Нелинейные эффекты подземной гидродинамики

Жмур В.В.

Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН
Московский физико-технический институт

zhmur-vladimir@mail.ru

Основные понятия (терминология) подземной гидродинамики

Подземная гидромеханика - это наука, изучающая движение жидкостей и газов в пористых средах.

Пористая среда представляет собой твердое тело («скелет») , пронизанное системой сообщающихся между собой пустот (пор) , имеющих нерегулярный характер и делающих среду проницаемой для жидкостей и газов.

По́ристость m — доля объёма пор в общем объёме пористого тела $m = \frac{V_p}{V}$

Фильтрация – это движение подземных вод в пористых (или трещиноватых) породах под действием силы тяжести или давления.

Скорость фильтрации u, определяемая объёмным расходом жидкости Q $[м^3]$ через единицу площади поперечного сечения пласта S $[м^2]$ за единицу времени. Скорость фильтрации всегда меньше истинной скорости движения жидкости: $u = \frac{Q}{S \cdot t}$

Закон Дарси - основной закон фильтрации подземных вод

Потенциал $\boldsymbol{\varphi}$ движения подземных вод. Поровое давление $\boldsymbol{p}$ в пористой среде:

$$\boldsymbol{\varphi = \frac{p}{\rho g} + y}$$

$\uparrow \boldsymbol{y}$

Закон Дарси

$$\boldsymbol{\vec{u} = -C\ grad\varphi = -\frac{C}{\rho g} grad\ (p + \rho g y)}$$

$\boldsymbol{C}$-коэффициент фильтрации, имеющий размерность скорости $\left[\frac{M}{C}\right]$

В силу условия несжимаемости воды $\boldsymbol{div\vec{u} = 0}$ потенциал $\boldsymbol{\varphi}$ и давление $\boldsymbol{p}$ являются гармоническими функциями:

$$\boldsymbol{\Delta\varphi = 0 \qquad \Delta p = 0}$$

Δ - оператор Лапласа. На свободной поверхности подземных вод $\boldsymbol{y = h(x,t)}$ должны выполняться дополнительные условия: **кинематическое**

$$\boldsymbol{\frac{\partial h}{\partial t} - C\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} + C\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0}$$

и **динамическое** (постоянство давления)

$$\boldsymbol{m\frac{\partial\varphi}{\partial t} = C\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] - C\frac{\partial\varphi}{\partial y}}$$

$\boldsymbol{m}$ – пористость среды.

На твердой поверхности условие непротекания $\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{grad\varphi} = \mathbf{0}$

Математическая постановка задачи

В области, где присутствует подземная вода, решить уравнение Лапласа

$$\boldsymbol{\Delta\varphi} = \mathbf{0}$$

На твердой поверхности должны выполняться условия непротекания

$$\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{grad\varphi} = \mathbf{0}$$

На свободной поверхности подземных вод $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ (если таковая присутствует) должны выполняться **кинематическое**

$$\frac{\partial h}{\partial t} - C\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} + \mathrm{C}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

и **динамическое** условия

$$m\frac{\partial \varphi}{\partial t} = C\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] - C\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Проблемы: *В случае присутствия свободной поверхности область решения не определена. Эта поверхность может двигаться и деформироваться. На этой неизвестной поверхности следует удовлетворить двум нелинейным граничным условиям.*

Способ решить проблему – приближение мелкой воды

Приближение мелкой воды - большой характерный горизонтальный размер L по сравнению с вертикальным размером H: $\boldsymbol{H \ll L}$.

