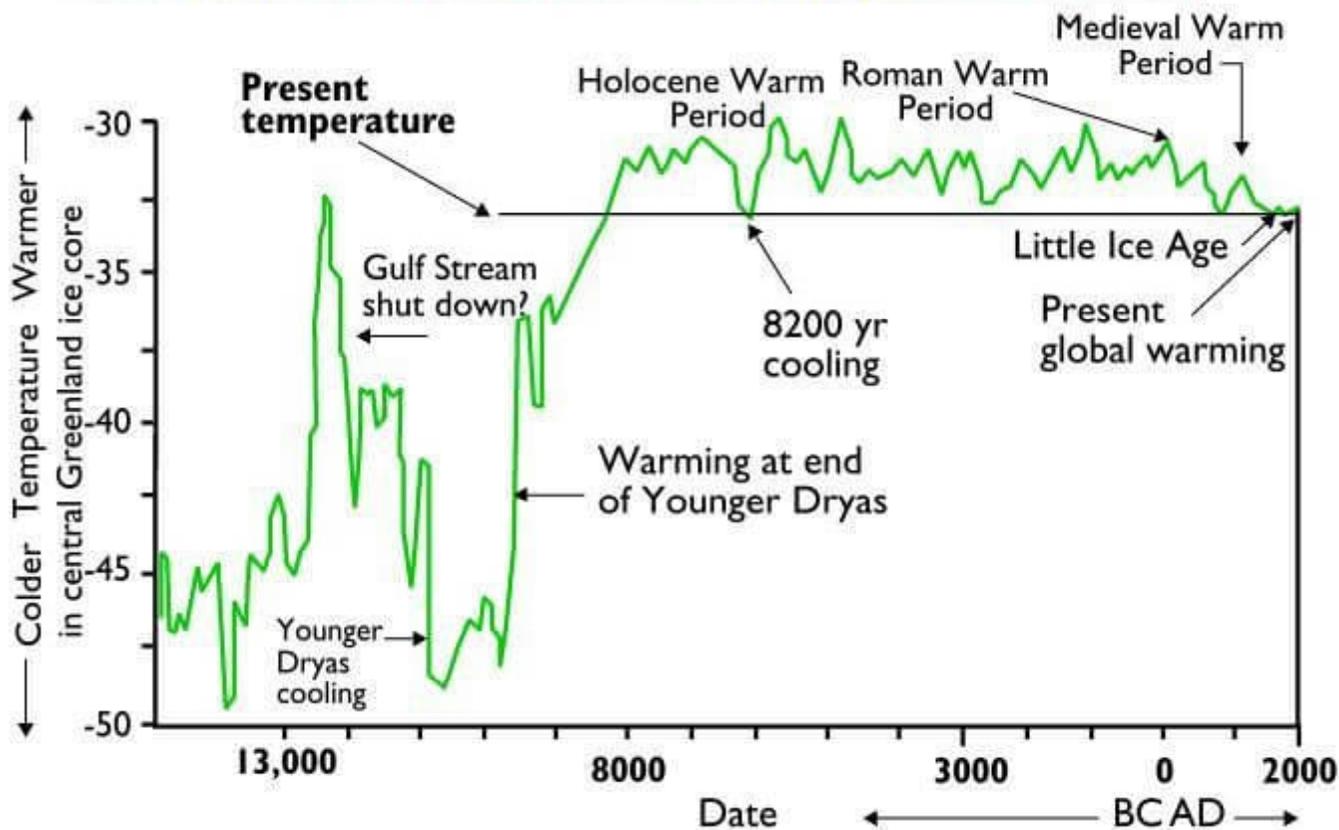
GSF 2014



Климатическая система Земли: пример критического перехода

Изменение температур в послеледниковый период по данным ледяных кернов Гренландии

TEMPERATURE CURVE LAST FIFTEEN THOUSAND YEARS





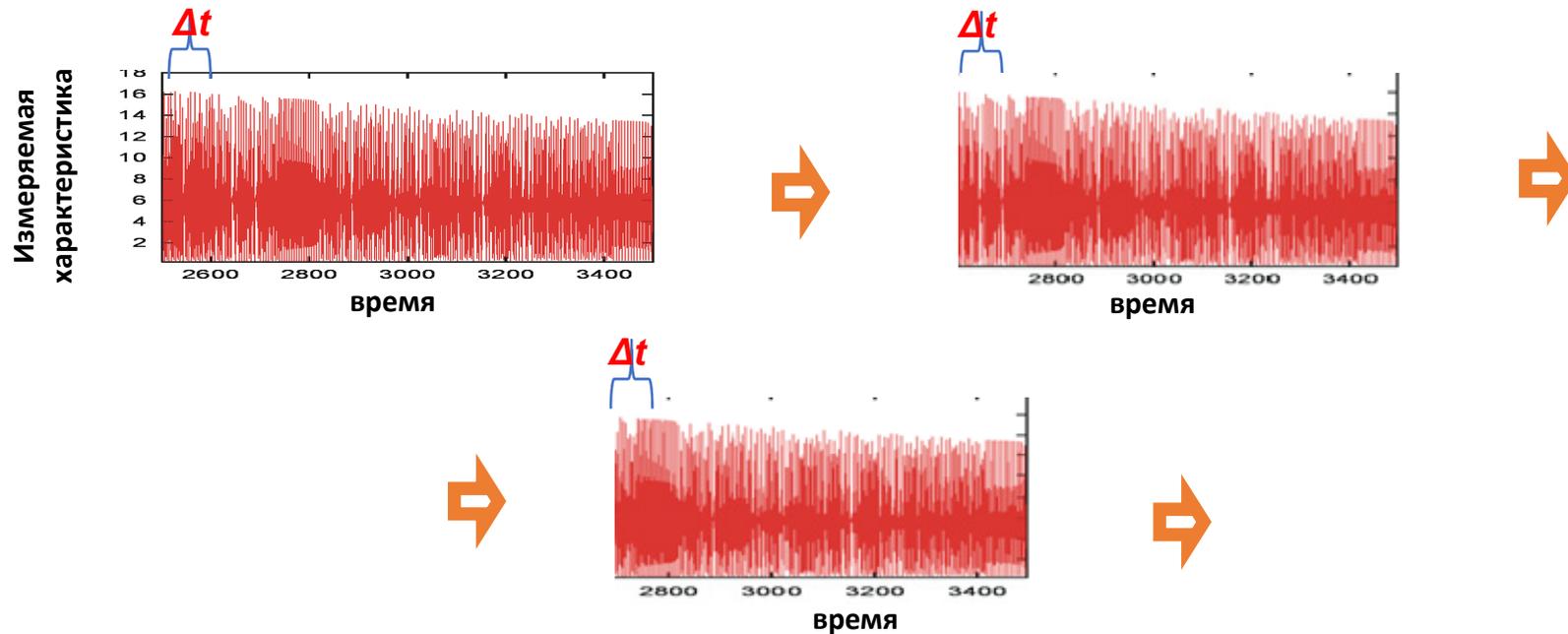
Эмпирическая модель:

- *Оператор эволюции* (модель, описывающая изменение состояние системы с течением времени), *построенный путем прямого анализа данных*



РЕКОНСТРУКЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО ВРЕМЕННОМУ РЯДУ

МЕТОД: *Реконструкция фазовой траектории* (Такенс, 1981):

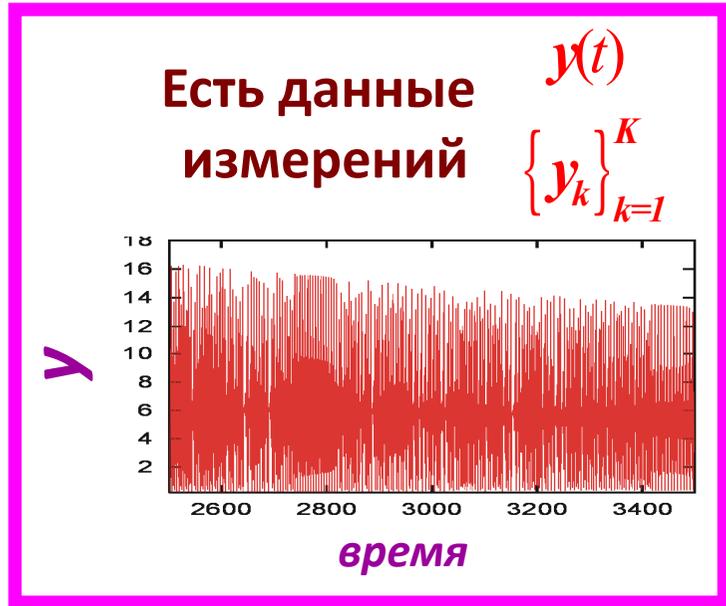


$$d_E \geq 2d_s + 1$$

$$\vec{Y}(t_k) = \{y(t_k), y(t_k + \Delta t), \dots, y(t_k + (d_E - 1)\Delta t)\}$$



ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ:



Исследовать устройство системы и предсказать ее эволюцию, в том числе - возможные изменения качественного ее поведения («*бифуркации*»)



Провести экстраполяцию за пределы исходного временного ряда



Построить параметризованную (неавтономную) модель оператора эволюции:

$$\vec{Y}(t_n) = \varphi(\vec{Y}(t_{n-1}), \vec{\mu}(t_{n-1}))$$

«хорошо» воспроизводящую наблюдаемую динамику



ОСОБЕННОСТИ КЛИМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ И КЛИМАТИЧЕСКИХ ДАННЫХ:

- широкий спектр временных масштабов,
- распределенность в пространстве,
- ограниченность данных во времени,
 - дискретность данных



Реконструкция динамической системы

по временному ряду:

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ НА РЕКОНСТРУКЦИЮ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

1.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ДЛИНЫ ВРЕМЕННОГО РЯДА:

МАЛОСТЬ МАКСИМАЛЬНО ВОЗМОЖНОЙ РАЗМЕРНОСТИ
РЕКОНСТРУИРОВАННОГО ПРОСТРАНСТВА

($\sim \log\{\text{длина временного ряда}\}$)

Невозможность построить модель адекватной системе
(высокой размерности)

2.

РАСПРЕДЕЛЕННОСТЬ СИСТЕМЫ В ПРОСТРАНСТВЕ:

ВЫСОКАЯ (ОГРОМНАЯ) РАЗМЕРНОСТЬ ДАННЫХ

(\sim числу узлов пространственной сетки, умноженному на количество измеряемых характеристик)

Невозможность воспроизвести высокоразмерную
пространственно-временную изменчивость с помощью
модели низкой размерности



ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ НА РЕКОНСТРУКЦИЮ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ: ВОЗМОЖНЫЕ ПУТИ ПРЕОДОЛЕНИЯ

1. **МАЛОСТЬ МАКСИМАЛЬНО ВОЗМОЖНОЙ РАЗМЕРНОСТИ МОДЕЛИ
+ ДИСКРЕТНОСТЬ ДАННЫХ ВО ВРЕМЕНИ:**



Построение модели в форме низкоразмерной *стохастической*
динамической системы (*random dynamical system*)

2. **ВЫСОКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ДАННЫХ :**



Представление исследуемой системы в виде небольшого числа
пространственно-временных структур («мод»), дающих
основной вклад в наблюдаемую динамику

ВАЖНОЕ ОБСТОЯТЕЛЬСТВО:

ОБЕ ЗАДАЧИ ЯВЛЯЮТСЯ НЕКОРРЕКТНЫМИ ОБРАТНЫМИ



**Необходимы адекватные алгоритмы оптимизации и обучения
как при построении модели, так и при декомпозиции данных**



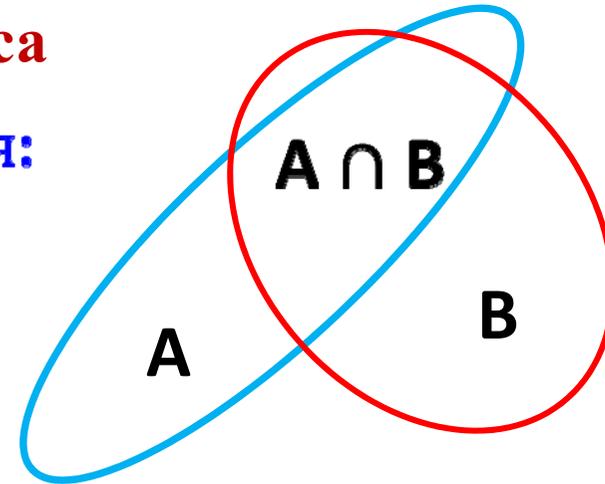
БАЙЕСОВ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Теорема Байеса

A и B – случайные события:

Условная вероятность:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ и } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



Теорема Байеса:
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

a и b – случайные величины,

$p(a, b)$ – совместная плотность вероятности (п.в.)

Условная п.в.: $p(a|b) = \frac{p(a, b)}{p(b)}$; Теорема Байеса: $p(a|b) = \frac{p(b|a)p(a)}{p(b)}$

Нормировка: $\int p(a|b) da = 1 \rightarrow p(a|b) = \frac{p(b|a)p(a)}{\int p(b|a)p(a) da}$



ПОИСК ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ

- Пусть \mathbf{x} и $\boldsymbol{\mu}$ — переменные некоторой модели $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \dots)$
 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ — наблюдаемые переменные (данные)
 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^M$ — ненаблюдаемые переменные (параметры)
 $p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu})$ — “правдоподобие” модели (likelihood)
- Пусть задана **априорная п.в.** $p(\boldsymbol{\mu})$, описывающая неопределенность параметров модели при отсутствии наблюдений
- Тогда теорема Байеса позволяет вычислить **апостериорную п.в.** параметров (после наблюдений):

$$p(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu})p(\boldsymbol{\mu})}{p(\mathbf{x})} = \frac{p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu})p(\boldsymbol{\mu})}{\int p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu})p(\boldsymbol{\mu})d\boldsymbol{\mu}}$$

- Точка (или окрестность) максимума $\boldsymbol{\mu}^* = \underset{\boldsymbol{\mu}}{\operatorname{argmax}} p(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{x})$ может быть использована как оценка ненаблюдаемых параметров модели с учетом наблюдений \mathbf{x}



Байесов подход к решению обратных задач

ПОИСК ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ

- Пример: наблюдаемые данные $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ сгенерированы “системой”

$$y_n = 1 - x_n^2 + 0.7\xi_n, \quad \xi_n \sim \mathcal{N}(0,1), x_n \in [-1,2]$$

- Модель:

$$y_n = f(x_n) + \sigma\xi_n, \quad \xi_n \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$f(x_n) := a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2$$

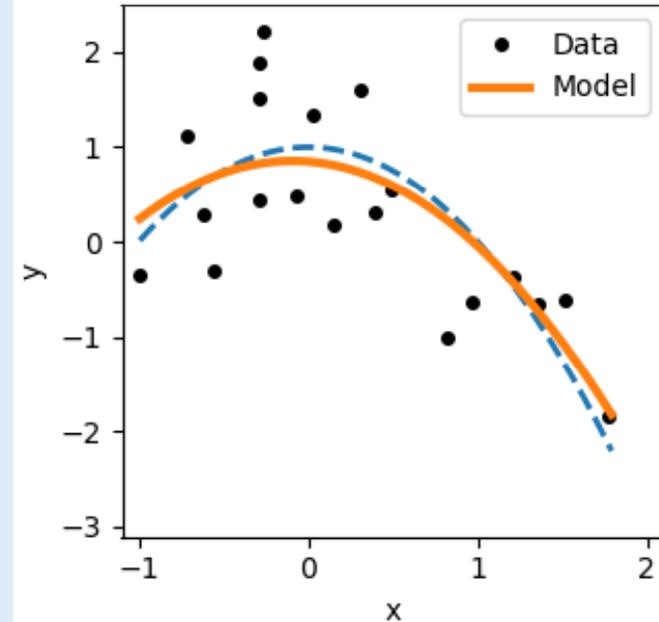
- Ненаблюдаемые параметры модели: $\boldsymbol{\mu} = (a_0, a_1, a_2, \sigma)$
- Правдоподобие модели:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu}) &= \prod_{n=1}^N \int p(y_n|\boldsymbol{\mu}, \xi_n) p(\xi_n) d\xi_n = \\ &= \prod_{n=1}^N \int \left[\delta(y_n - f(x_n) - \sigma\xi_n) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi_n^2}{2}} \right] d\xi_n = \\ &= \prod_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y_n - f(x_n))^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

