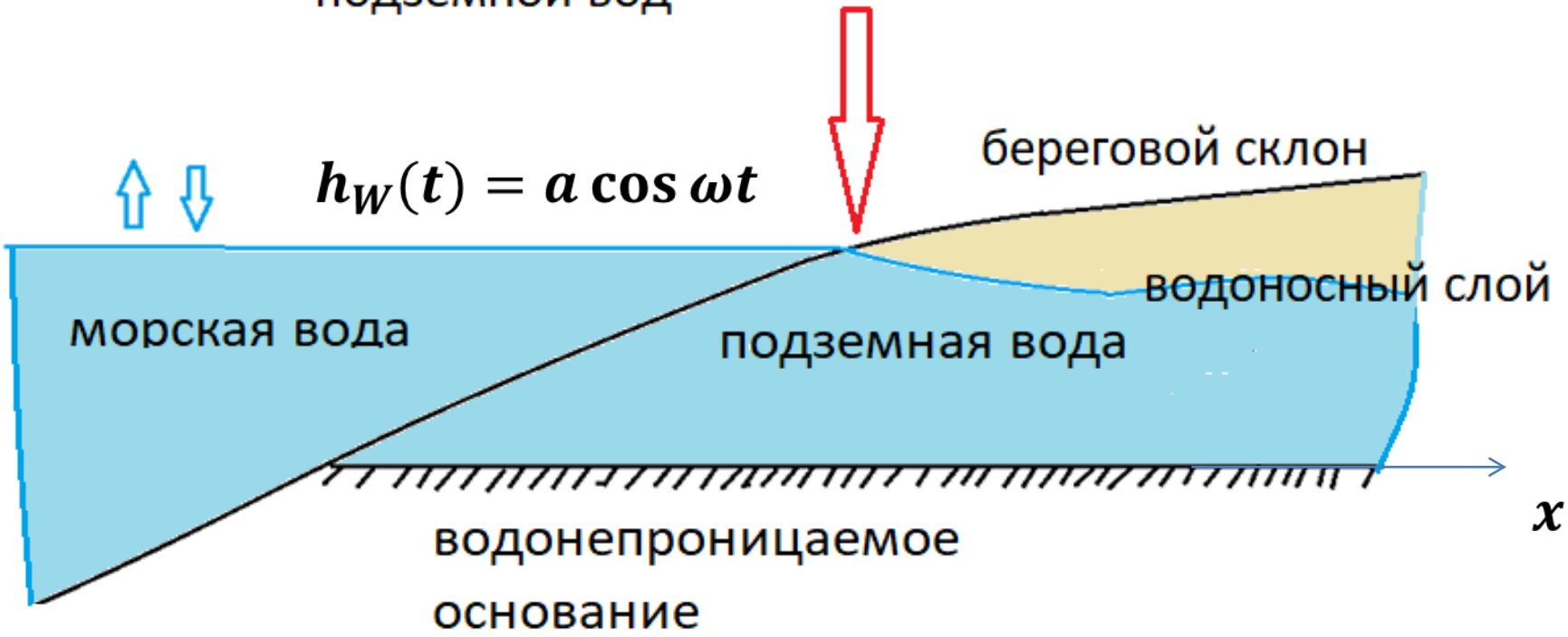
Фильтрация морской воды в пористый берег приливного моря в условиях промерзания прибрежной зоны