Справедливо **приближение гидростатики**, горизонтальная компонента скорости $\boldsymbol{u(x,t)}$, подчиняющаяся закону Дарси, в нашем случае **не зависит от вертикальной координаты** $\boldsymbol{y}$ и выражается через свободную поверхность $\boldsymbol{h(x,t)}$ соотношением

$$\boldsymbol{u = -C\,\frac{\partial h}{\partial x}}$$

Из закона сохранения массы следует **уравнение Буссинеска**

$$\boldsymbol{m\frac{\partial h}{\partial t} = C\frac{\partial}{\partial x}\left((H+h)\frac{\partial h}{\partial x}\right)}$$

Введем еще одну характеристику

$$\boldsymbol{K = \frac{C}{m} = \frac{\rho g}{\mu m}\,k}$$

$\boldsymbol{\rho}$ -плотность воды, $\boldsymbol{g}$ - ускорение свободного падения, $\boldsymbol{\mu}$ – коэффициент динамической вязкости воды, $\boldsymbol{k}$ - коэффициент проницаемости , являющийся характеристикой пористой среды$[\text{м}^2]$. Все перечисленные характеристики принимаем за постоянные величины.

Постановка задачи

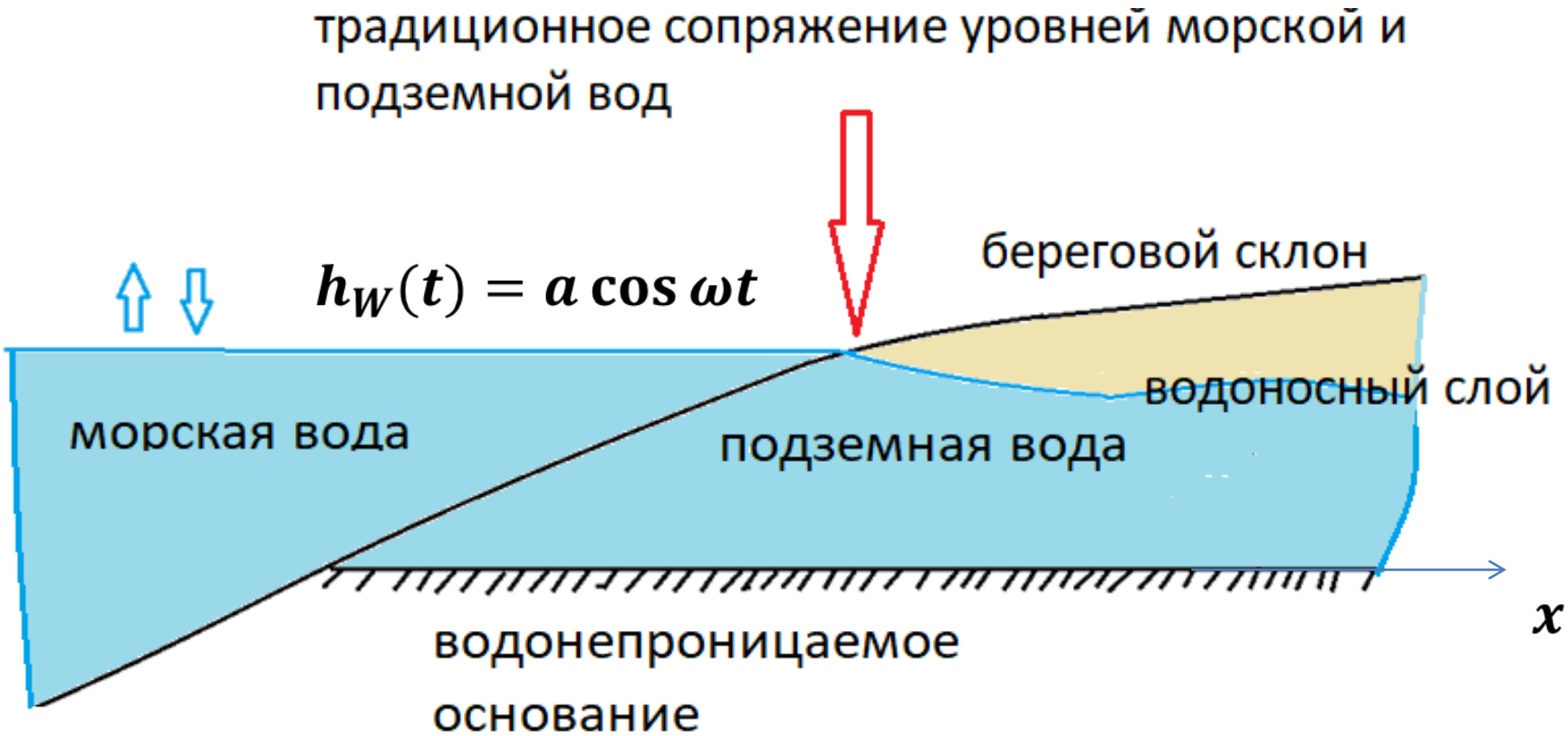
Требуется решить нелинейное уравнение теплопроводности, описывающее поведение поверхности подземных вод $\boldsymbol{h(x,t)}$ **:**