- Апостериорная п.в. параметров:

$$p(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu})p(\boldsymbol{\mu})}{p(\mathbf{y})} \propto p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu})p(\boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{\boldsymbol{\mu}} \max$$

$N = 20$





Байесов подход к решению обратных задач

Поиск параметров модели

- Пример: наблюдаемые данные $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ сгенерированы “системой”

$$y_n = 1 - x_n^2 + 0.7\xi_n, \quad \xi_n \sim \mathcal{N}(0,1), x_n \in [-1,2]$$

- Модель:

$$y_n = f(x_n) + \sigma\xi_n, \quad \xi_n \sim \mathcal{N}(0,1)$$

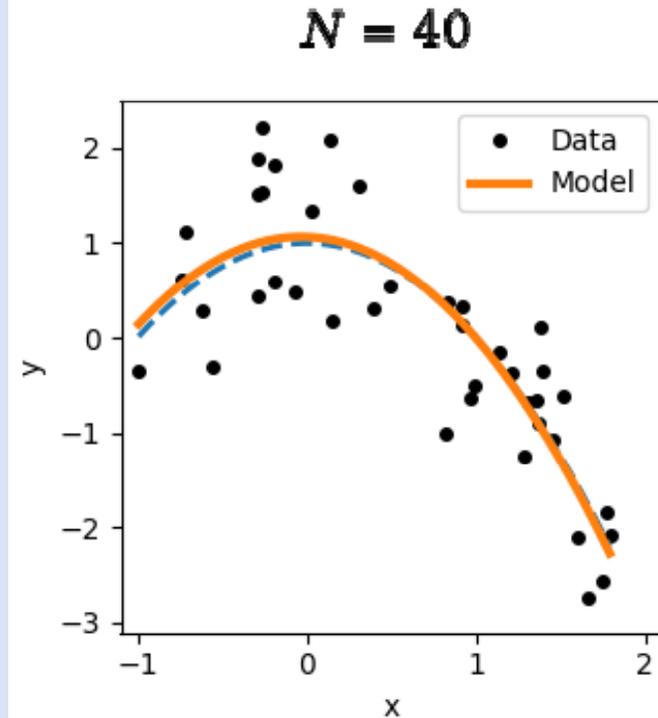
$$f(x_n) := a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2$$

- Ненаблюдаемые параметры модели: $\boldsymbol{\mu} = (a_0, a_1, a_2, \sigma)$
- Правдоподобие модели:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu}) &= \prod_{n=1}^N \int p(y_n|\boldsymbol{\mu}, \xi_n) p(\xi_n) d\xi_n = \\ &= \prod_{n=1}^N \int \left[\delta(y_n - f(x_n) - \sigma\xi_n) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi_n^2}{2}} \right] d\xi_n = \\ &= \prod_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y_n - f(x_n))^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

- Апостериорная п.в. параметров:

$$p(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu})p(\boldsymbol{\mu})}{p(\mathbf{y})} \propto p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu})p(\boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{\boldsymbol{\mu}} \max$$





Байесов подход к решению обратных задач

Поиск параметров модели

- Пример: наблюдаемые данные $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ сгенерированы “системой”

$$y_n = 1 - x_n^2 + 0.7\xi_n, \quad \xi_n \sim \mathcal{N}(0,1), x_n \in [-1,2]$$

- Модель:

$$y_n = f(x_n) + \sigma\xi_n, \quad \xi_n \sim \mathcal{N}(0,1)$$

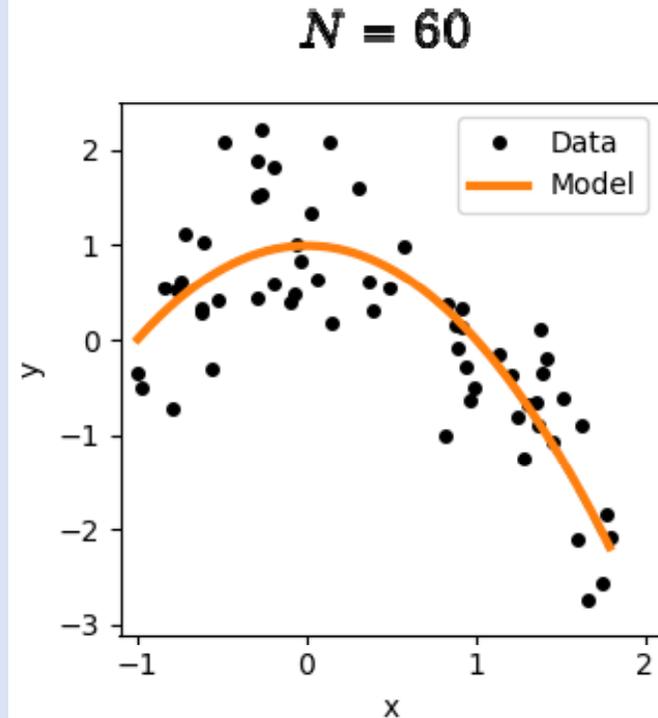
$$f(x_n) := a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2$$

- Ненаблюдаемые параметры модели: $\boldsymbol{\mu} = (a_0, a_1, a_2, \sigma)$
- Правдоподобие модели:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu}) &= \prod_{n=1}^N \int p(y_n|\boldsymbol{\mu}, \xi_n) p(\xi_n) d\xi_n = \\ &= \prod_{n=1}^N \int \left[\delta(y_n - f(x_n) - \sigma\xi_n) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi_n^2}{2}} \right] d\xi_n = \\ &= \prod_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y_n - f(x_n))^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

- Апостериорная п.в. параметров:

$$p(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu})p(\boldsymbol{\mu})}{p(\mathbf{y})} \propto p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu})p(\boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{\boldsymbol{\mu}} \max$$





Байесов подход к решению обратных задач

Байесов критерий выбора модели

- Рассмотрим набор моделей H_1, H_2, H_3, \dots с априорными вероятностями $P(H_i)$
- Пусть $\mu \in \mathbb{R}^{M_i}$ — параметры модели H_i , для которых задана априорная п.в. $p(\mu|H_i)$
- Пусть для каждой модели H_i известно правдоподобие $p(\mathbf{x}|\mu, H_i)$
- Тогда по теореме Байеса можно вычислить апостериорные вероятности моделей H_i :

$$P(H_i|\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|H_i)p(H_i)}{p(\mathbf{x})} = \frac{p(\mathbf{x}|H_i)p(H_i)}{\sum_i p(\mathbf{x}|H_i)p(H_i)}$$

- Если априорные вероятности моделей $P(H_i)$ одинаковы, то “наиболее вероятная” (оптимальная) модель при условии данных \mathbf{x} определяется как $H^* = \underset{H_i}{\operatorname{argmax}} P(H_i|\mathbf{x}) = \underset{H_i}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{x}|H_i)$
- Величина $p(\mathbf{x}|H_i)$ называется байесовой обоснованностью модели H_i (bayesian evidence):

$$p(\mathbf{x}|H_i) = \int p(\mathbf{x}, \mu|H_i) d\mu = \int p(\mathbf{x}|\mu, H_i) p(\mu|H_i) d\mu \xrightarrow{H_i} \max$$

Правдоподобие

Априорная п.в.

- Апостериорная п.в. параметров модели H^* (после наблюдений):

$$p(\mu|\mathbf{x}, H^*) = \frac{p(\mathbf{x}|\mu, H^*)p(\mu|H^*)}{p(\mathbf{x}|H^*)} \propto p(\mathbf{x}|\mu, H^*)p(\mu|H^*) \xrightarrow{\mu} \max$$



Байесов подход к решению обратных задач

Байесов критерий выбора модели

- Пример: наблюдаемые данные $y = (y_1, \dots, y_N)$ сгенерированы "системой"

$$y_n = 1 - x_n^2 + 0.7\xi_n,$$

$$\xi_n \sim \mathcal{N}(0,1), x_n \in [-1,2]$$

- Модель $H_m = (m)$ определяется одним "структурным" параметром m :

$$y_n = f(x_n) + \sigma\xi_n, \quad \xi_n \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$f(x_n) := a_0 + a_1x_n + \dots + a_mx_n^m = P_m(x_n)$$

- Правдоподобие модели:

$$p(y|\mu, m) = \prod_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y_n - P_m(x_n))^2}{2\sigma^2}}$$

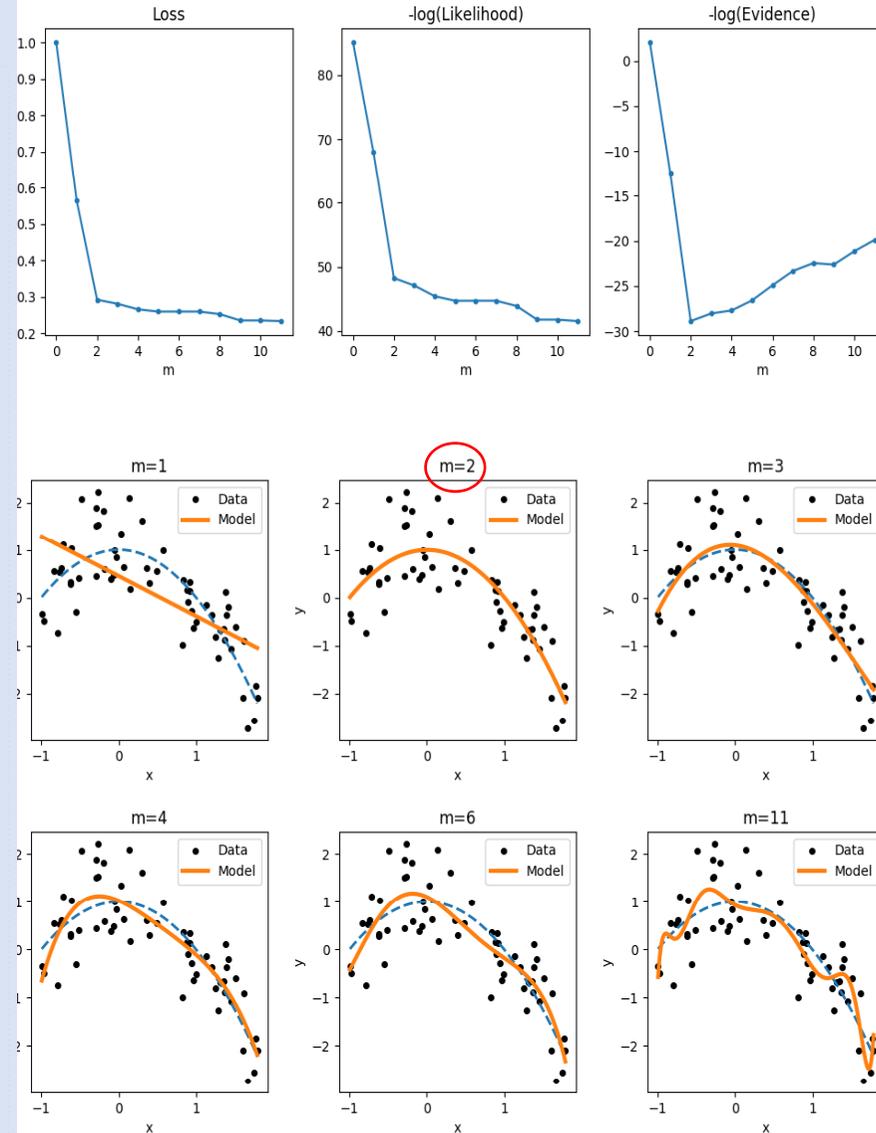
- Априорная п.в. параметров $\mathbf{a} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{K})$, где матрица \mathbf{K} определяется условием $\langle y_n^2 \rangle = \langle f^2(x_n) \rangle$:

$$p(\mu|m) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\mathbf{K})}} e^{-\frac{\mathbf{a}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{a}}{2}} \cdot p(\sigma|m)$$

- Ценовые функции:

$$p(y|m) = \int p(y|\mu, m)p(\mu|m)d\mu \xrightarrow{m} \max$$

$$p(\mu|y, m^*) \propto p(y|\mu, m^*)p(\mu|m^*) \xrightarrow{\mu} \max$$



$N = 60$



Байесов подход к решению обратных задач

Байесов критерий выбора модели

- Пример: наблюдаемые данные y
= (y_1, \dots, y_N) сгенерированы “системой”

$$y_n = \sin x_n + 0.7\xi_n,$$

$$\xi_n \sim \mathcal{N}(0,1), x_n \in [-1,2]$$

- Модель H_m определяется одним “структурным” параметром m :

$$y_n = f(x_n) + \sigma\xi_n, \quad \xi_n \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$f(x_n) := a_0 + a_1x_n + \dots + a_mx_n^m = P_m(x_n)$$

- Правдоподобие модели:

$$p(y|\mu, m) = \prod_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y_n - P_m(x_n))^2}{2\sigma^2}}$$

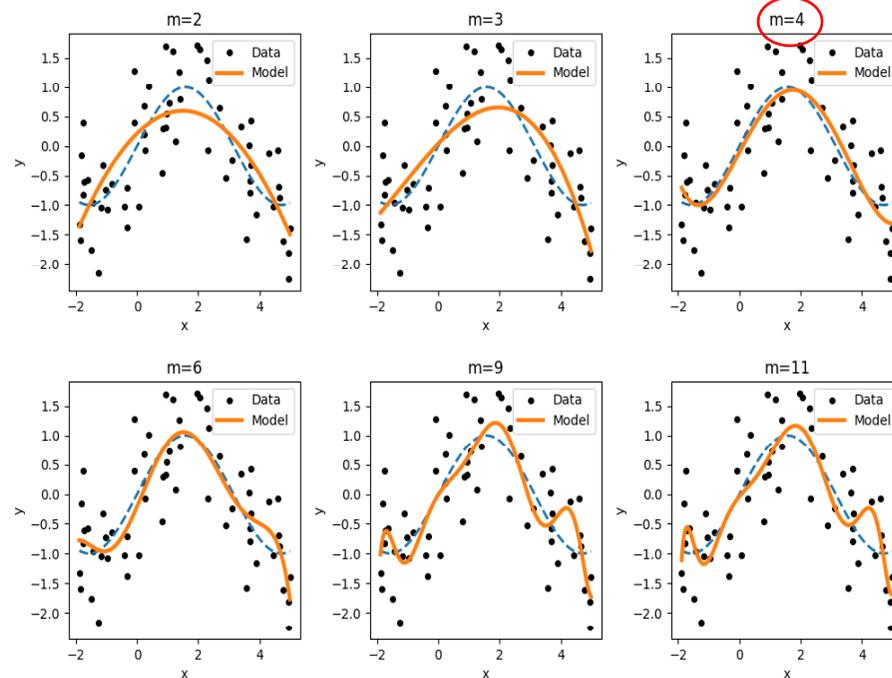
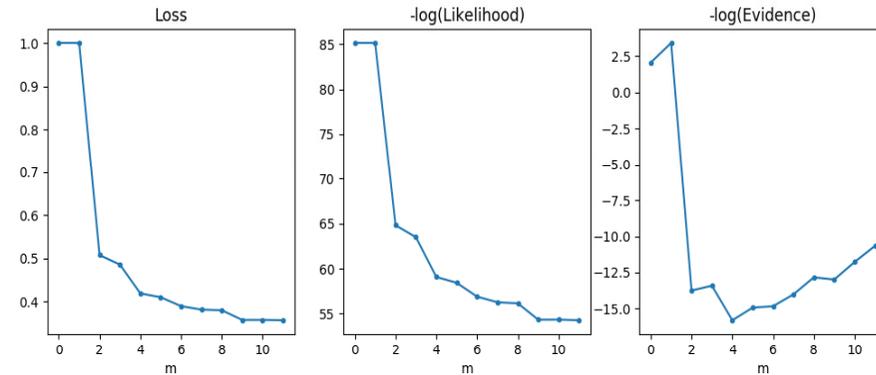
- Априорная п.в. параметров $\mathbf{a} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{K})$, где матрица определяется условием $\langle y_n^2 \rangle = \langle f^2(x_n) \rangle$:

$$p(\mu|m) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\mathbf{K})}} e^{-\frac{\mathbf{a}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{a}}{2}} \cdot p(\sigma|m)$$