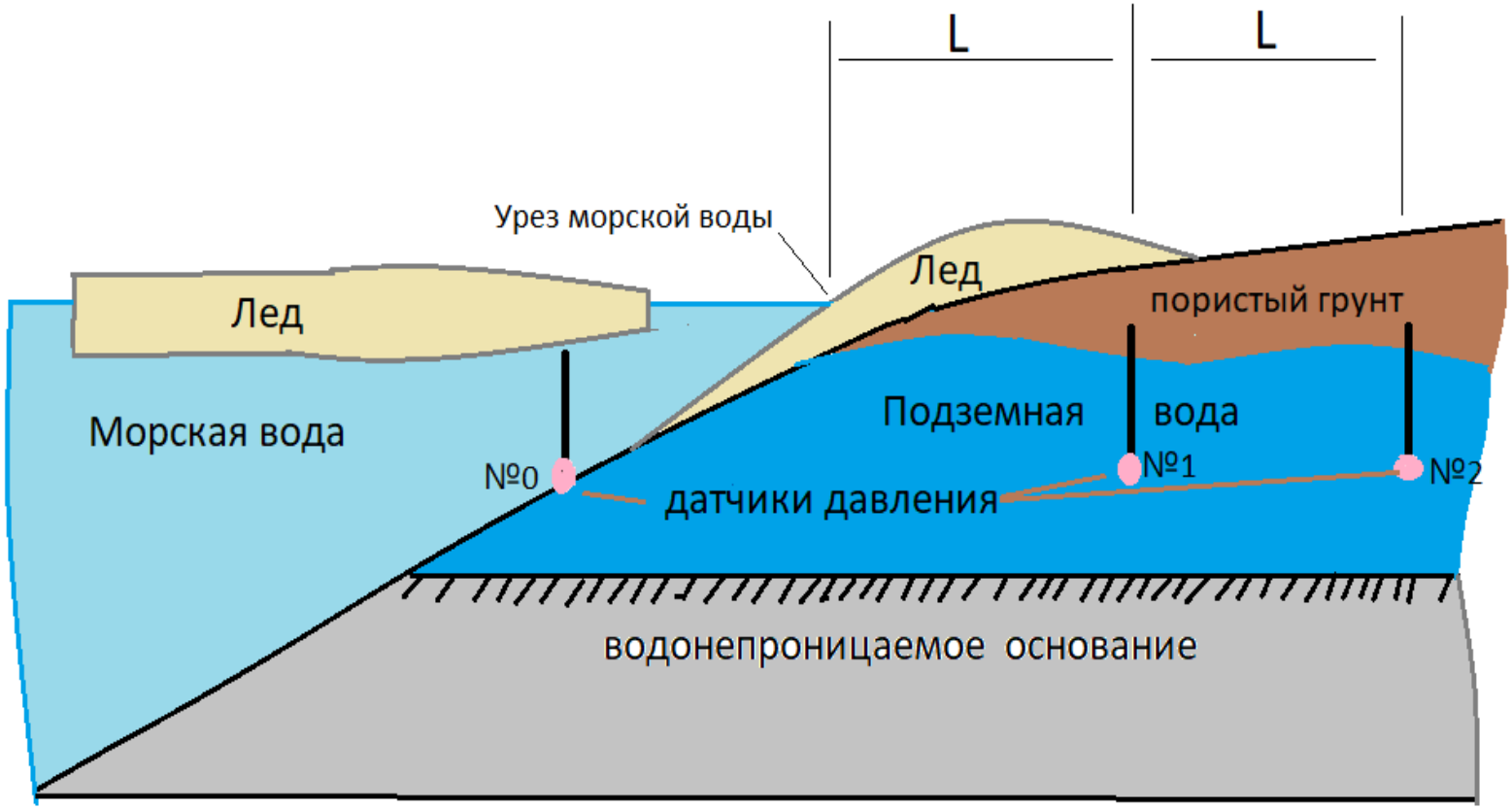
Жмур В.В.