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \mathrm{K}\frac{\partial}{\partial x}\left[(H+h)\frac{\partial h}{\partial x}\right]$$

в диапазоне значений $\boldsymbol{x}$, где существует свободная поверхность подземной воды.

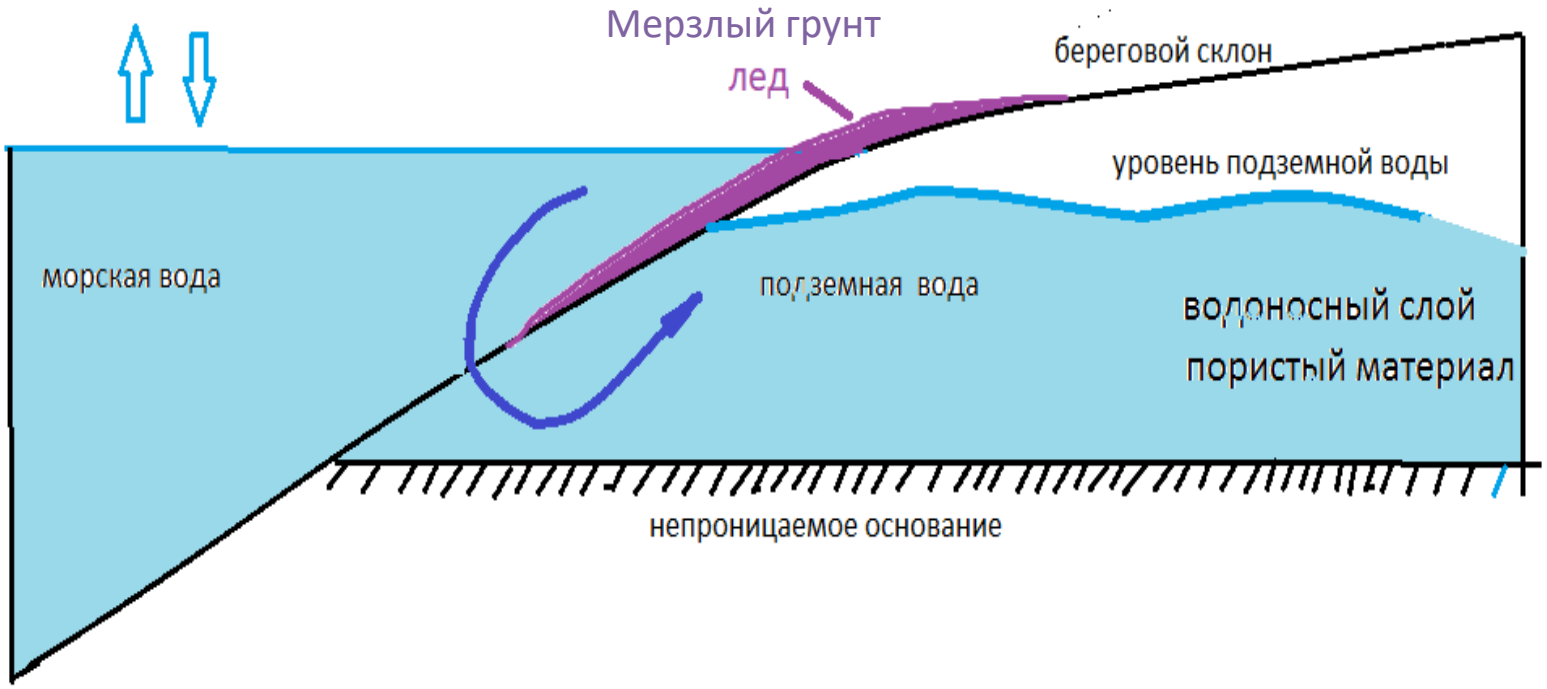
Проблема: *что делать с областью, где нет свободной поверхности подземных вод.*