- Ценовые функции:

$$p(y|m) = \int p(y|\mu, m)p(\mu|m)d\mu \xrightarrow{m} \max$$

$$p(\mu|y, m^*) \propto p(y|\mu, m^*)p(\mu|m^*) \xrightarrow{\mu} \max$$

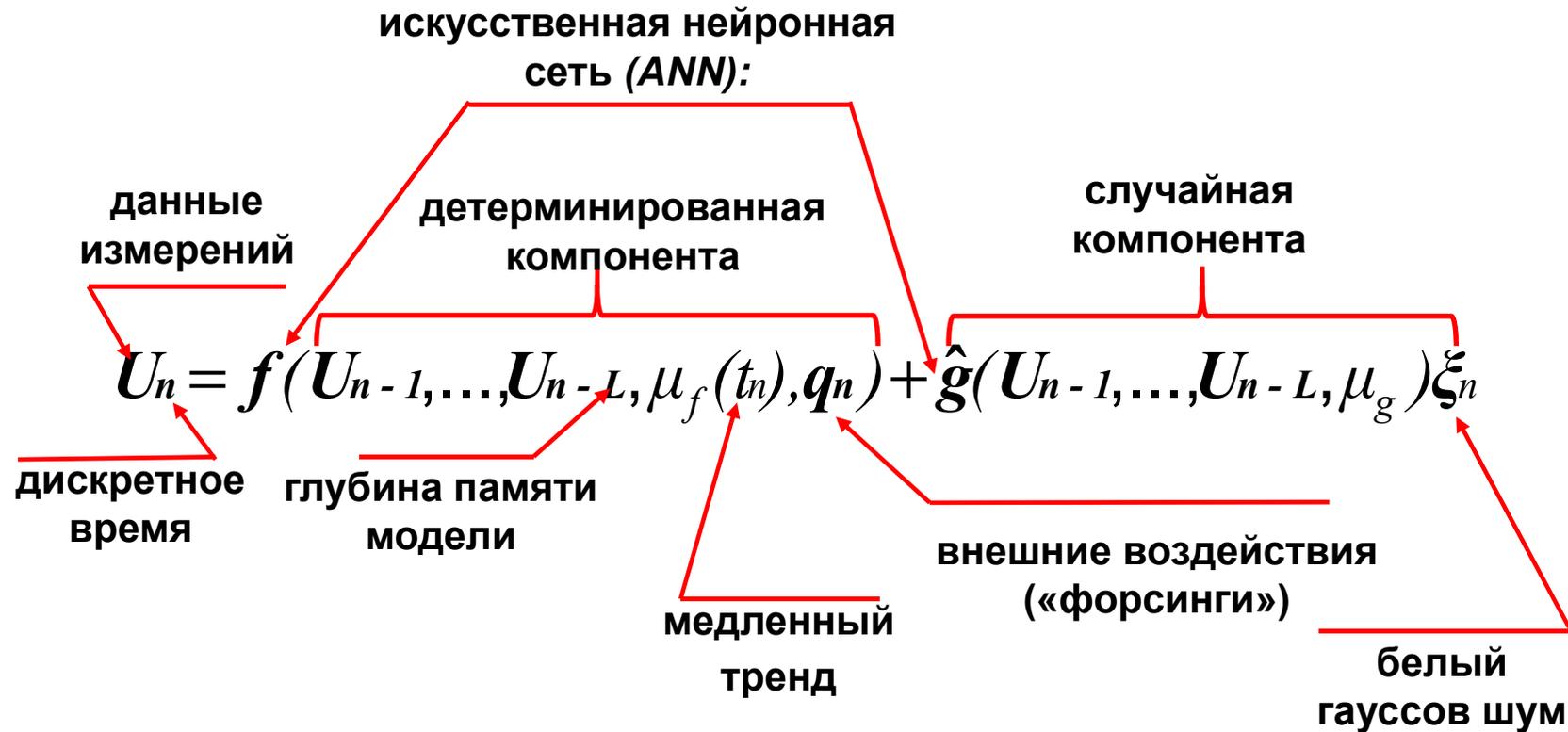


$N = 60$



АЛГОРИТМ

ЭМПИРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ В ФОРМЕ СЛУЧАЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ:



Molkov, Y. I., Loskutov, E. M., Mukhin, D. N., & Feigin, A. M. (2012): *Random dynamical models from time series*. Physical Review E, 85(3), 036216. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.85.036216>

Mukhin, D., E. Loskutov, A. Mukhina, A. Feigin, I. Zaliapin, and M. Ghil (2015): *Predicting critical transitions in ENSO models, Part I*. J. Climate, Vol. 28, No. 5. pp. 1940-1961.

D. Mukhin, D. Kondrashov, E. Loskutov, A. Gavrilov, A. Feigin, M. Ghil (2015): *Predicting critical transitions in ENSO models, Part II*. J. Climate, Vol. 28, No. 5. pp. 1962-1976.

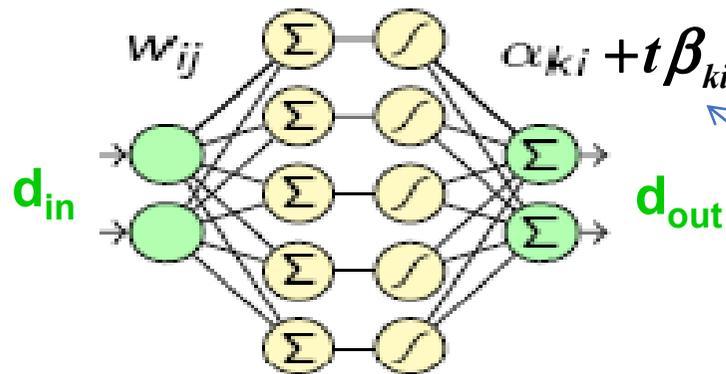


Параметризация f и g искусственной нейронной сетью (ANN):

$$\text{ANN}_{d_{in}}^{d_{out}}(\mathbf{U}, t) = \left\{ \sum_{i=1}^m (\alpha_{ki} + t\beta_{ki}) \tanh \left(\sum_{j=1}^{d_{in}} w_{ij} U_j + \gamma_i \right) \right\}_{k=1}^{d_{out}}$$

$$f(\mathbf{U}, t, \mu_1) = \text{ANN}_{d \times L}^d(\mathbf{U}, t)$$

$$g(\mathbf{U}, \mu) = \text{ANN}_{d \times L}^{d(d+1)/2}(\mathbf{U})$$



Явная зависимость параметров от времени описывает медленные изменения в поведении системы

Два сорта параметров:

«Структурные» или «гипер» параметры («параметры сложности»):

$$s = \{m_f, m_g, D\}, \quad D = L \times d_i$$

Параметры модели заданной сложности:

$$\mu = \{\mu_1, \mu_2\} = \{\alpha_f, \beta_f, \mathbf{w}_f, \gamma_f, \alpha_g, \beta_g, \mathbf{w}_g, \gamma_g\}$$



2. ОБУЧЕНИЕ МОДЕЛИ:

ОТЫСКИВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ

1. Ценовая функция для поиска

оптимальных параметров модели заданной сложности:

ПВ параметров модели μ при условии данных измерений $U = \{U_i \equiv U(t_i)\}_{i=1}^N, U \in \mathcal{R}^d$ и сложности модели S

$$P(\mu | U, s) = P(U | \mu, s)P(\mu | s) / P(U | s)$$

Модель:

$$U_n = \mathbf{f}(U_{n-1}, \dots, \mu_1(t_n)) + \mathbf{g}(U_{n-1}, \dots, \mu_2(t_n))\xi_n,$$

$$P_\xi(\xi_1, \dots, \xi_N) \propto \prod_i \exp\left(-\frac{|\xi_i|^2}{2}\right)$$

$$P(U | \mu, s) \propto \prod_i \left\| \mathbf{g}(U_i, \mu_2) \mathbf{g}^T(U_i, \mu_2) \right\|^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2} (U_{i+1} - \mathbf{f}(U_i, t_i, \mu_1))^T \left(\mathbf{g}(U_i, \mu_2) \mathbf{g}^T(U_i, \mu_2) \right)^{-1} (U_{i+1} - \mathbf{f}(U_i, t_i, \mu_1))\right)$$

2. Ценовая функция для сложности модели: байесова обоснованность

$$P(U | s) = \iint P(U | \mu, s) \cdot P(\mu | s) \cdot d\mu \equiv E(s)$$

Максимум $E(s)$ определяет оптимальное соотношение между качеством воспроизведения данных и прогностической способностью модели



Эмпирическая модель климата плейстоцена

Mukhin, D., Gavrilov, A., Loskutov, E., Kurths, J., & Feigin, A. (2019): *Bayesian Data Analysis for Revealing Causes of the Middle Pleistocene Transition*. Scientific Reports 2019 9:1, 9(1), 7328.

[https:// doi.org/10.1038/s41598-019-43867-3](https://doi.org/10.1038/s41598-019-43867-3)

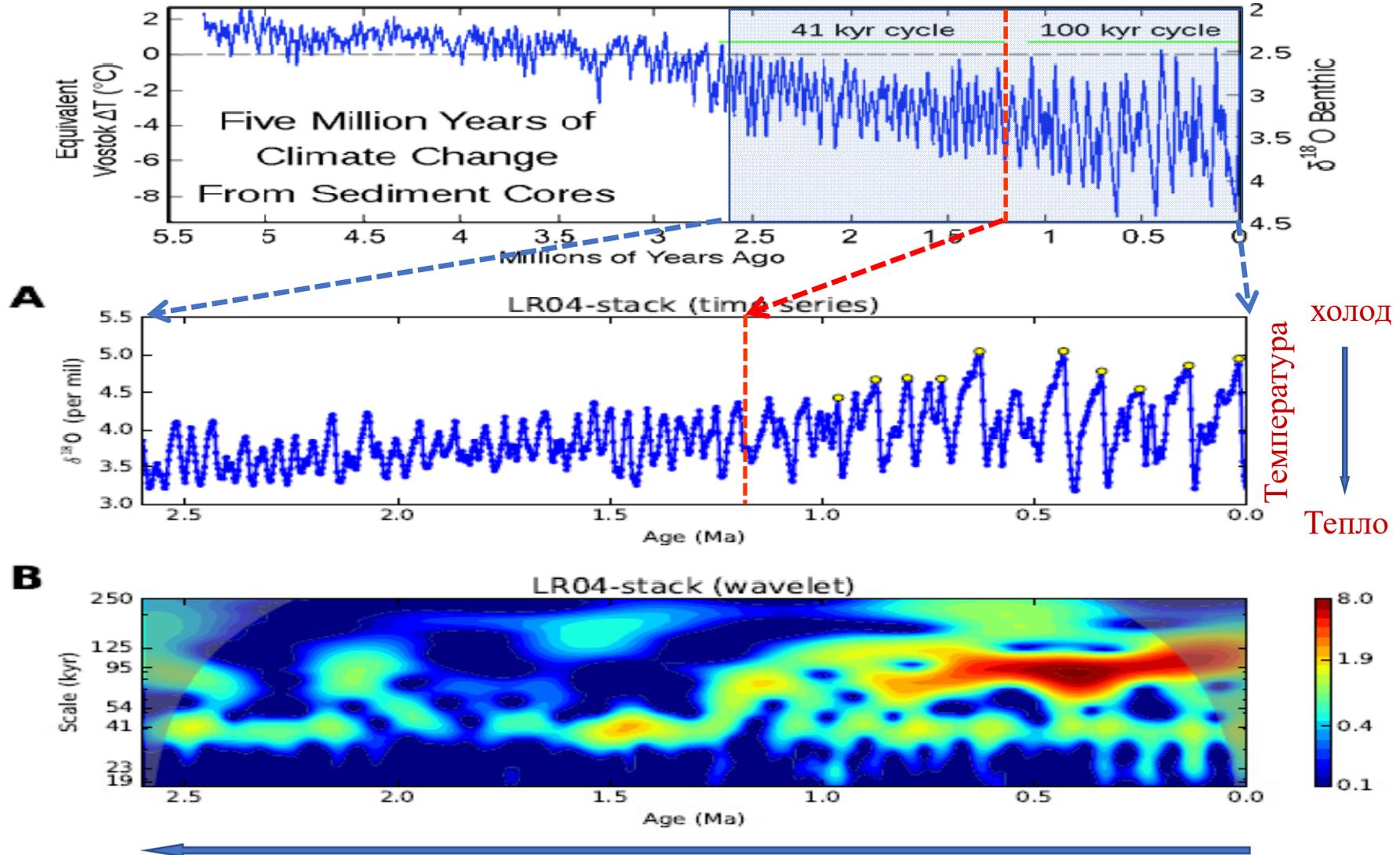


Плейстоцен и Средне Плейстоценный Переход (СПП)

Данные: ряд LR04 (Дискретность данных - 2500 лет)

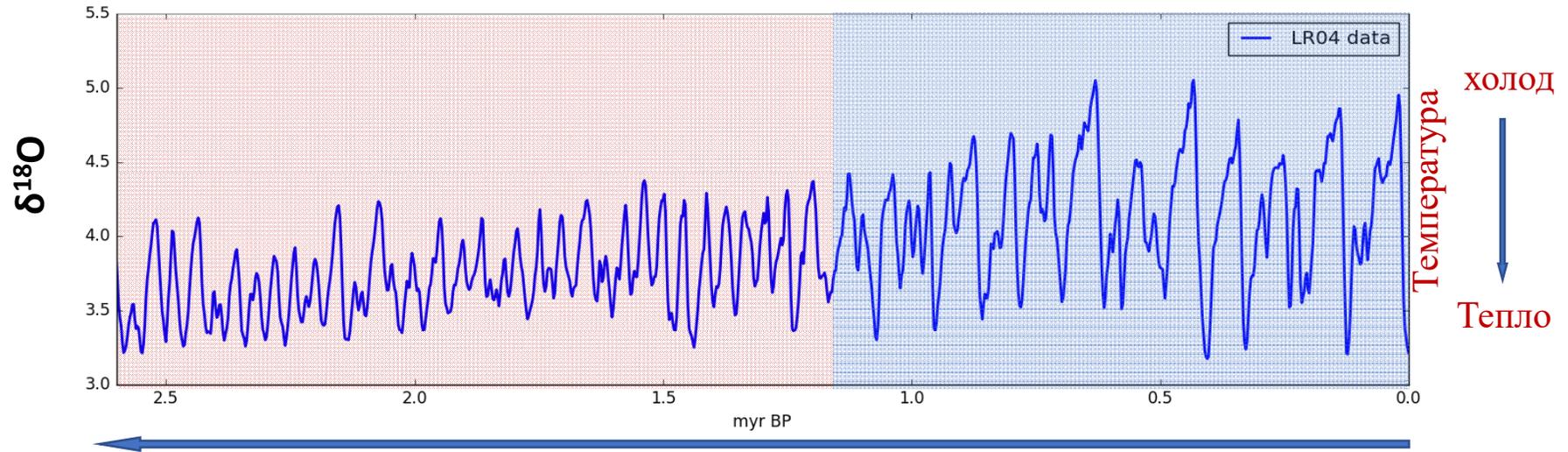
Lisiecki, L. E., & Raymo, M. E. (2005). A Pliocene-Pleistocene stack of 57 globally distributed benthic $\delta^{18}\text{O}$ records. *Paleoceanography*, 20(1)

Плейстоцен





Форма и периодичность ледниковых циклов до и после СПП:



Квази-sin форма до СПП



Пилообразная форма после СПП



Предложено большое число моделей динамики климата в плейстоцене основанных на различных концепциях:

- *положительная обратная связь между площадью ледового покрова и альбедо*
- *положительная обратная связь между осадками и температурой*
- *взаимодействие океане с его ледовым покровом*
 - *циркуляции атмосферы и океана*
 - *цикл CO₂*
 - *и пр.*

Рассматривается большое число динамических механизмов Средне-Плейстоценного Перехода (СПП) и соответствующие концептуальные модели :

Линейные сценарии:

- *линейный резонанс с различными компонентами орбитального форсинга*
 - *стохастический марковский процесс*

Нелинейные сценарии:

- *релаксационные колебания*
- *мультистабильность климатической системы, проявляющаяся под действием стохастического или/и орбитального форсингов*
 - *хаотический отклик на орбитальный форсинг*
 - *стохастический резонанс*
 - *и пр.*

Многие из нелинейных моделей демонстрируют хорошее воспроизведение палеоданных.