традиционное сопряжение уровней морской и подземной вод

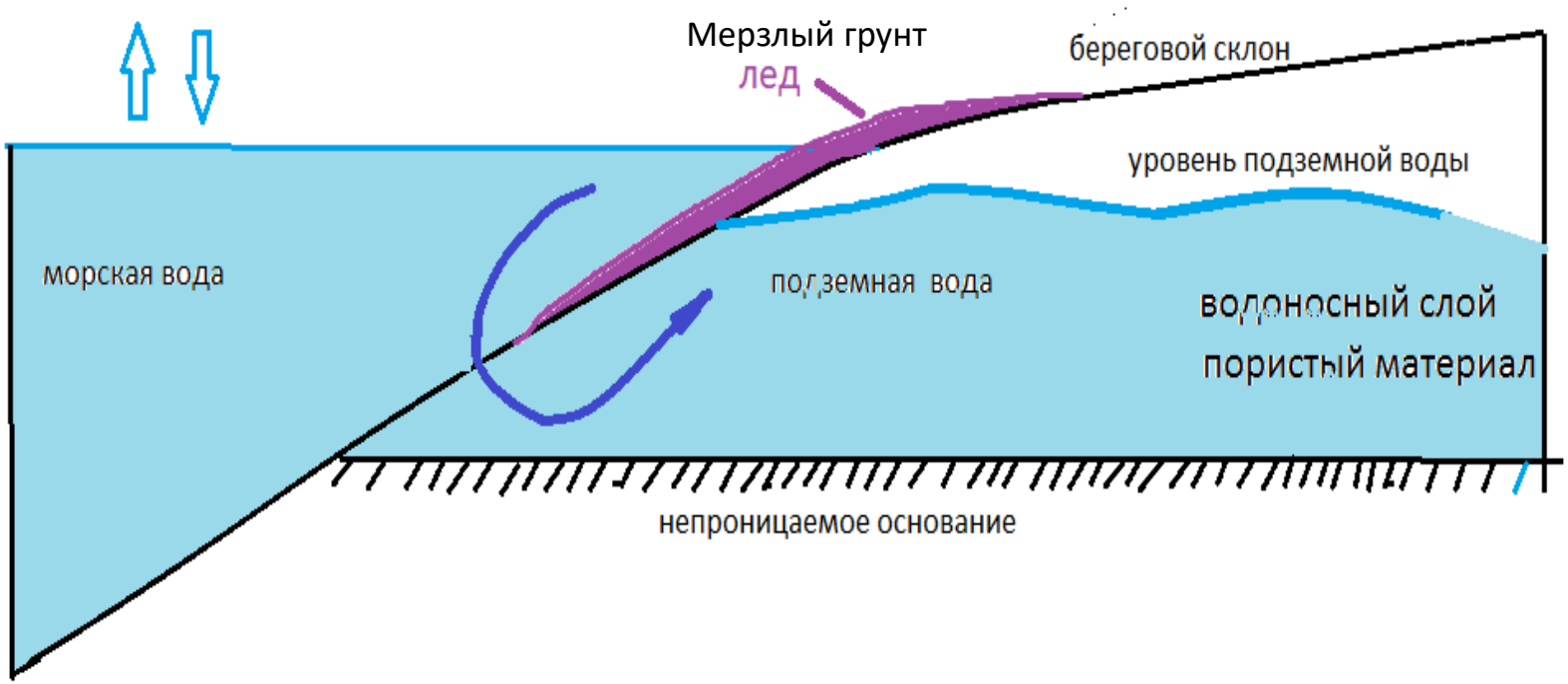


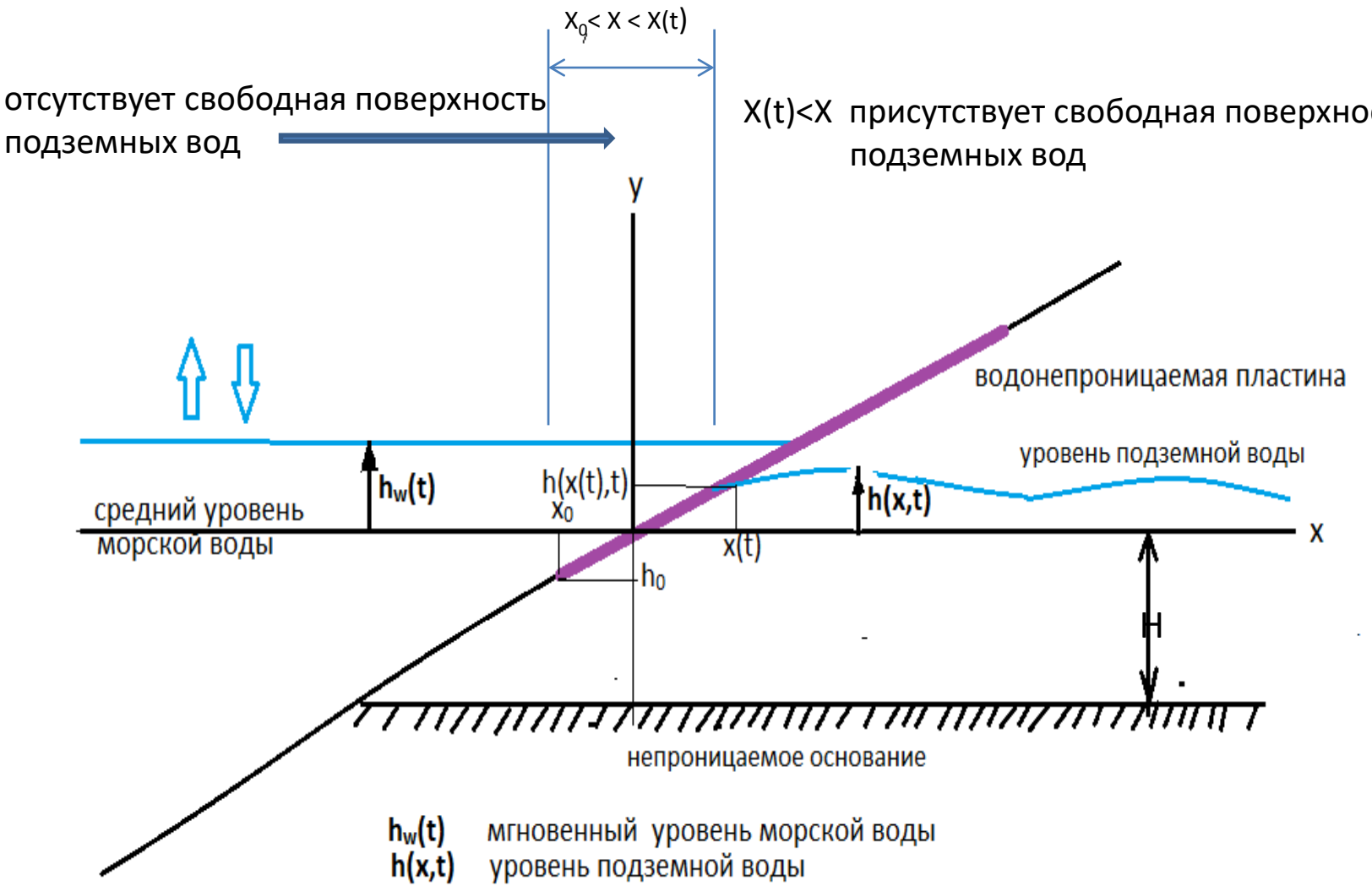
$$h(x,t) = ae^{-kx}\cos(\omega t - kx) + \varepsilon[h_s(x) + h_w(x,t)] \qquad k = \sqrt{\frac{\omega}{2KH}}$$

Упрощенная схема полигона на Шпицбергене



Проблема сопряжения уровня морской воды и подземной воды в присутствии льда и мерзлого грунта





$h_w(t)$ мгновенный уровень морской воды
$h(x,t)$ уровень подземной воды
(x_0, h_0) координаты нижнего края водонепрницаемой пластины
$x(t)$ горизонтальная переменная координата уреза подземной воды
$h(x(t),t)$ переменная вертикальная координата уреза подземной воды