Пример: область решения уравнения Буссинеска задается $x(t) \le x < \infty$

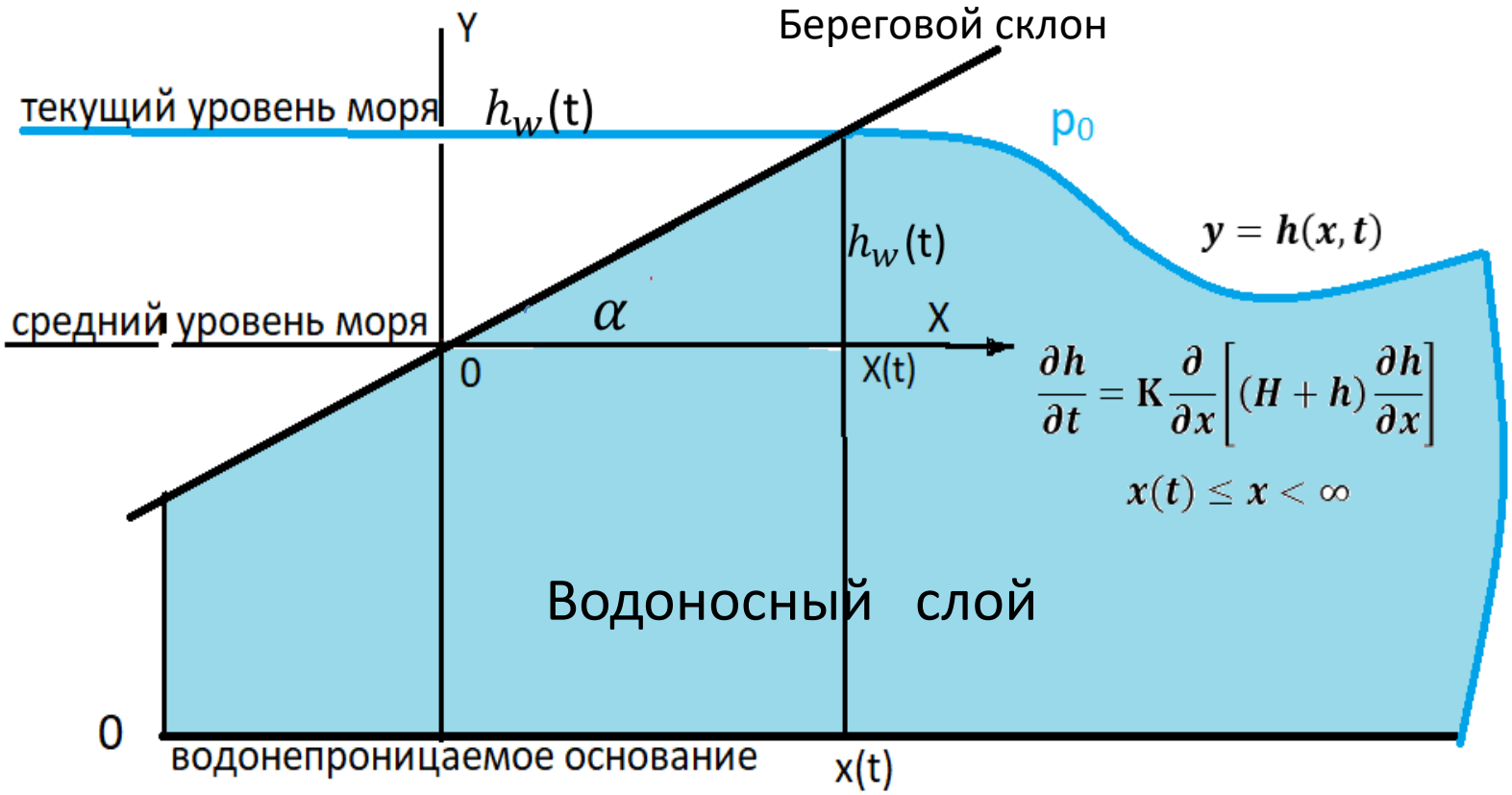


$$h(x,t) = ae^{-kx}\cos(\omega t - kx) + \varepsilon[h_s(x) + h_w(x,t)] \qquad k = \sqrt{\frac{\omega}{2KH}}$$