Но!

Tziperman et al (2006): “Хороший фиттинг данных не может рассматриваться в качестве доказательства их адекватности палеоклиматической системы. Причиной успешного фиттинга может являться просто захват фазы осцилляций модели орбитальным форсингом”



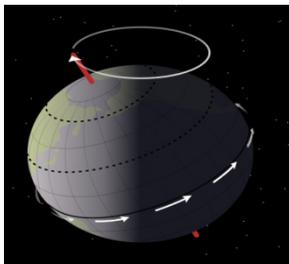
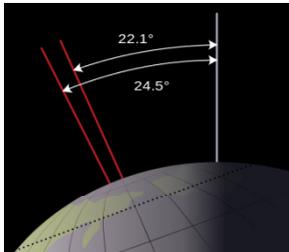
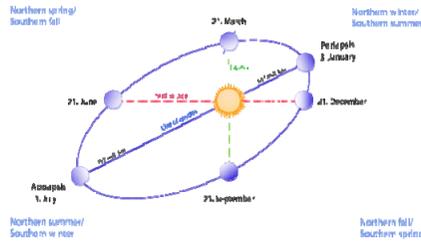
ВОПРОСЫ, ТРЕБУЮЩИЕ ОТВЕТА:

- **Какие факторы (*орбитальный форсинг, собственная изменчивость, включая быстропеременные процессы, медленные тренды*) ответственны за наблюдаемую динамику, а какие несущественны?**
 -
- **Каков наиболее вероятный сценарий СПП?**

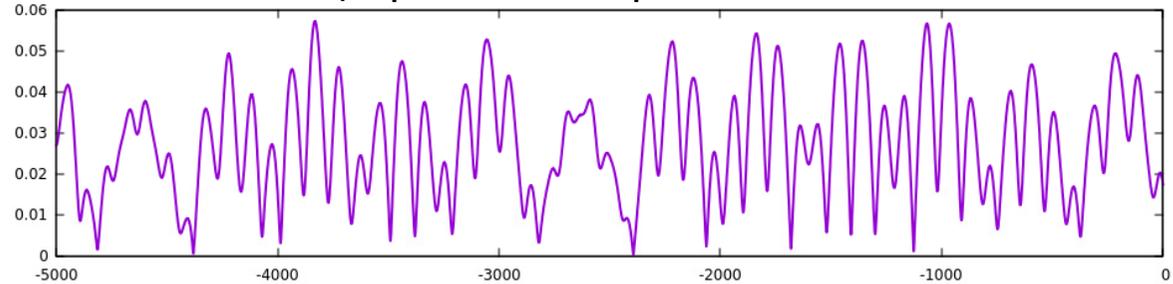


Орбитальный (*Milankovitch*) форсинг

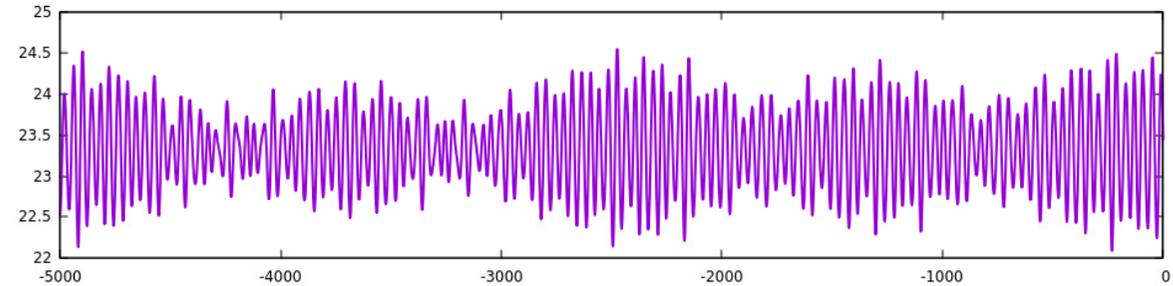
Орбитальный форсинг (форсинг Миланковича): колебания положения Земли относительно Солнца



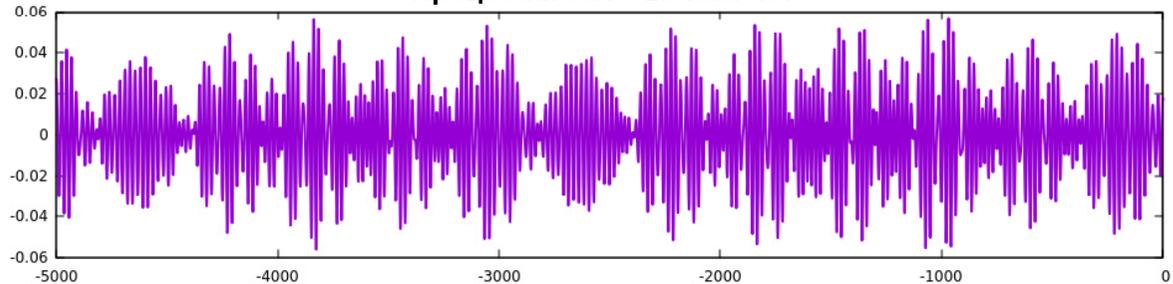
Эксцентриситет земной орбиты от ~95 тыс. лет



Наклон земной оси ~41 тыс. лет



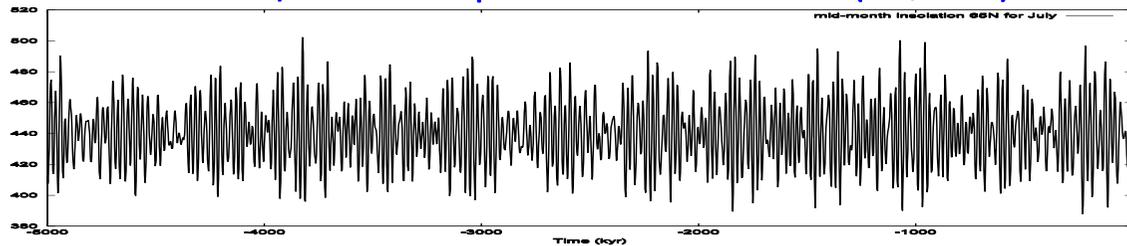
Прецессия оси ~ 23 тыс. лет



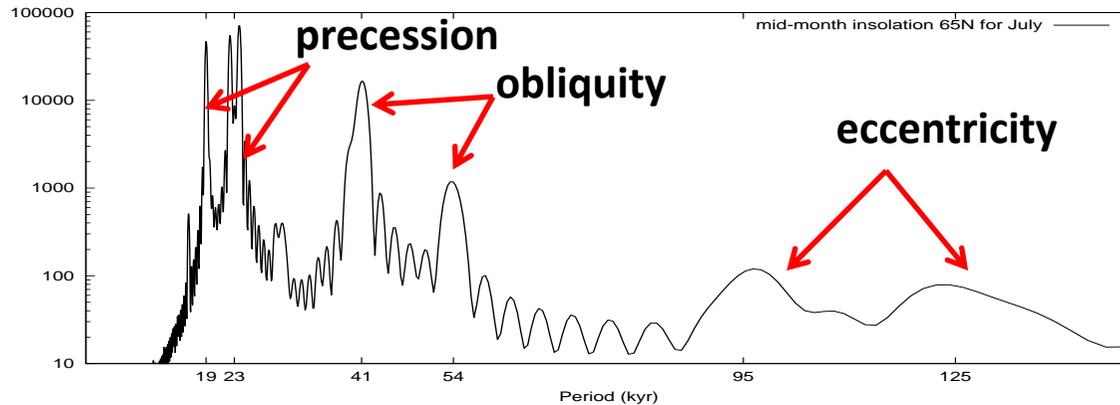


Орбитальный (*Milankovitch*) форсинг

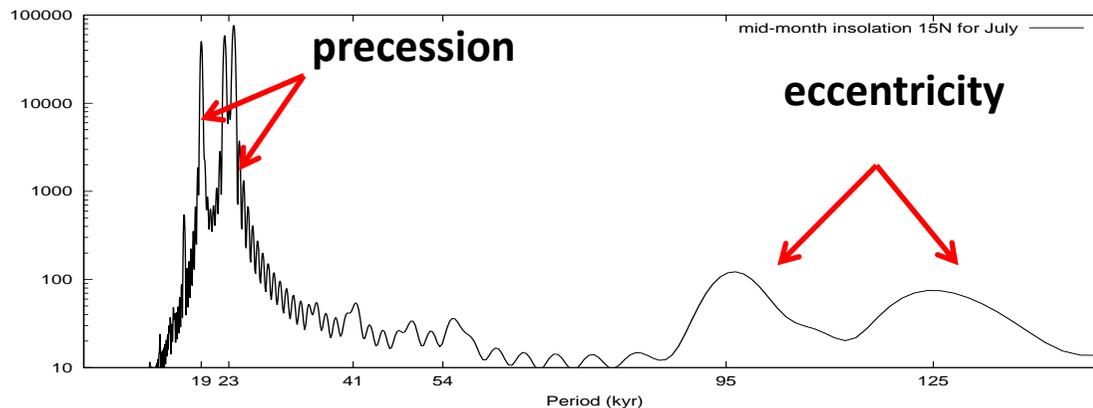
Инсоляция на широте 65N в июле (W/m²)



Периодограмма инсоляции в июле (65N)

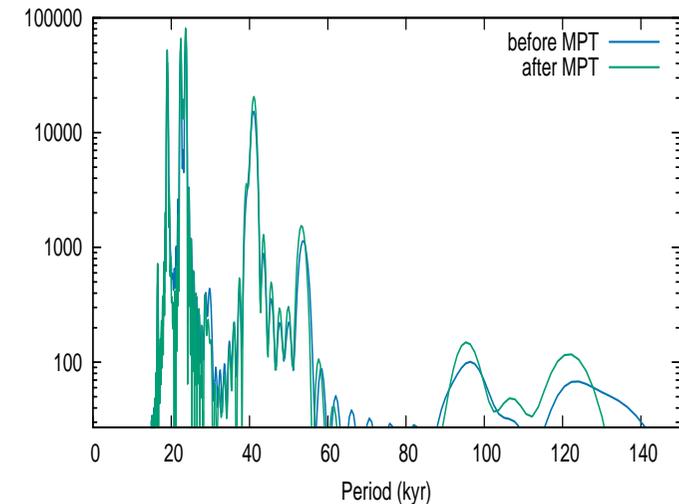


Периодограмма инсоляции в июле (15N)



Berger A. and Loutre M.F., 1991.
Insolation values for the climate of the
last 10 million years.
Quaternary Sciences Review, Vol. 10 No.
4, pp. 297-317, 1991

Орбитальный форсинг
является стационарным
процессом





Результаты обучения:

Ансамбль наиболее вероятных моделей.

Структурные параметры лучшей модели:

Размерность (“глубина памяти”) $D=L=10$.

Число нейронов:

в детерминированной компоненте $m_f=3$,

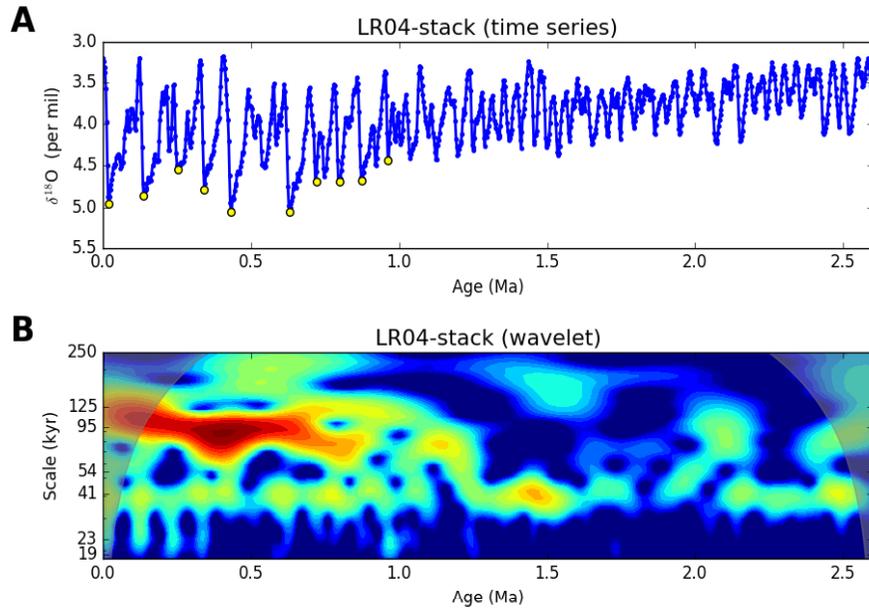
в стохастической компоненте $m_g=2$.



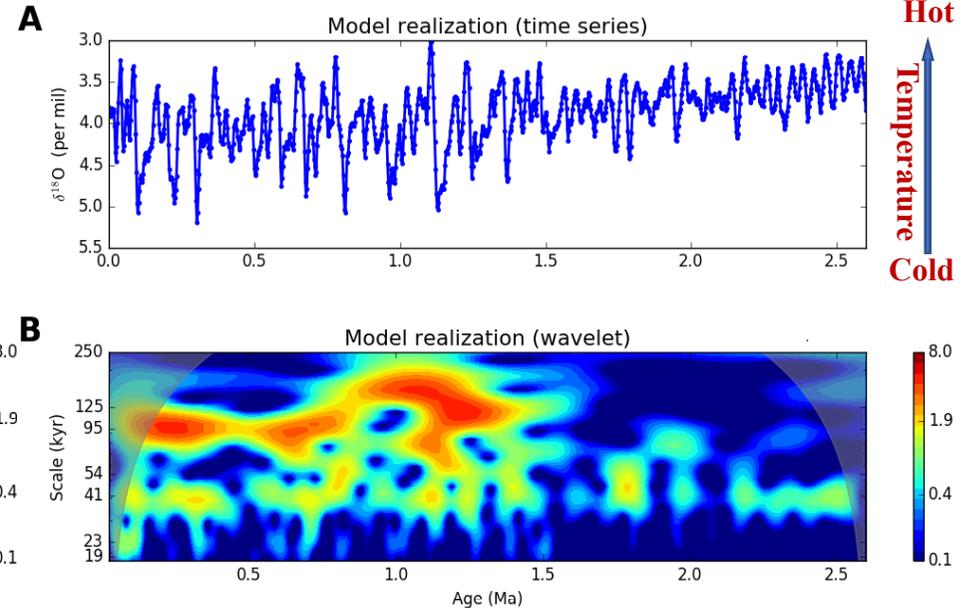
Results:

I. Time series and wavelet transforms

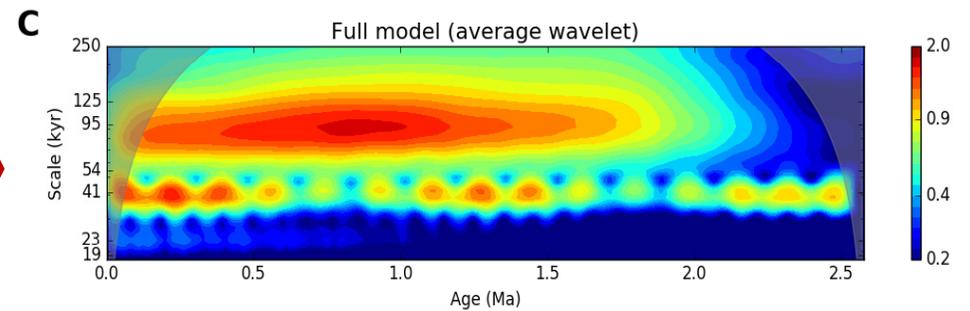
The data



The model



Mean (over noise realizations)
wavelet amplitudes
of the model time series





Results:

II. The role of orbital forcing: contribution of various components (*precession, obliquity, eccentricity*)

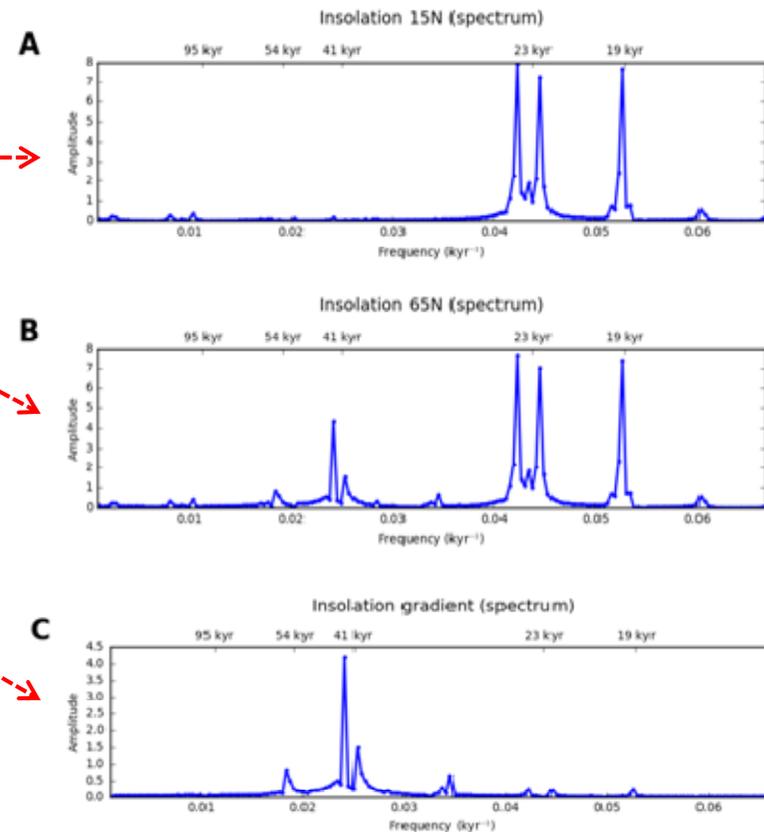
$$U_n = f(U_{n-1}, \dots, U_{n-L}, \mu_f(t_n), \mathbf{q}_n) + g(U_{n-1}, \dots, U_{n-L}, \mu_g) \xi_n$$

We considered the two-dimensional forcing: $\mathbf{q} = \{q_{65N}, q_{15N}\}$

The obtained model depends on the difference $q_{15N} - q_{65N}$ only!

FORCING IS THE INSOLATION GRADIENT

ONLY OBLIQUITY OSCILLATIONS INFLUENCED PLEISTOCENE CLIMATE

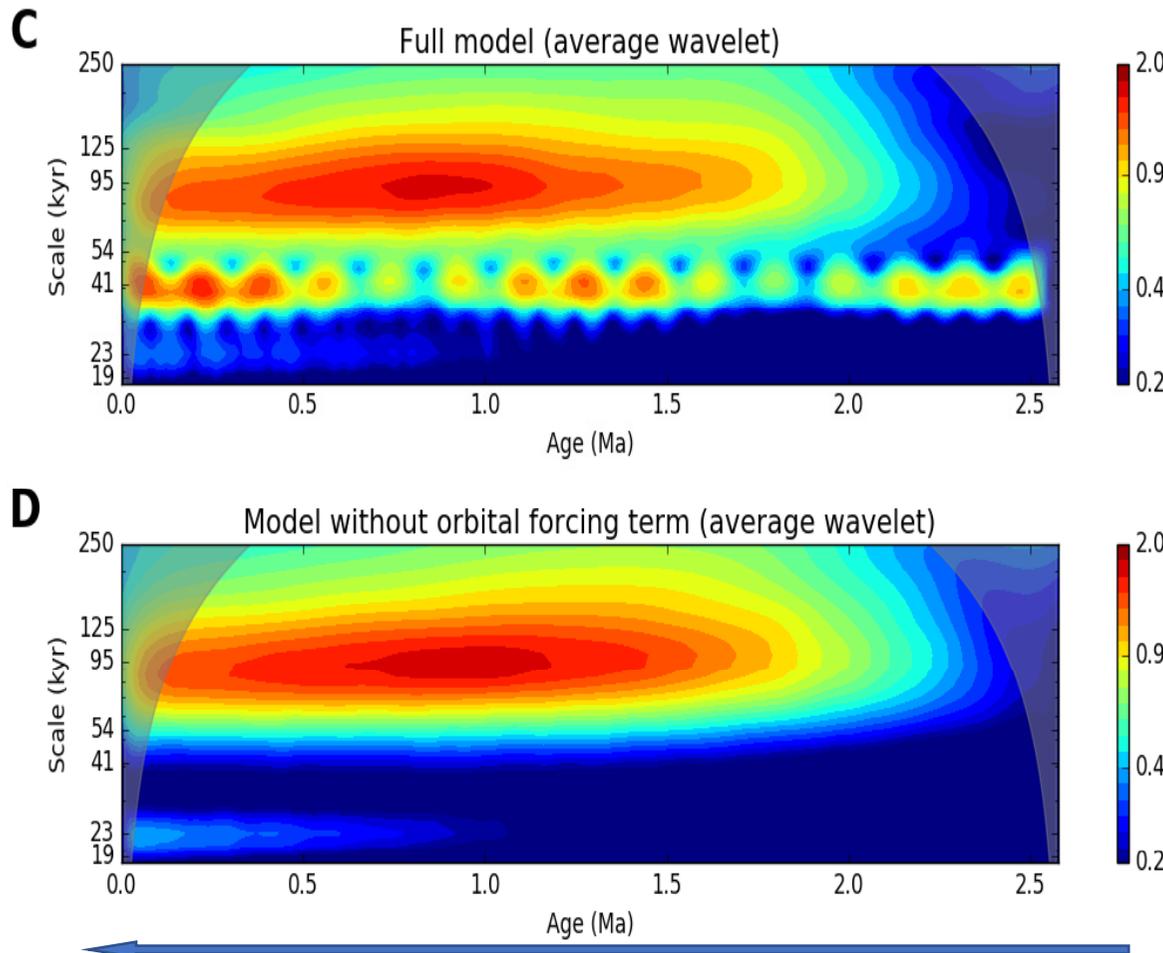




Results:

III. The role of orbital forcing before and during MPT

Model wavelets with and without orbital forcing:

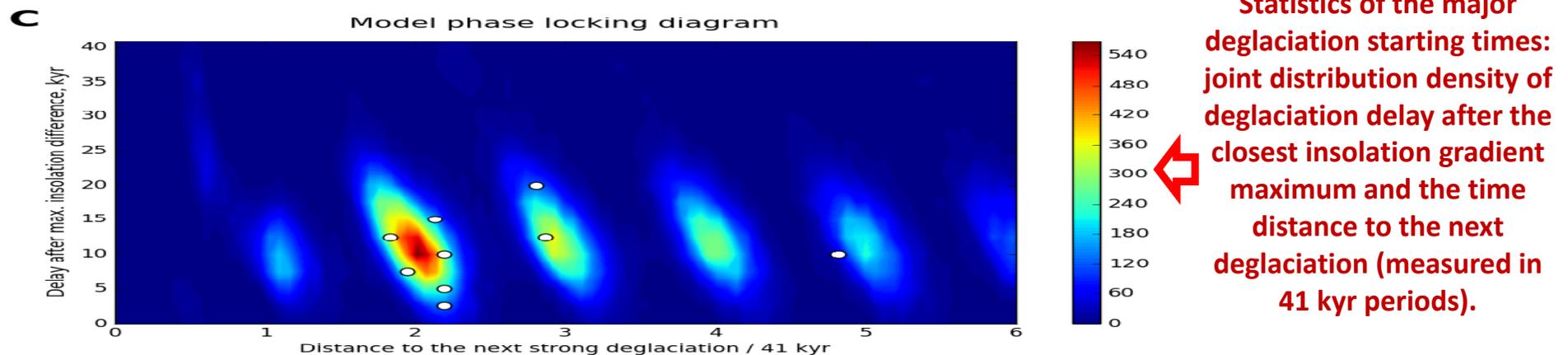
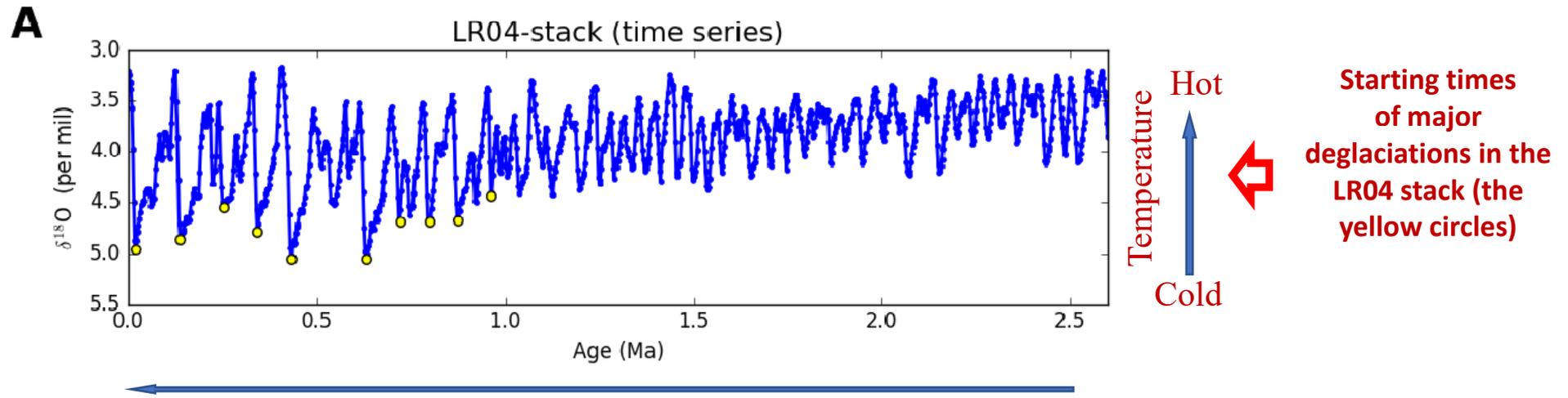


- **Orbital forcing (*obliquity oscillations*) is responsible for glacial-interglacial cycles before MPT**
- **Orbital forcing is not related to MPT**



Results:

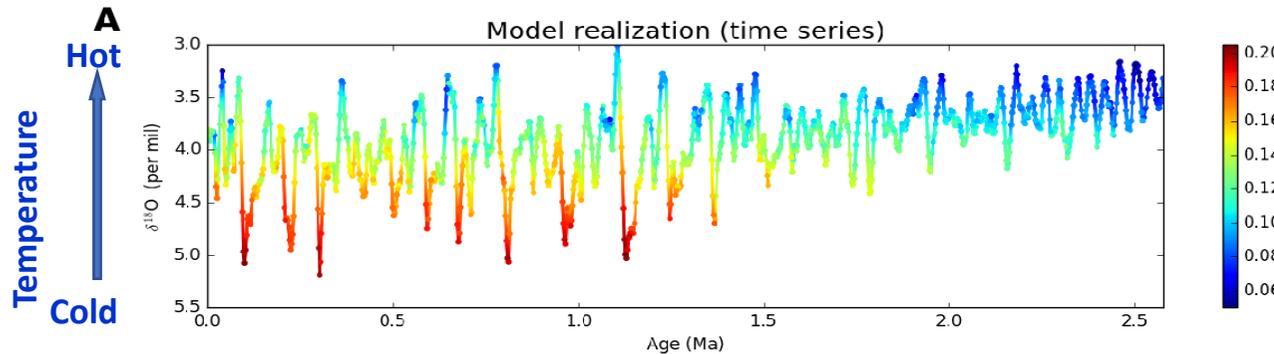
IV. The role of orbital forcing after MPT: phase locking between the obliquity (*insolation gradient*) oscillations and post-MPT glacial-interglacial cycles



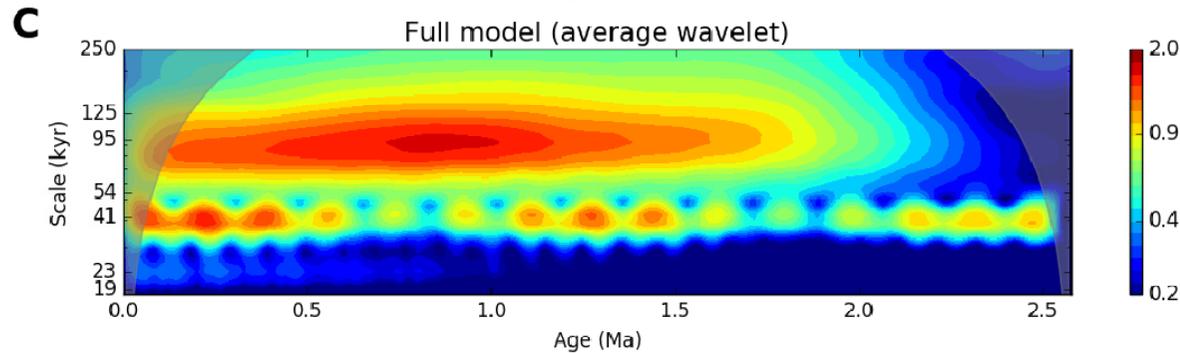


Results:

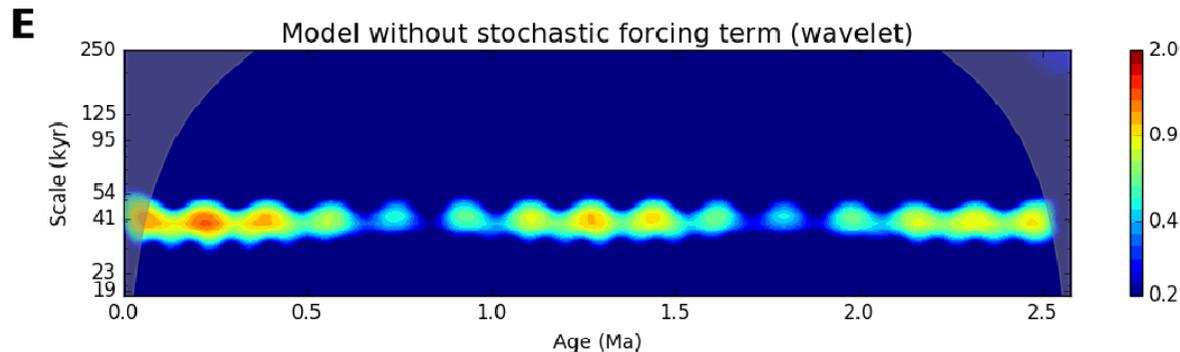
V. The role of stochastic (*internal*) forcing



An example of model time series colored in accordance with the *stochastic component power*:
← The more ice, the larger the fluctuation variance



No stochastic forcing – no transition !