Математическая модель

Потенциал $\boldsymbol{\varphi}$ движения подземных вод. Поровое давление $\boldsymbol{p}$ в пористой среде:

$$\varphi = \frac{p}{\rho g} + y$$

$\uparrow y$

Закон Дарси

$$\vec{u} = -C\, grad\varphi = -\frac{C}{\rho g} grad\,(p + \rho g y)$$

$\boldsymbol{C}$-коэффициент фильтрации, имеющий размерность скорости $\left[\frac{M}{C}\right]$

В силу условия несжимаемости воды $div\,\vec{u} = 0$ потенциал $\boldsymbol{\varphi}$ и давление $\boldsymbol{p}$ являются гармоническими функциями:

$$\Delta\varphi = 0 \qquad \Delta p = 0$$

Δ - оператор Лапласа. На свободной поверхности подземных вод $y = h(x,t)$ должны выполняться дополнительные условия: **кинематическое**

$$\frac{\partial h}{\partial t} - C\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} + C\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$

и **динамическое** (постоянство давления)

$$m\frac{\partial\varphi}{\partial t} = C\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] - C\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

$\boldsymbol{m}$ – пористость среды.

На твердой поверхности условие непротекания $\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{grad\varphi} = \boldsymbol{0}$

Приближение мелкой воды - большой характерный горизонтальный размер L по сравнению с вертикальным размером H: $\boldsymbol{H} \ll \boldsymbol{L}$.

Справедливо **приближение гидростатики**, горизонтальная компонента скорости $\boldsymbol{u(x,t)}$, подчиняющаяся закону Дарси, в нашем случае **не зависит от вертикальной координаты** $\boldsymbol{y}$ и выражается через свободную поверхность $\boldsymbol{h(x,t)}$ соотношением

$$\boldsymbol{u = -C\,\frac{\partial h}{\partial x}}$$

Из закона сохранения массы следует **уравнение Буссинеска**

$$\boldsymbol{m\frac{\partial h}{\partial t} = C\frac{\partial}{\partial x}\left((H+h)\frac{\partial h}{\partial x}\right)}$$

Введем еще одну характеристику

$$\boldsymbol{K = \frac{C}{m} = \frac{\rho g}{\mu m}\,k}$$

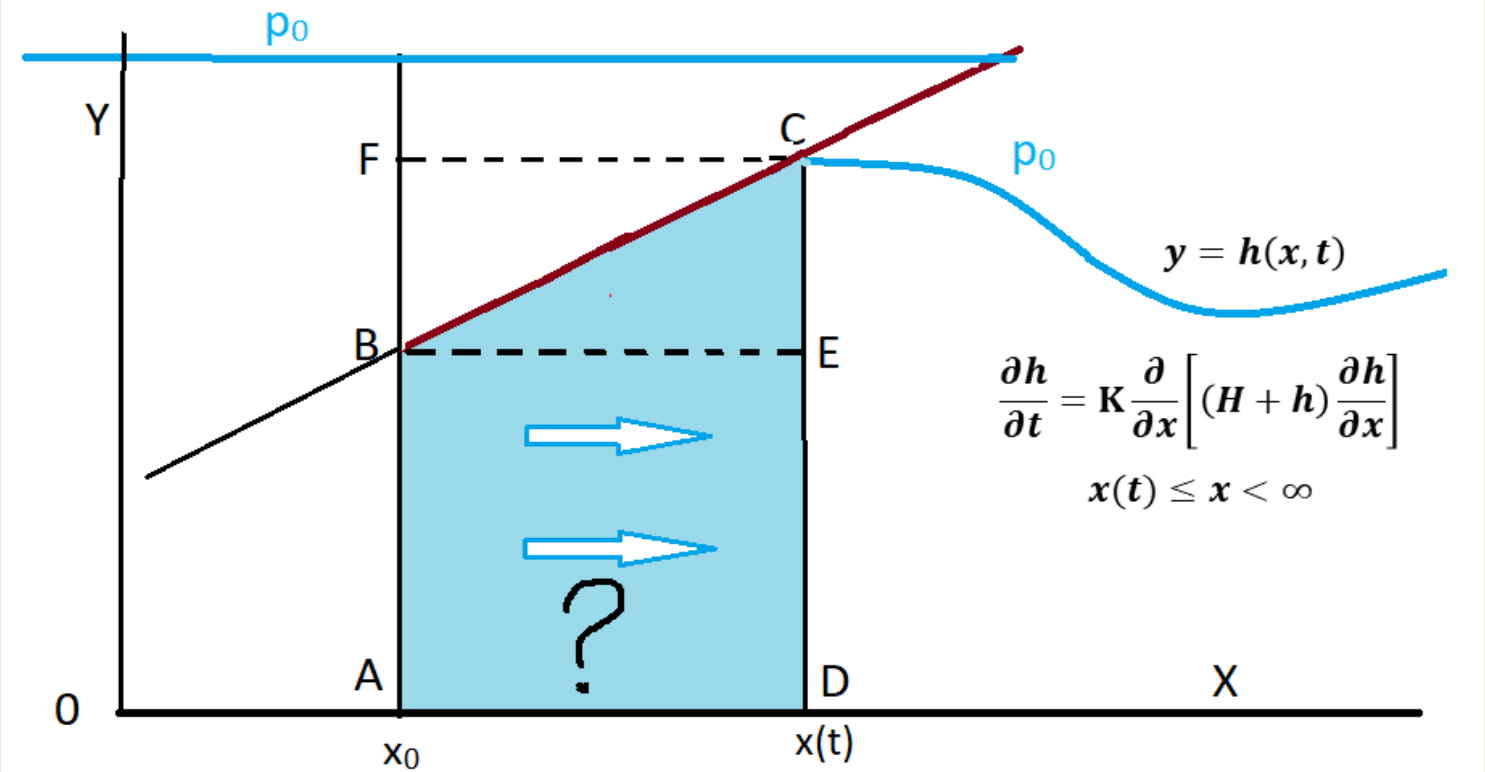
$\boldsymbol{\rho}$ -плотность воды, $\boldsymbol{g}$ - ускорение свободного падения, $\boldsymbol{\mu}$ – коэффициент динамической вязкости воды, $\boldsymbol{k}$ - коэффициент проницаемости , являющийся характеристикой пористой среды. Все перечисленные характеристики принимаем за постоянные величины.