Пример: Область решения для уравнения Буссинеска заранее неизвестна. Кроме того существует область, где нет свободной поверхности, но течение там определять тоже нужно.



Далее излагается ситуация, когда область решения уравнения Буссинеска известна $x(t) < x < L_0$, но переменна во времени



$$x(t) = h_w(t) \cdot ctg\alpha = a\ cos\omega t \cdot ctg\alpha$$

Постановка задачи в неподвижной системе координат

$$\frac{\partial h}{\partial t} = K\frac{\partial}{\partial x}\left[(H+h)\frac{\partial h}{\partial x}\right] \qquad x(t) < x < L_0 \text{ (допустимо } L_0 = \infty)$$

Граничное условие на подвижной границе $h(x,t)_{x=x(t)}$=$h_w(t)$

Граничное условие при $x = L_0$ $\quad \frac{\partial h(x,t)}{\partial x}_{x=L_0} = 0$

$$x(t) = a\,cos\omega t \cdot ctg\alpha \qquad h_w(t) = a\,cos\omega t$$

Постановка задачи в подвижной системе координат

В случае бесконечной ширины водоносного слоя $L_0 = \infty \quad X = x - x(t)$

$$\frac{\partial h(X,t)}{\partial t} - \dot{x}(t)\frac{\partial h(X,t)}{\partial X} = K\frac{\partial}{\partial X}\left\{(H+h)\frac{\partial h(X,t)}{\partial X}\right\}$$

Граничное условие на бывшей подвижной границе $h(X,t)_{X=0}$ =$h_w(t)$

Граничное условие на бесконечности $\frac{\partial h(X,t)}{\partial X}_{X=\infty} = 0$

Здесь $\dot{x}(t) = -a\omega \cdot sin\omega t \cdot ctg\alpha$

Линейная задача

$$\frac{\partial h(X,t)}{\partial t} = KH\frac{\partial^2 h(X,t)}{\partial X^2}$$

$$h(X,t)_{X=0} = h_w(t) = a\cos\omega t \qquad \frac{\partial h(X,t)}{\partial X}_{X=\infty} = 0$$

Решение

$$h(x,t) = ae^{-kx}\cos(\omega t - kx) \qquad k = \sqrt{\frac{\omega}{2KH}} \qquad L = \frac{1}{k}$$

L глубина проникновения волнового возмущения в берег по горизонтали – естественный характерный горизонтальный размер задачи.

Уравнения в безразмерном виде

Безразмерная горизонтальная координата $\xi = kX = \frac{1}{L}X$. Безразмерный уровень подземных вод η вводится как $h = a\eta$. В качестве безразмерного времени рассмотрим $\tau = \omega t$. В результате приведем безразмерные уравнения , описывающие поведение уровня подземных вод для случая бесконечно широкого водоносного слоя

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \varepsilon \beta sin\tau \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{(1+\varepsilon\eta)\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right\}$$

С граничными условиями

$$\eta(0,\tau) = cos\tau \ , \quad \left.\frac{\partial \eta\,(\xi,t)}{\partial \xi}\right|_{\xi\to\infty} = 0$$

В уравнении присутствуют два безразмерных параметра

$$\varepsilon = \frac{a}{H} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{H}{L} ctg\alpha$$