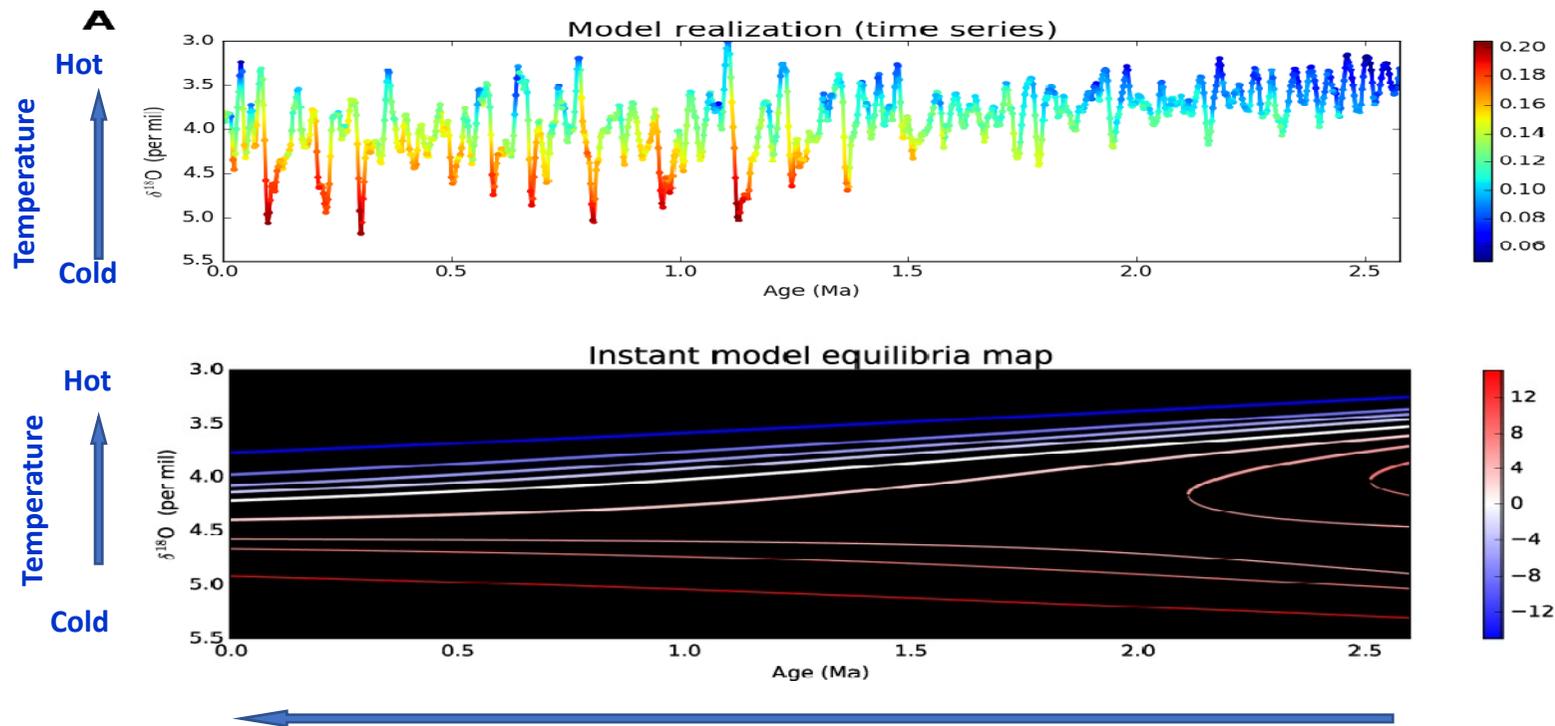




Results:

VI. Dynamical mechanisms of MPT: phase space of the model (1)

$$U_n = f(U_{n-1}, \dots, U_{n-L}, \mu_f, \underbrace{t_n = \text{const}, q_n = \text{const}}_{\text{shaded}}) + \cancel{g(U_{n-1}, \dots, U_{n-L}, \mu_g)} \xi_n$$



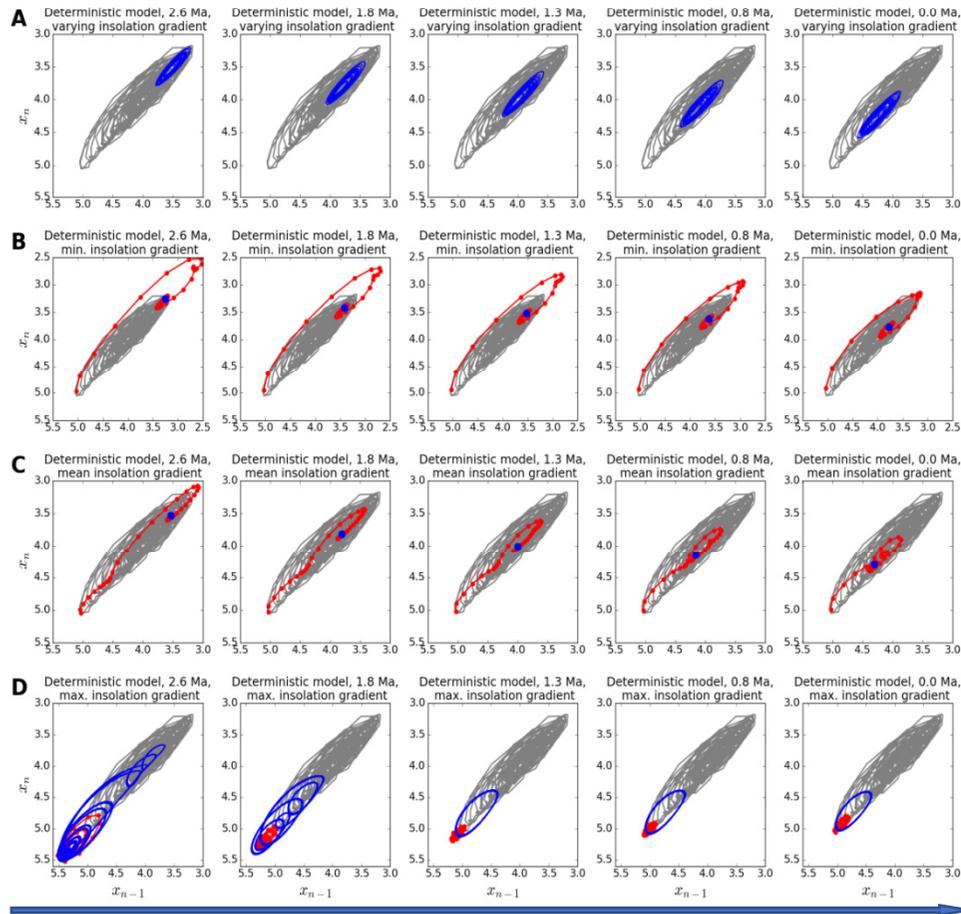
Deterministic component's steady states at different insolation gradient forcing levels (*colors correspond to the insolation gradient values*). The stable and unstable steady states are shown by thick and thin lines, respectively.



Results:

VII. Dynamical mechanisms of MPT: phase space of the model (2).

Two-dimensional (U_n, U_{n-1})-projection of the deterministic component's phase space.



Slow time t_n fixed at 2.6, 1.8, 1.3, 0.8 and 0 Ma (from left to right). On the top panels (A) blue lines show the 1 Myr-long trajectory of the deterministic component under the full time-varying forcing. On the other panels the behavior is shown for the model with insolation gradient fixed at its minimal (B), average (C) and maximal (D) values; here blue lines show the deterministic model's attractor, red lines – examples of the first 100 kyr of model's transient behavior from the “cold” initial conditions (high values of U). Examples of fast motions to the attractors from the cold states can be seen at the panels (B) and (C) (“red” trajectories).



No transitions without short-scale forcing!

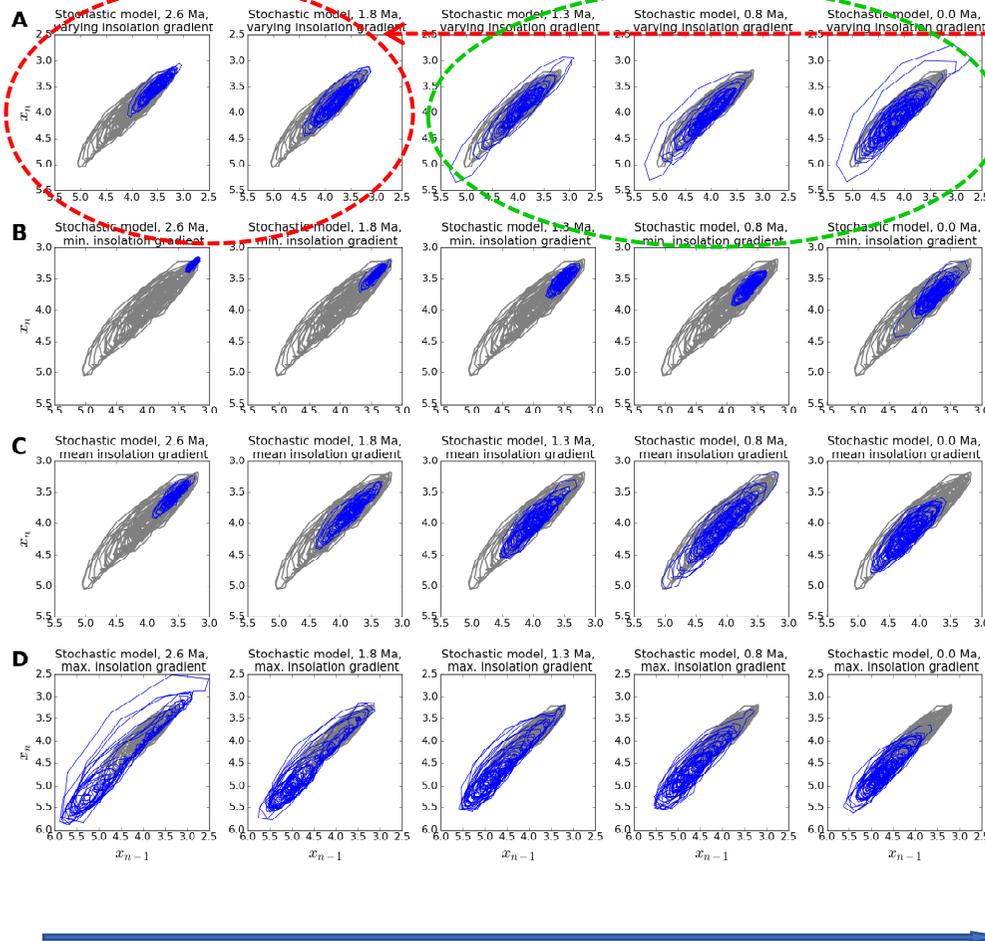
On all panels gray lines show the LR04 time series on the (U_n, U_{n-1}) plane as a background image.



Results:

VIII. Dynamical mechanisms of MPT: phase space of the model (3).

The behavior of the full stochastic model



Before MPT:
Quasi-sin oscillations
During and after MPT:
Relaxation (saw-tooth shape) oscillations

Blue lines show
the randomly generated time series of
1.2 Myr-length on the (U_n, U_{n-1}) plane.
Gray lines show the LR04 time series
on the (U_n, U_{n-1}) plane as a background
image

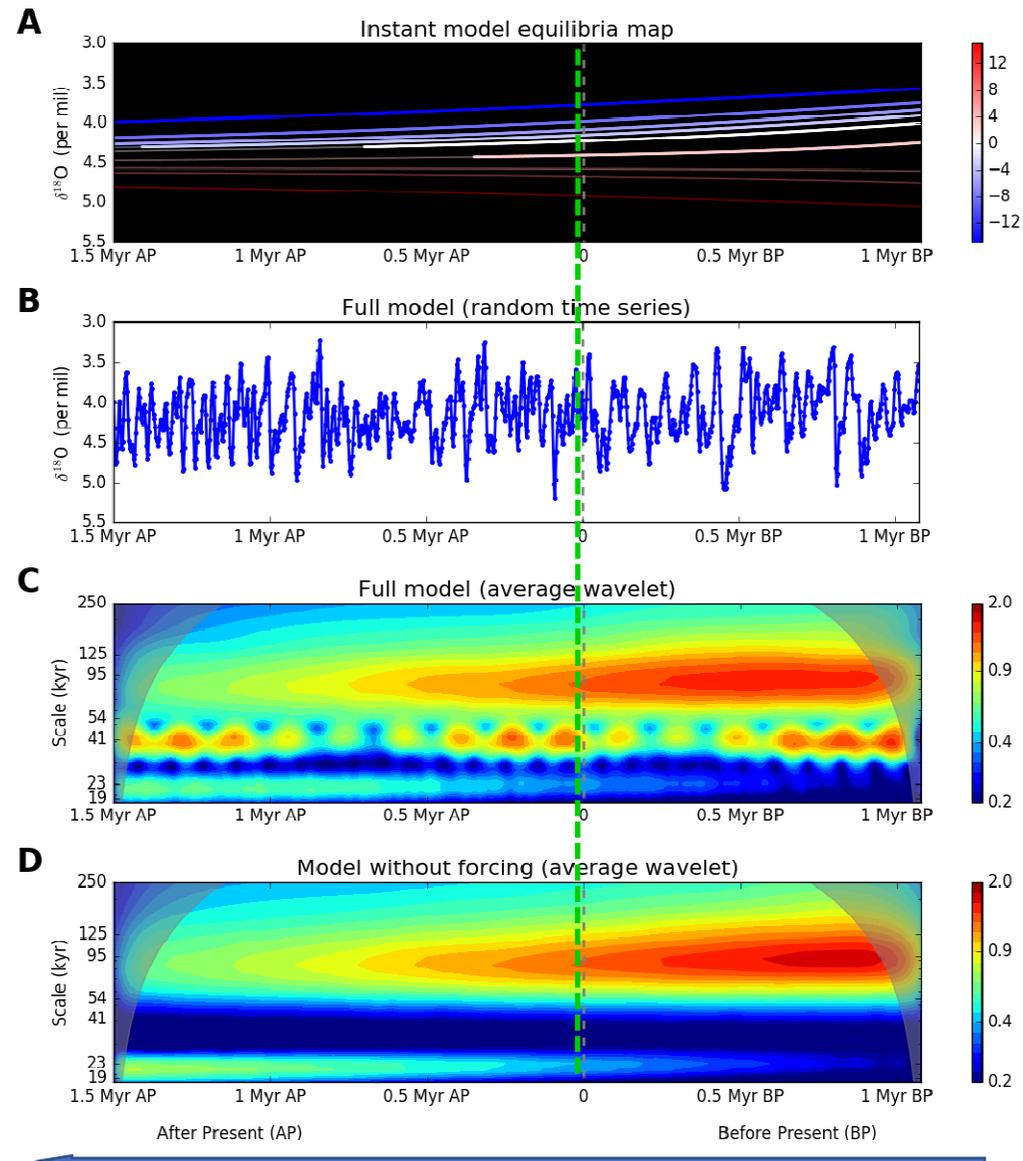
MPT is caused by a change in nonlinear dynamical properties of the system under the influence of a slow trend (change in CO₂ abundance) and stochastic forcing determined by the millennial and centenary processes

On all panels **gray lines** show the LR04 time series on the (U_n, U_{n-1}) plane as a background image.



Results:

IX. The ability to predict future evolution, including critical transitions





“ПЛЕЙСТОЦЕННЫЕ” ВЫВОДЫ

1. **Динамическая эмпирическая реконструкция на основе байесова подхода позволяет построить модель, с наибольшей вероятностью воспроизводящую свойства системы, отраженные в данных наблюдений**
2. **Нелинейность климатической системы плейстоцена, стохастический форсинг и меридиональный градиент инсоляции (обусловленный осцилляциями угла наклона земной оси) определяют динамику климата плейстоцена**
3. **Средне- Плейстоценный Переход (СПП) вызван изменением нелинейных динамических свойств системы под влиянием медленного тренда и стохастического форсинга, обусловленного тысячелетней и столетней изменчивостью климата**
4. **После СПП имел место захват фазы циклов оледенения осцилляциями угла наклона земной оси**
5. **В данных наблюдений (композит LR04) нет свидетельств влияния на СПП осцилляций частоты прецессии земной оси и эксцентриситета орбиты Земли.**
6. **Для исследования взаимного влияния климатических процессов с существенно различными временными масштабами необходимо построение связанных разномасштабных моделей**



ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЭМПИРИЧЕСКАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ НА ОСНОВЕ БАЙЕСОВА ПОДХОДА :

- **делает возможным исследование структуры фазового пространства системы, оператор эволюции которой неизвестен**
- **позволяет получить информацию о механизмах, определяющих динамику исследуемой системы**
- **является инструментом для прогноза эволюции системы, в том числе – прогноза критических переходов**
- **дает уникальную возможность валидации существующих моделей, построенных на основе первых принципов**



«ГЛОБАЛЬНЫЕ» ВЫВОДЫ

- Временные ряды, порожденные сложными (*нелинейными и мультимасштабными !!!*) природными системами, демонстрируют *детерминированно-случайную* динамику таких систем
- Понятия «*детерминированной*» качественной теории динамических систем (*аттрактор, устойчивость, бифуркация*) теряют смысл с точки зрения описания нелинейно-динамического устройства таких систем
- Качественная теория *случайных* динамических систем в ее современном состоянии позволяет наметить подходы к созданию математического инструментария для «количественного» анализа нелинейно-динамических механизмов, определяющих эволюцию сложных природных систем.