Постановка задачи. Требуется решить нелинейное уравнение теплопроводности, описывающее поведение поверхности подземных вод $\boldsymbol{h(x,t)}$:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \mathrm{K}\frac{\partial}{\partial x}\left[(H+h)\frac{\partial h}{\partial x}\right]$$

в диапазоне $x(t) \le x < \infty$, т.е. там, где существует свободная поверхность подземной воды.

На участке $x_0 \le x < x(t)$ подземная вода есть, но **свободная поверхность отсутствует**, поэтому здесь подход с уравнением Буссинеска неприменим. Требуется использовать другие методы, например, решать задачу через потенциал φ или что-то еще .



Вопросы

1. Что делать с областью $x_0 < x < x(t)$
2. Как найти зависимость $x(t)$
3. Какие условия для уравнения Буссинеска поставить при $x = x(t)$ и $x = x_0$

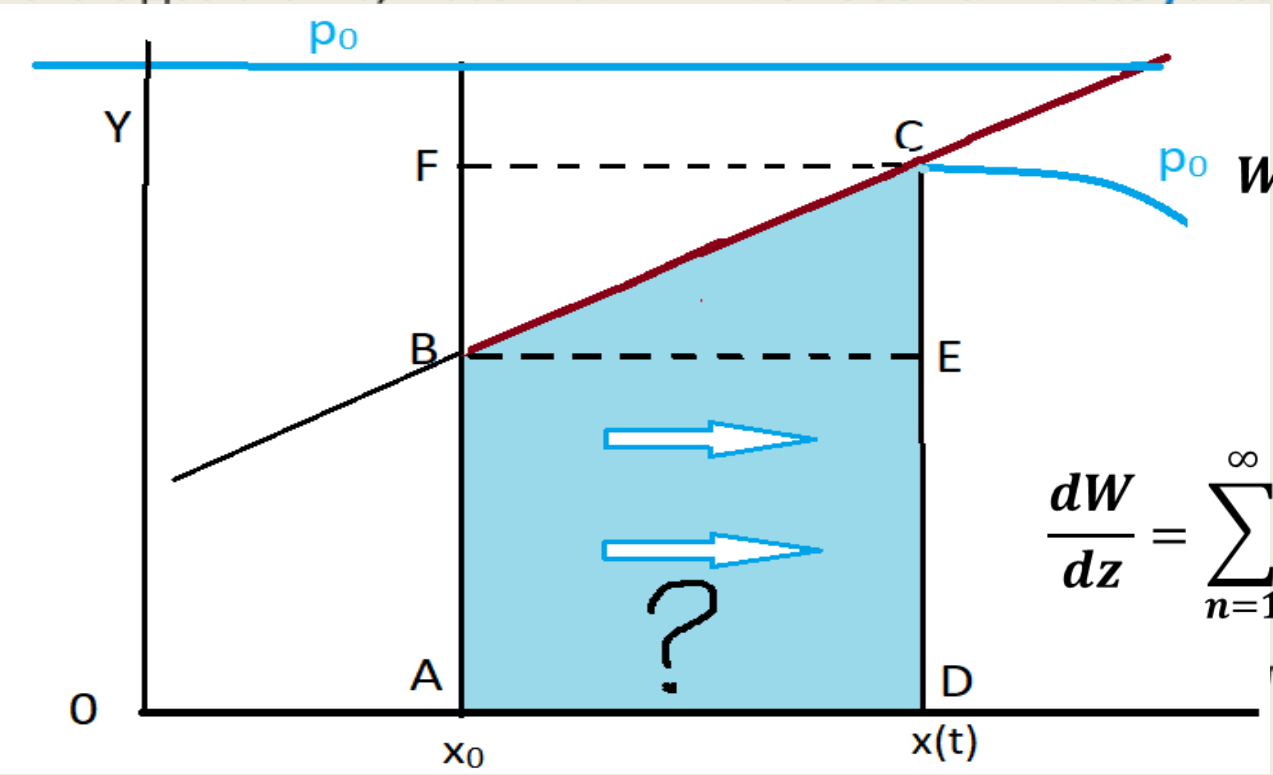
Попытка в области $x_0 < x < x(t)$ использовать потенциал $\varphi(x, y, t)$.