Нас будет интересовать случай $\varepsilon \ll 1$ $\beta \sim 1$. Именно этот случай наблюдался на полигоне Шпицберген. Уравнение в размерном виде с обозначением малых слагаемых (здесь $\varepsilon = 1$ обозначает малые слагаемые)

$$\frac{\partial h(X,t)}{\partial t} + \varepsilon a\omega \cdot sin\omega t \frac{\partial h(X,t)}{\partial X} \cdot ctg\alpha = K\frac{\partial}{\partial X}\left\{(H+\varepsilon h)\frac{\partial h(X,t)}{\partial X}\right\}$$

Такая запись позволяет с размерными уравнениями работать как с безразмерными. Например, раскладывать по “малому” параметру $\boldsymbol{\varepsilon}$. В конечном результате положить $\boldsymbol{\varepsilon = 1}$.

$$\boldsymbol{h = h_0 + \varepsilon h_1 + O(\varepsilon^2)}$$

В нулевом приближении для $\boldsymbol{h_0}$ получаем линейную задачу с линейным уравнением теплопроводности, рассмотренную ранее

$$\boldsymbol{\frac{\partial h_0(X,t)}{\partial t} - KH\frac{\partial^2 h_0(X,t)}{\partial X^2} = 0}$$

$$\boldsymbol{h_0(X,t)_{X=0} = a\cos\omega t} \qquad \boldsymbol{\frac{\partial h_0(X,t)}{\partial X}_{X=\infty} = 0}$$

Решение

$$\boldsymbol{h_0(x,t) = ae^{-kx}\cos(\omega t - kx)} \qquad \boldsymbol{k = \sqrt{\frac{\omega}{2KH}}}$$

В первом приближении для $\boldsymbol{h_1}$ получаем линейную задачу с линейным уравнением теплопроводности и с правой частью, зависящей от $\boldsymbol{h_0}$

$$\boldsymbol{\frac{\partial h_1(X,t)}{\partial t} - KH\frac{\partial^2 h_1(X,t)}{\partial X^2} = -a\omega\cdot\sin\omega t\frac{\partial h_0(X,t)}{\partial X}\cdot ctg\alpha + K\frac{\partial}{\partial X}\left\{h_0(X,t)\frac{\partial h_0(X,t)}{\partial X}\right\}}$$

С однородными граничными условиями

$$h_1(X,t)_{X=0} = 0 \qquad \frac{\partial h_1(X,t)}{\partial X}_{X=\infty} = 0$$

Решение для $h_1(X,t)$ представляет собой сумму стационарной $h_s(x)$ и волновой $h_w(X,t)$ составляющих:

$$h_1(X,t) = h_s(X) + h_w(X,t)$$

Причем $\langle h_1(X,t)\rangle = h_s(X) \qquad \langle h_w(X,t)\rangle = 0$

Наличие средней составляющей $h_s(x)$ называется пампинг-эффектом или эффектом накачки. Оба типа накачки работают на увеличение среднего уровня подземной воды

$$\frac{h_s(X)}{a^2/H} = \frac{1}{4}\left(1 - e^{-2kX}\right) + \frac{1}{2}\beta\left[1 - e^{-kX}(sinkX + coskX)\right]$$

Слагаемое $\frac{1}{4}\left(1 - e^{-2kX}\right)$ не зависит уклона дна и называется базисным пампингом.

Слагаемое $\frac{1}{2}\beta\left[1 - e^{-kX}(sinkX + coskX)\right]$ зависит от уклона дна через безразмерный параметр $\beta = \frac{H}{L}ctg\alpha$ и называется профильным пампингом. Пампинг –эффект не исчезает на бесконечности $X \to \infty$ в отличие от $h_0 \to 0$ при $X \to \infty$.