СОАВТОРЫ:

*Дмитрий Мухин, Евгения Лоскутов,
Андрей Гаврилов, Юрген Курц*

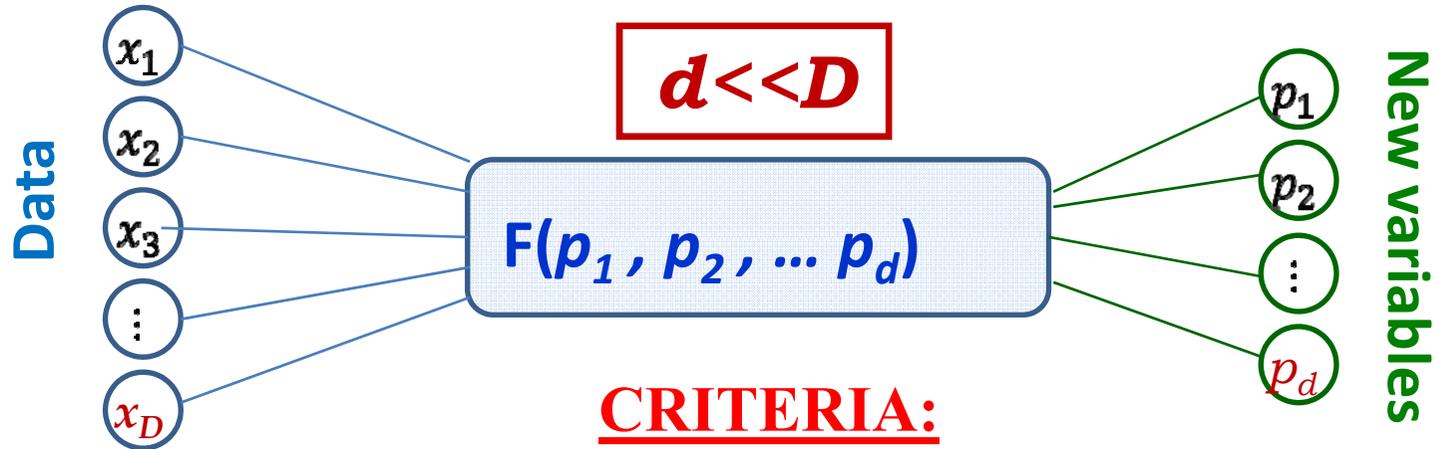
*Федеральный исследовательский центр
«Институт прикладной физики РАН»*



СПАСИБО!



Extraction of spatio-temporal patterns from climate data



- Efficient compression of data;
- p should capture substantial part of variability;
- Reflecting causal relationships in data;
- Statistical significance of $F(\bullet)$



We need to extract *principal nonlinear dynamical modes*

Dmitry Mukhin, Andrey Gavrilov, Alexander Feigin, Evgeny Loskutov & Juergen Kurths, (2015) Principal nonlinear dynamical modes of climate variability, Nature Scientific Reports, 5, 15510.

Gavrilov, A., Mukhin, D., Loskutov, E., Volodin, E., Feigin, A., & Kurths, J., (2016) Method for reconstructing nonlinear modes with adaptive structure from multidimensional data, Chaos, 26(12), 123101.

Mukhin, D., Gavrilov, A., Loskutov, E., Feigin, A., & Kurths, J., 2, (2018): Nonlinear reconstruction of global climate leading modes on decadal scales. Climate Dynamics, 51(5–6), 2301–2310.



Main peculiarities of data decomposition algorithm:

1. **Nonlinear parameterization of data transformation:**
e. g. orthogonal polynomials

$$F(\mathbf{a}, \mathbf{p}) = \mathbf{a}_0 \Pi_0(\mathbf{p}) + \mathbf{a}_1 \Pi_1(\mathbf{p}) + \dots + \mathbf{a}_m \Pi_m(\mathbf{p}); \quad \mathbf{a} := (\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$$

2. **The simplest evolution operator as prior information**
for new variables \mathbf{p} :

$$\mathbf{p}_{n+1} = b\mathbf{p}_n + g\boldsymbol{\eta}_n; \quad \boldsymbol{\eta}_n \subset N(0,1), \quad \tau = -\frac{1}{\ln b}, \quad \langle \mathbf{p}_n^2 \rangle = 1$$

3. **Optimal values of decomposition parameters are searched on the**
base of probabilistic (Bayesian) criteria



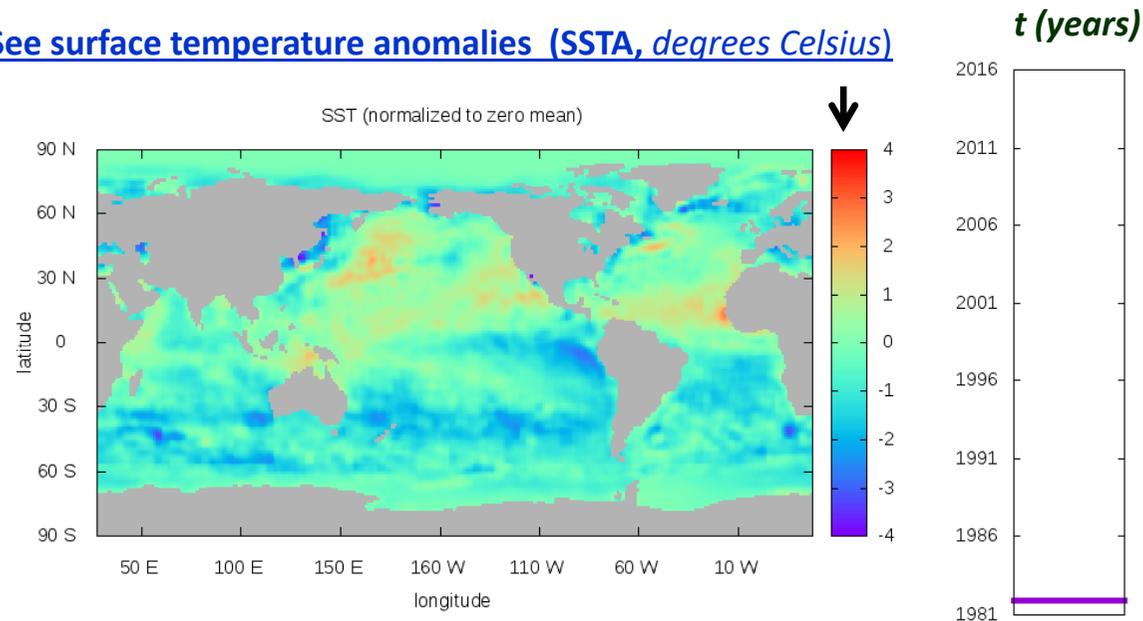
Example: study of modern climate system

Principal nonlinear dynamical modes of interannual and decadal variability

1. Satellite era data: duration ≈ 35 years

http://iridl.ldeo.columbia.edu/SOURCES/IGOSS/.nmc/.Reyn_SmithOlv2/.monthly/.sst/

See surface temperature anomalies (SSTA, degrees Celsius)



Dimensionality of data vector (*number of time series recorded in different spatial grid nodes*):

$D=44219$



Analysis of sea surface temperature (SST) 1981-2015

Calculated for: NOAA OI.v2: Reynolds et. al. (2002) An Improved In Situ and Satellite SST Analysis for Climate. *J. Climate*, 15, 1609-1625

RESULT OF OPTIMAL DECOMPOSITION:

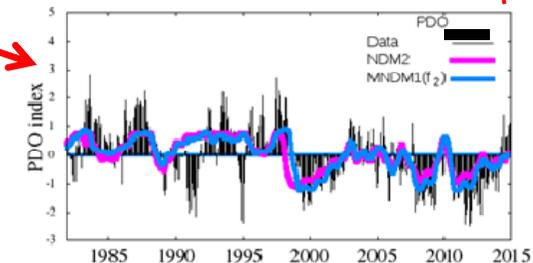
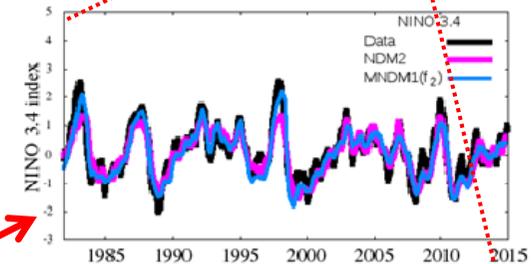
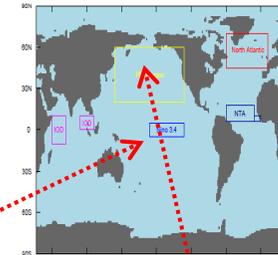
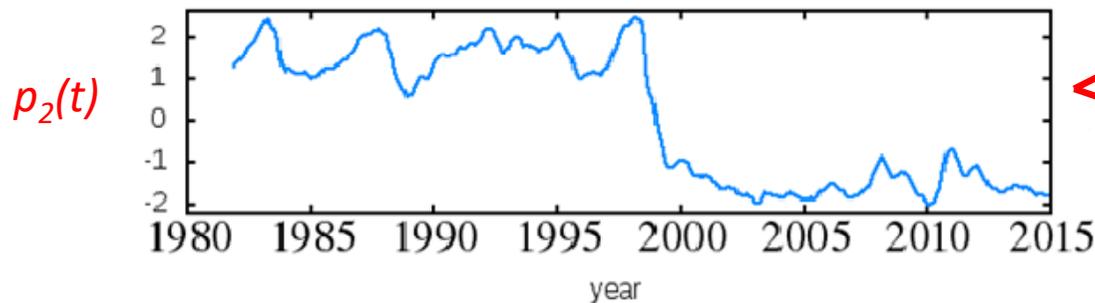
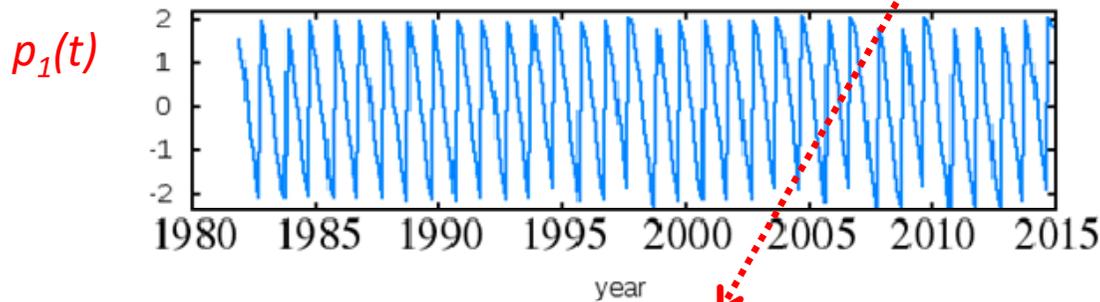
2-d nonlinear dynamical mode (NDM) (containing 87% of cumulative variances)
+ residual (containing 13% of cumulative variances)

$$F(p_{1n}, p_{2n}) = f_1(p_{1n}) + f_2(p_{2n}) + f_{12}(p_{1n}, p_{2n}) + const$$

Annual cycle

ENSO & PDO

≈ 0





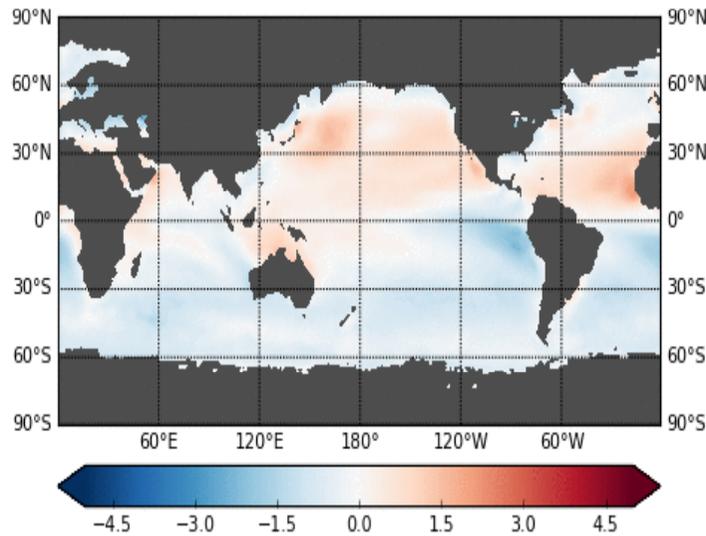
RESULT OF OPTIMAL DECOMPOSITION:

2-d nonlinear dynamical mode (NDM) (captures 87% of cumulative variances)

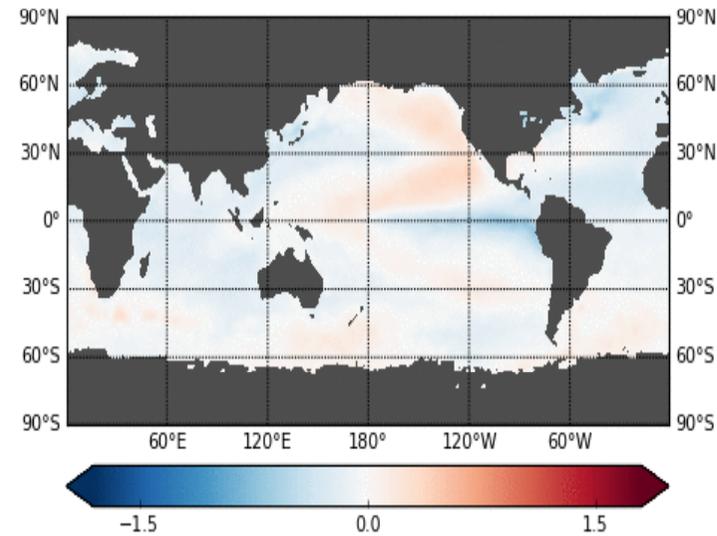
ANNUAL CYCLE COPPONENT

ENSO & PDO COPPONENT

MNDM(f_1)



MNDM(f_2)



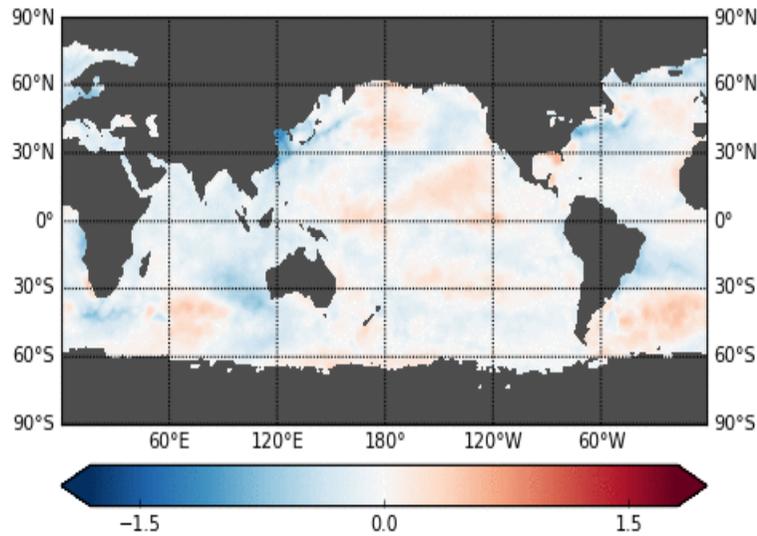
1981-11-01



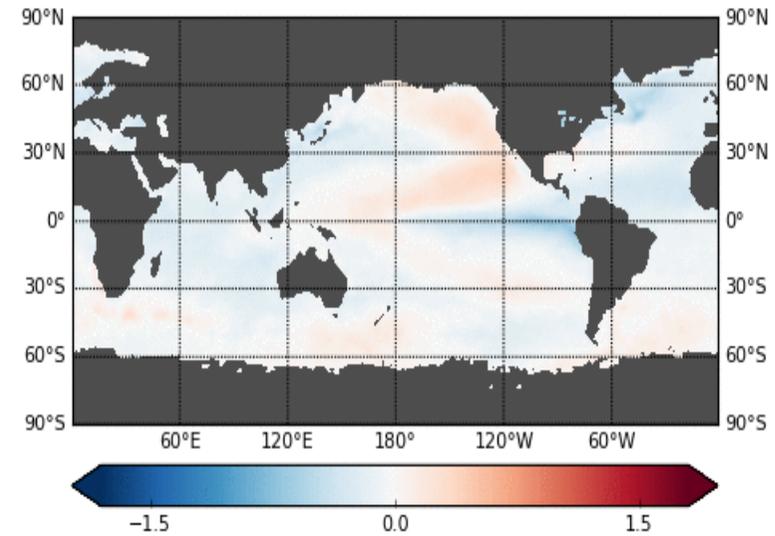
RESULT OF OPTIMAL DECOMPOSITION:

Second (ENSO &PDO) component of 2-d NDM (right) in comparison with 1-year mean SST anomaly calculated from data (left)

SST Anomaly (1-year running mean)



MNDM(f_2)



1981-11-01



Example: study of modern climate system

Principal nonlinear dynamical modes of interannual and decadal variability

Most extended in time modern climate time series: duration ≈ 150 years

(Hadley center global SST reanalysis data, Rayner et al., 2003, J. Geophys. Res. Vol. 108, No. D14, 4407)



Influence of slower processes and trends becomes substantial !