Время t - параметр. На линиях **AB** и **CD** потребуем гидростатику

$$\varphi(x_0, y, t) = h_w(t), \quad \varphi(x(t), y, t) = h(x(t), t).$$

Следствие - на линиях **AB, CD, AD** присутствует только x- компонента скорости.

Этого достаточно, чтобы **на линии BC не выполнялось условие непротекания**.



$$W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

$$z = x + iy$$

$$\frac{dW}{dz} = u - iv$$

$$\frac{dW}{dz} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{-n} + iB_{-n}}{z^n} + A_0 + iB_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + iB_n) z^n$$

Использование горизонтального потока скорости в области $ABCD$ для получения граничного условия для уравнения Буссинеска при $x = x(t)$

В области $ABCD$ поток скорости $\boldsymbol{Q}$ одинаков для всех x из диапазона $x_0 < x < x(t)$ (время t параметр)

$$\big(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\big)\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{t})$$

Далее t опустим для краткости. Здесь $y = \varphi(x)$ уравнение нижней границы водонепроницаемой прослойки (лед, мерзлый грунт). На рисунках это прямая линия $y = \varphi(x) = x \cdot tg\alpha$. Однако, на данном этапе мы можем ее считать произвольной функцией от x, такой чтобы существовала обратная функция $x = \varphi^{-1}\,(y) = F(y)$. Отсюда

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{H} + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})}$$

С другой стороны из закона Дарси эта же скорость связана с давлением $\boldsymbol{p}$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{\rho g}} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x}} (\boldsymbol{p} + \boldsymbol{\rho g y})$$

В результате получаем связь

$$\frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{H} + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})} = -\frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{\rho g}} \frac{\boldsymbol{\partial p}}{\boldsymbol{\partial x}}$$

и интегральное соотношение

$$\int_{\boldsymbol{x_0}}^{\boldsymbol{x(t)}} \frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{h} + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{dx} = -\boldsymbol{C}(\boldsymbol{h} - \boldsymbol{h_w})$$

$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t})$ вертикальная координата уреза подземной воды

В результате получен горизонтальный расход скорости в области $ABCD$:

$$\boldsymbol{Q = \frac{-C(h-h_w)}{\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{h+\varphi(x)}}}$$

Заменим переменную интегрирования с x на y с помощью связи $x = F(y)$ и окончательно получим выражение

$$\boldsymbol{Q = \frac{-C(h-h_w)}{\int_{H+h_0}^{H+h} \frac{F'(y)dy}{H+y}}}$$

Пусть функция $\boldsymbol{F'(y)}$ раскладывается в ряд Тейлора по $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{F'(y) = ctg\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}_n y^n}$$

тогда вышенаписанный интеграл вычисляется.

Вернемся к полученному соотношению для потока скорости $\boldsymbol{Q}$. Это соотношение справедливо в любом вертикальном сечении области $ABCD$, включая границу $\boldsymbol{x = x(t)}$. На этой же границе можно вычислить поток $\boldsymbol{Q}$, используя параметры уравнения Буссинеска

$$\boldsymbol{Q = -C(H+h)\frac{\partial h}{\partial x}}$$

Приравняв выражения для , выведенные двумя разными способами, мы получим соотношение , справедливое только в одной точке $x = x(t)$.

$$(H+h)\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{(h-h_w)}{\int_{H+h_0}^{H+h}\frac{F'(y)dy}{H+y}}$$

которое естественно трактовать как граничное условие для уравнения Буссинеска при $x = x(t)$.

Окончательная математическая формулировка задачи

Решить уравнение Буссинеска (нелинейное уравнение теплопроводности), описывающее поведение свободной поверхности подземных вод $h(x,t)$:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \mathrm{K}\frac{\partial}{\partial x}\left[(H+h)\frac{\partial h}{\partial x}\right]$$

в диапазоне переменной $x(t) \le x < \infty$ с нелинейным граничным условием на подвижной границе $x = x(t)$:

$$(H+h)\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{(h-h_w)}{\int_{H+h_0}^{H+h}\frac{F'(y)dy}{H+y}}$$

Поведение самой границы $x = x(t)$ следует также найти во время решения.

Важным параметром, благодаря которому происходит обмен водой между морем и прибрежным водоносным слоем является перепад уровней морской воды и уреза подземной воды $(h - h_w)$, который входит в граничное условие.

Если ограничится плоским профилем нижней границы водонепроницаемой пластины, то интеграл вычисляется

$$\int_{H+h_0}^{H+h} \frac{F'(y)dy}{H+y} = ctg\alpha \cdot \ln\frac{H+h}{H+h_0}$$

и граничное условие на подвижной границе $x = x(t)$ примет вид

$$(H+h)\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{(h-h_w)}{\ln\frac{H+h}{H+h_0}} tg\alpha$$

Неизвестная подвижная граница $x = x(t)$ сильно усложняет решение задачи. Возможным вариантом , позволяющим продвинуться в решении проблемы , является использование подвижной системы координат $X = x - x(t)$, в которой уравнение Буссинеска видоизменится

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \dot{x}(t)\frac{\partial h}{\partial X} = \mathrm{K}\frac{\partial}{\partial X}\left[(H+h)\frac{\partial h}{\partial X}\right] \qquad 0 < X < \infty$$