Data decomposition algorithm need to be modified:

NEVERTHELESS!

We got opportunity:

- to analyze change of PDO features during last 150 years;
- to study inherent teleconnections:

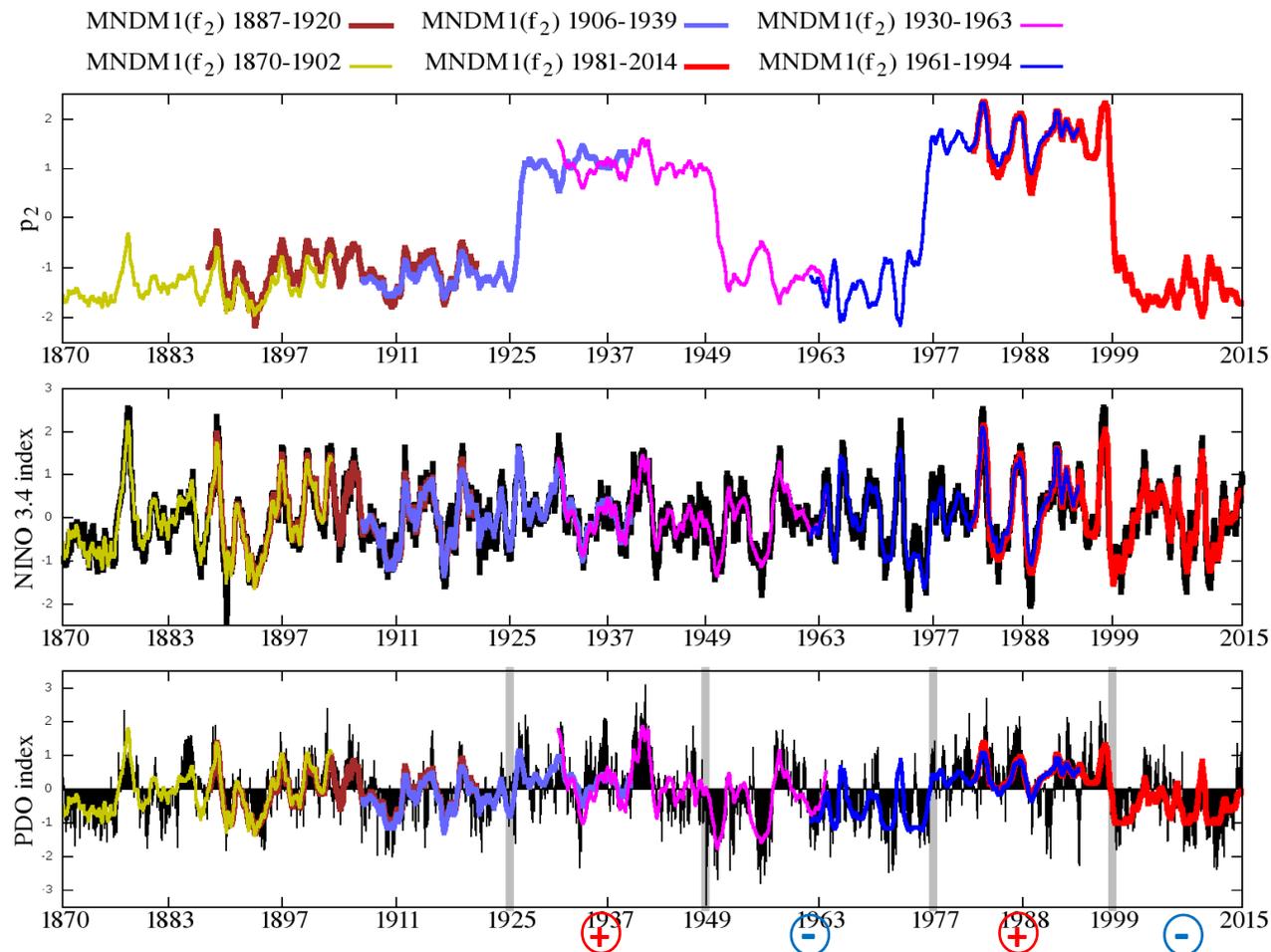
nonlinear relationships between interannual and decadal variability in spatially allocated regions;

- investigate change of these relationships during last 150 years;
- etc...



Global sea surface temperature 1870-2014: evolution of interannual and decadal variability

Calculated for: HadISST1: Rayner et al. (2003) Global analyses of sea surface temperature, sea ice, and night marine air temperature since the late nineteenth century J. Geophys. Res. Vol. 108, No. D14, 4407

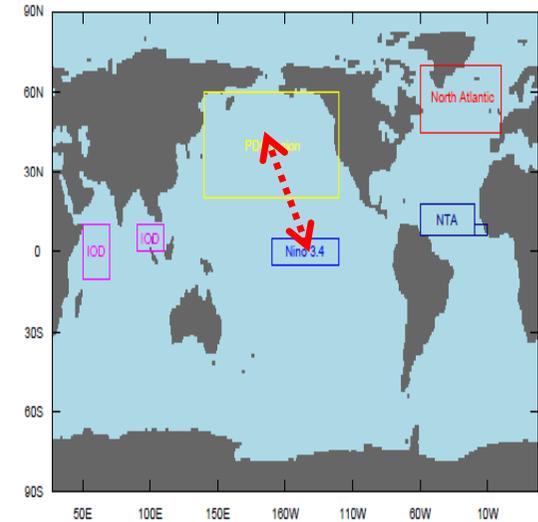
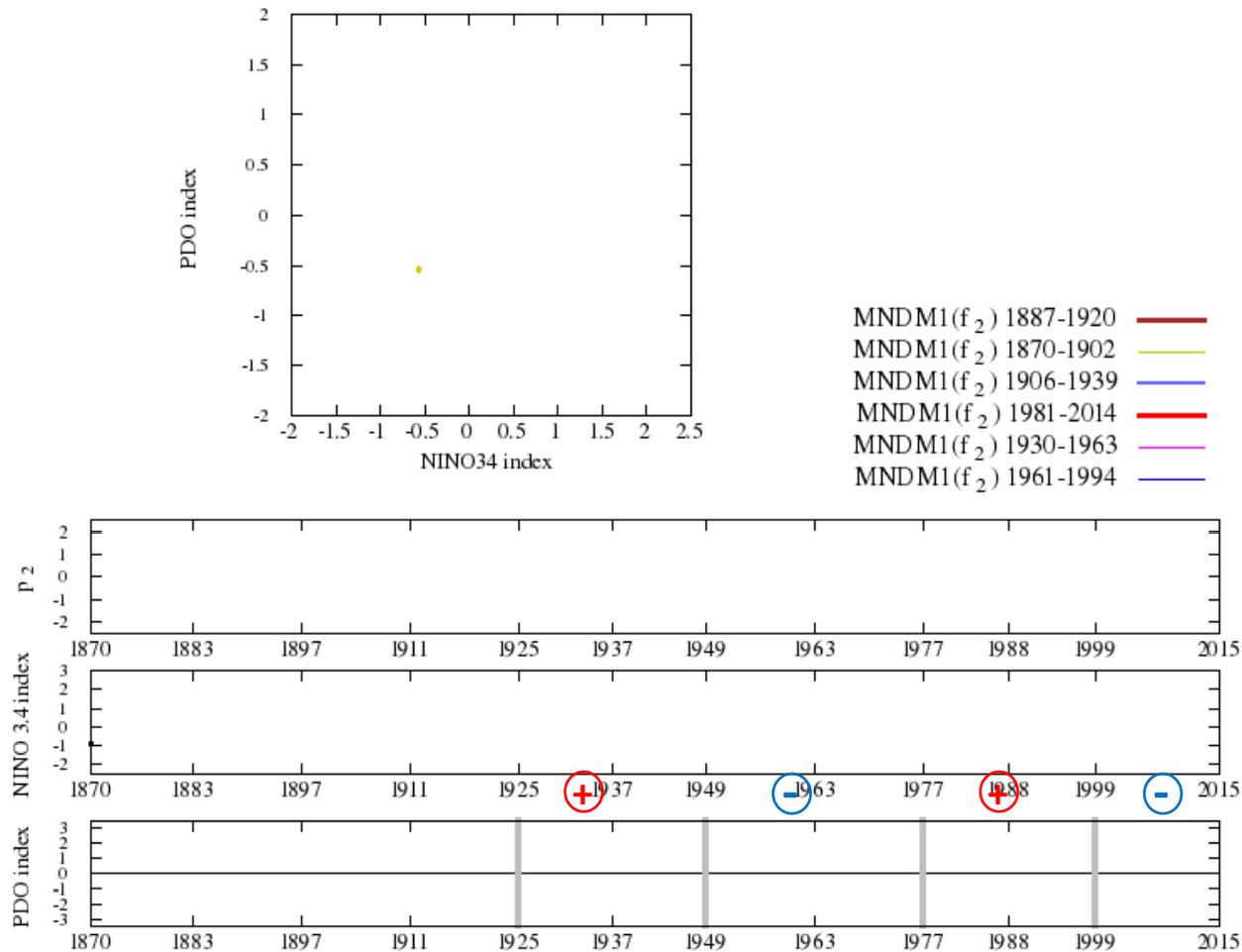


Capturing ENSO, PDO and its transitions in 33-year windows



Global sea surface temperature 1870-2014: interannual and decadal teleconnections and their change

Calculated for: HadISST1: Rayner et al. (2003) Global analyses of sea surface temperature, sea ice, and night marine air temperature since the late nineteenth century J. Geophys. Res. Vol. 108, No. D14, 4407





ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ

1. Фейгин А.М., Мольков Я.И., Мухин Д.Н., Лоскутов Е.М., 2001: Прогноз качественного поведения динамической системы по хаотическому временному ряду. *Изв. ВУЗов – Радиофизика*, т.44, №5-6, с.376-399;
2. Feigin A.M., Molkov Y.I., Mukhin D.N., and Loskutov E.M., 2002 : Investigation of nonlinear dynamical properties by the observed complex behaviour as a basis for construction of the dynamical models of atmospheric photochemical systems. *Faraday Discussions*, Vol.120, p.105-123;
3. Mukhin D.N., Feigin A.M., Loskutov E.M., and Molkov Y.I., 2006: Modified Bayesian approach for the reconstruction of dynamical systems from time series. *Phys. Rev. E*, Vol.73, 036211.
4. E.M. Loskutov, Ya.I. Molkov, D.N. Mukhin, A.M. Feigin, 2008: Markov chain Monte Carlo method in Bayesian reconstruction of dynamical systems from noisy chaotic time series. *Phys. Rev. E*, Vol. 77, 066214,.
5. Molkov, Ya.I., D.N. Mukhin, E.M. Loskutov, A.M. Feigin, and G.A. Fidelin, 2009: Using the minimum description length principle for global reconstruction of dynamic systems from noisy time series. *Phys. Rev. E*, Vol. 80, 046207.
6. Y. I. Molkov, D. N. Mukhin, E. M. Loskutov, R. I. Timushev, A.M. Feigin, 2011: Prognosis of qualitative system behavior by noisy, nonstationary, chaotic time series. *Phys. Rev. E*, Vol. 84, 36215.
7. Ya. I. Molkov, D. N. Mukhin, E. M. Loskutov, A.M. Feigin, 2012 : Random dynamical models from time series. *Phys. Rev. E*, Vol. 85, n.3.
8. Mukhin, D., E. Loskutov, A. Mukhina, A. Feigin, I. Zaliapin, and M. Ghil, 2015: Predicting critical transitions in ENSO models, Part I: Methodology and simple models with memory. *J. Climate*, Vol. 28, No. 5. pp. 1940-1961.
9. D. Mukhin, D. Kondrashov, E. Loskutov, A. Gavrillov, A. Feigin, M. Ghil, 2015: Predicting critical transitions in ENSO models, Part II: Spatially dependent models. *J. Climate*, Vol. 28, No. 5. pp. 1962-1976.
10. Dmitry Mukhin, Andrey Gavrillov, Alexander Feigin, Evgeny Loskutov & Juergen Kurths, 2015: Principal nonlinear dynamical modes of climate variability. *Nature Scientific Reports*, rep. 5, 15510; doi: 10.1038/srep15510.
11. Gavrillov, A., Mukhin, D., Loskutov, E., Volodin, E., Feigin, A., & Kurths, J., 2016: Method for reconstructing nonlinear modes with adaptive structure from multidimensional data. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 26(12), 123101.
12. Mukhin, D., Gavrillov, A., Loskutov, E., Feigin, A., & Kurths, J., 2018: Nonlinear reconstruction of global climate leading modes on decadal scales. *Climate Dynamics*, 51(5–6), 2301–2310.
13. Селезнев А.Ф., Гаврилов А.С., Мухин Д.Н., Лоскутов Е.М., Фейгин А.М., 2018: Моделирование сложных систем по наблюдаемым данным на основе рекуррентных искусственных нейронных сетей. *Изв. ВУЗов. Радиофизика*. Т. 61, № 12. С. 1005–1021.
14. Gavrillov, A., Seleznev, A., Mukhin, D., Loskutov, E., Feigin, A., & Kurths, J., 2019: Linear dynamical modes as new variables for data-driven ENSO forecast. *Climate Dynamics*, 52(3–4), 2199–2216.
15. Mukhin, D., Gavrillov, A., Loskutov, E., Kurths, J., & Feigin, A. 2019: Bayesian data analysis for revealing causes of the middle Pleistocene transition. *Scientific Reports* 2019 9:1, 9(1), 7328. doi.org/10.1038/s41598-019-43867-3
16. Aleksei Seleznev, Dmitry Mukhin, Andrey Gavrillov, Evgeny Loskutov, and Alexander Feigin, 2019: Bayesian framework for simulation of dynamical systems from multidimensional data using recurrent neural network. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 29, 123115; <https://doi.org/10.1063/1.5128372>