а граничное условие останется прежним, но должно выполняться в неподвижной точке X=0

$$(H+h)\frac{\partial h}{\partial X} = \frac{(h-h_w)}{\int_{H+h_0}^{H+h}\frac{F'(y)dy}{H+y}}$$

Линейная постановка

$$\frac{\partial h}{\partial t} = KH\frac{\partial^2 h}{\partial X^2} \qquad 0 < X < \infty$$

Граничное условие при X=0

$$\frac{\partial h}{\partial X} - S(h - h_w) = 0 \qquad S = -\frac{tg\alpha}{h_0} > 0, \qquad h_0 < 0$$

Задача без начальных условий

$$h_w = a\cos\omega t$$

$$h(X,t) = Ae^{-kX}\cos(\omega t - kX) + Be^{-kX}\sin(\omega t - kX) \qquad k = \sqrt{\frac{\omega}{2KH}}$$

$$A = \frac{(1+G)G}{1+(1+G)^2}a, \qquad B = \frac{G}{1+(1+G)^2}a, \qquad G = \frac{S}{k}$$

Свойства решений

1). Глубина волнового проникновения колебаний в водоносный слой (ширина скин-слоя) $L=\frac{1}{k}=\sqrt{\frac{2KH}{\omega}}$ не зависит от наличия льда

2). Коэффициент ослабления амплитуды колебаний уровня подземных вод

$$\mathbb{K}=\sqrt{\frac{A^2+B^2}{a^2}}=\frac{G}{\sqrt{1+(1+G)^2}}<1$$

3).Фазовый сдвиг

$$h(0,t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t=\sqrt{A^2+B^2}\cos(\omega t-\varphi_0)$$
$$=\sqrt{A^2+B^2}\cos[\omega(t-t_0)]$$

$$tg\,\varphi_0=\frac{1}{1+G}<1,\qquad t_0=\frac{\varphi_0 T}{2\pi}\qquad (t_0)_{max}=\frac{T}{8}$$

Функция $\mathbb{K}=\frac{G}{\sqrt{1+(1+G)^2}}$ монотонно растет от **0** до **1** в диапазоне значений $0<G<\infty$

Перепад уровней морской воды и уреза подземной воды

$h(0,t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ уровень уреза подземной воды

$h_w = a\cos\omega t$ уровень морской воды

$$\delta h = h_w(t) - h(0,t) = a\frac{\sqrt{(2+G)^2+G^2}}{1+(1+G)^2}\cos(\omega t + \psi)$$

$$tg\,\psi = \frac{G}{2+G} \qquad \psi_{max} = \frac{\pi}{4} \text{ при } G \to \infty$$

Функция $\mathbb{M} = \frac{\sqrt{(2+G)^2+G^2}}{1+(1+G)^2}$ с ростом G монотонно убывает от 1 до 0 в диапазоне значений $0 < G < \infty$.

$\mathbb{M}$ **- это безразмерный перепад амплитуды колебаний уровней морской воды и уреза подземных вод**

$$\frac{\delta h}{a} = \mathbb{M}\cos(\omega t + \psi)$$

Численные значения параметров задачи для различных G

1) $\mathbb{K} = \frac{G}{\sqrt{1+(1+G)^2}}$ коэффициент ослабления амплитуды колебаний уровня подземных вод

2) φ_0 сдвиг фаз между колебанием уровня моря и колебанием уреза подземных вод

3) t_0 временная задержка колебанием уреза подземных вод относительно колебаний уровня моря для полусуточного лунного прилива

4) $\mathbb{M} = \frac{\sqrt{(2+G)^2+G^2}}{1+(1+G)^2}$ относительный перепад уровней морской воды и уреза подземных вод

5) ψ сдвиг фаз между перепадом уровней морской и подземных вод и движением морской поверхности

G	$\mathbb{K}$	φ_0		t_0	$\mathbb{M}$	ψ	
		град	рад			град	рад
0	0	45.0	$\pi/4$	1.5 час	1	0	0
0.1	0.07	42.4	0.74	1.46 час	0.95	2.9	0.05
0.5	0.28	33.8	0.59	1.16 час	0.78	11.5	0.20
1	0.45	26.4	0.46	0.91 час	0.63	18.3	0.32
5	0.82	9.7	0.17	20 мин	0.23	35.5	0.62
10	0.90	5.2	0.09	11 мин	0.13	39.5	069
50	0.98	1.1	0.02	3.3 мин	0.03	44.1	0.77
∞	1	0	0	0	0	45	0.79

Рассуждения о величине параметра G

$$G = \frac{tg\alpha}{|h_0|k} \qquad L = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{2KH}{\omega}}$$

$$a < |h_0| < H, \quad h_0 < 0, \qquad |h_0|k \ll 1$$

Диапазон изменений параметра G: **0< G<∞**

К росту G приводят следующие факторы:

1) **Неглубокое залегание кромки льда** $h_0 \approx -a$,
2) **Большой угол α.**

К уменьшению G приводят

1) Глубокое залегание кромки льда $h_0 \cong -H$

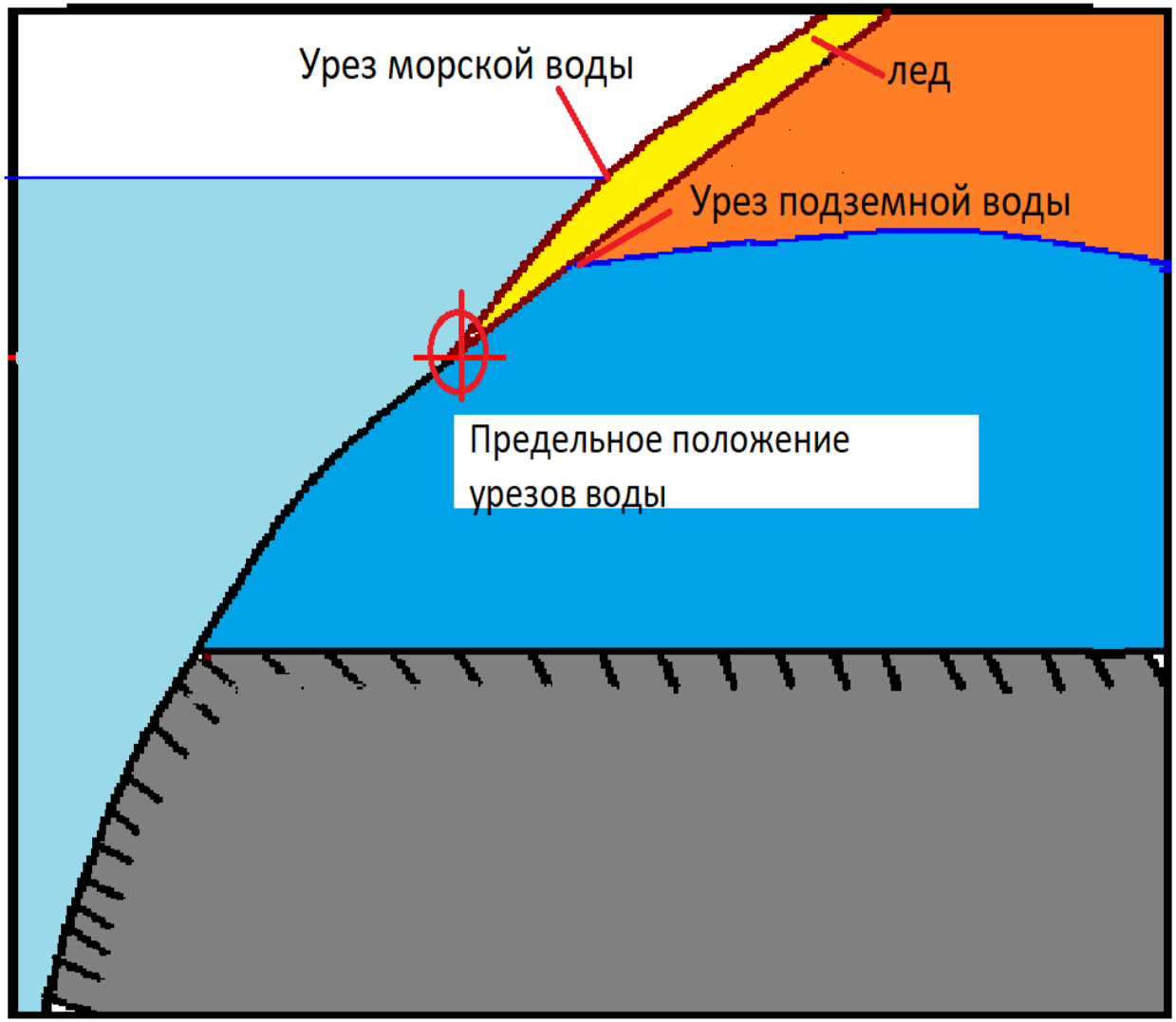
2) Малый угол α.

Оценки рассматриваемых эффектов на полигоне о. Шпицберген

Уклон дна $\alpha = 7^0$, глубина залегания водонепроницаемой плиты $H = 6$м, глубина волнового проникновения колебаний уровня в водоносный слой по горизонтали $L = 53$м. Предполагаемая глубина расположения кромки льда - $h_0 = 1$м и 2м ниже среднего уровня моря

h_0	G	Коэффициент ослабления проникающих в водоносный слой волн	Время задержки волнового сигнала на урезе воды	Коэффициент ослабления колебаний перепада уровней	Время задержки колебаний перепада уровней
1м	6.4	0.84	16 мин	0.19	1 час 17 мин
2м	3.2	0.73	28 мин	0.33	1 час 5 мин

Допустимое положение урезов воды для использования выведенного граничного условия



Естественное ограничение на параметры задачи

$$a \le |h_0| < H$$
$$h_0 < 0$$

Оба уреза не долж опускаться ниже кромки льда

Выводы

Наличие льда и мерзлого грунта в прибрежной зоне моря как препятствия для фильтрации морской воды в береговой грунт приводит к уменьшению водообмена между морем и прибрежным подземным водоносным слоем, а также к дополнительной временной задержке сигнала в подземном водоносном слое, связанным с повышением или понижением уровня моря. Наличие льда и мерзлого грунта препятствует выравниванию уровней воды в море и подземном водоносном слое, что приводит заметному периодическому перепаду уровней моря и водоносного слоя при приливных колебаниях уровня моря.


Спасибо