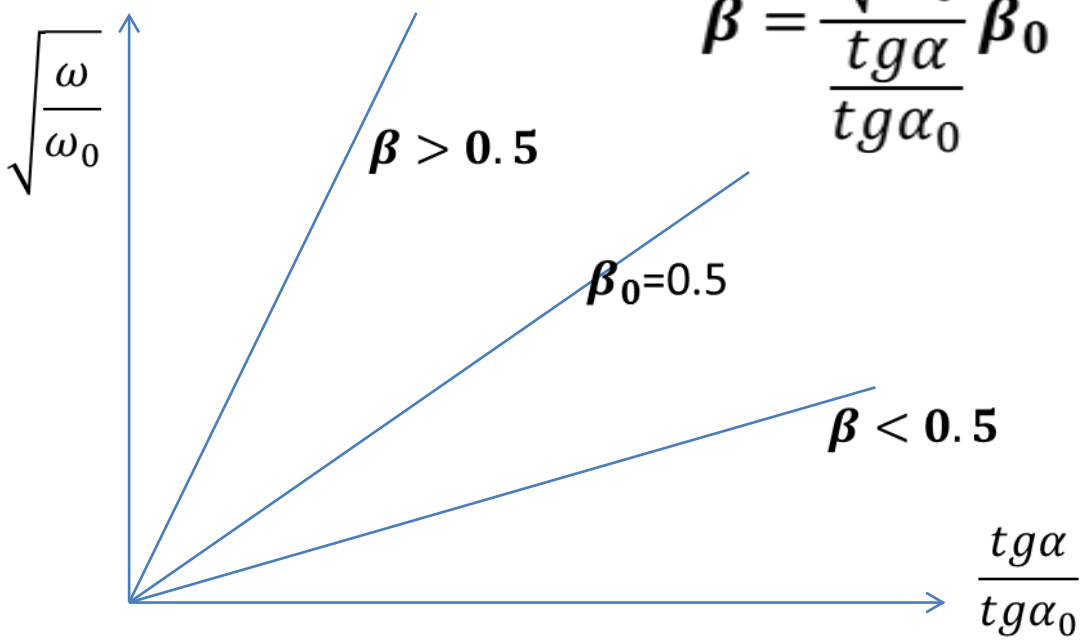
$$\frac{h_s(\infty)}{a^2/H} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\beta$$

Условие преобладания профильного пампинга над базовым состоит в выполнении неравенства $\boldsymbol{\beta} > \mathbf{0.5}$, при $\boldsymbol{\beta} < \mathbf{0.5}$ – противоположная ситуация. Условие $\boldsymbol{\beta} > \mathbf{0.5}$ можно записать в следующем виде

$$\frac{\omega H}{K} ctg^2\alpha > \frac{1}{2}$$

Слайд изолиний безразмерного параметра $\boldsymbol{\beta}$ в координатах ($\frac{tg\alpha}{tg\alpha_0}$, $\sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}}$) при прочих одинаковых свойствах водоносного слоя

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}}}{\frac{tg\alpha}{tg\alpha_0}} \boldsymbol{\beta_0}$$



Задача с ограниченной горизонтальной шириной водоносного слоя $\boldsymbol{L_0}$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = K\frac{\partial}{\partial x}\left[(H+h)\frac{\partial h}{\partial x}\right] \qquad x(t) < x < L_0$$

Граничное условие на подвижной границе $h(x,t)_{x=x(t)}=h_w(t)$

Граничное условие при $x = L_0$ $\quad \frac{\partial h(x,t)}{\partial x}_{x=L_0} = 0$

$$x(t) = a\,cos\omega t \cdot ctg\alpha \qquad h_w(t) = a\,cos\omega t$$

Переход в подвижную систему с помощью линейного преобразования

$X = \frac{L_0[x-x(t)]}{L_0-x(t)}$ усложнит уравнение

$$\frac{\partial h(X,t)}{\partial t} - \dot{x}(t)\frac{1-\frac{X}{L_0}}{1-\frac{x(t)}{L_0}}\frac{\partial h(X,t)}{\partial X} = \frac{K}{\left(1-\frac{x(t)}{L_0}\right)^2}\frac{\partial}{\partial X}\left\{(H+h)\frac{\partial h(X,t)}{\partial X}\right\}$$

Область решения станет неподвижной $\mathbf{0} \le X \le L_0$, граничное условие на урезе воды станет проще

$$h(X,t)_{X=0} = h_w(t)$$

Условие на дальней границе $X = L_0$ не изменится

$$\frac{\partial h}{\partial X}_{X=L_0} = 0$$

Безразмерное уравнение для водоносного слоя конечной ширины примет вид

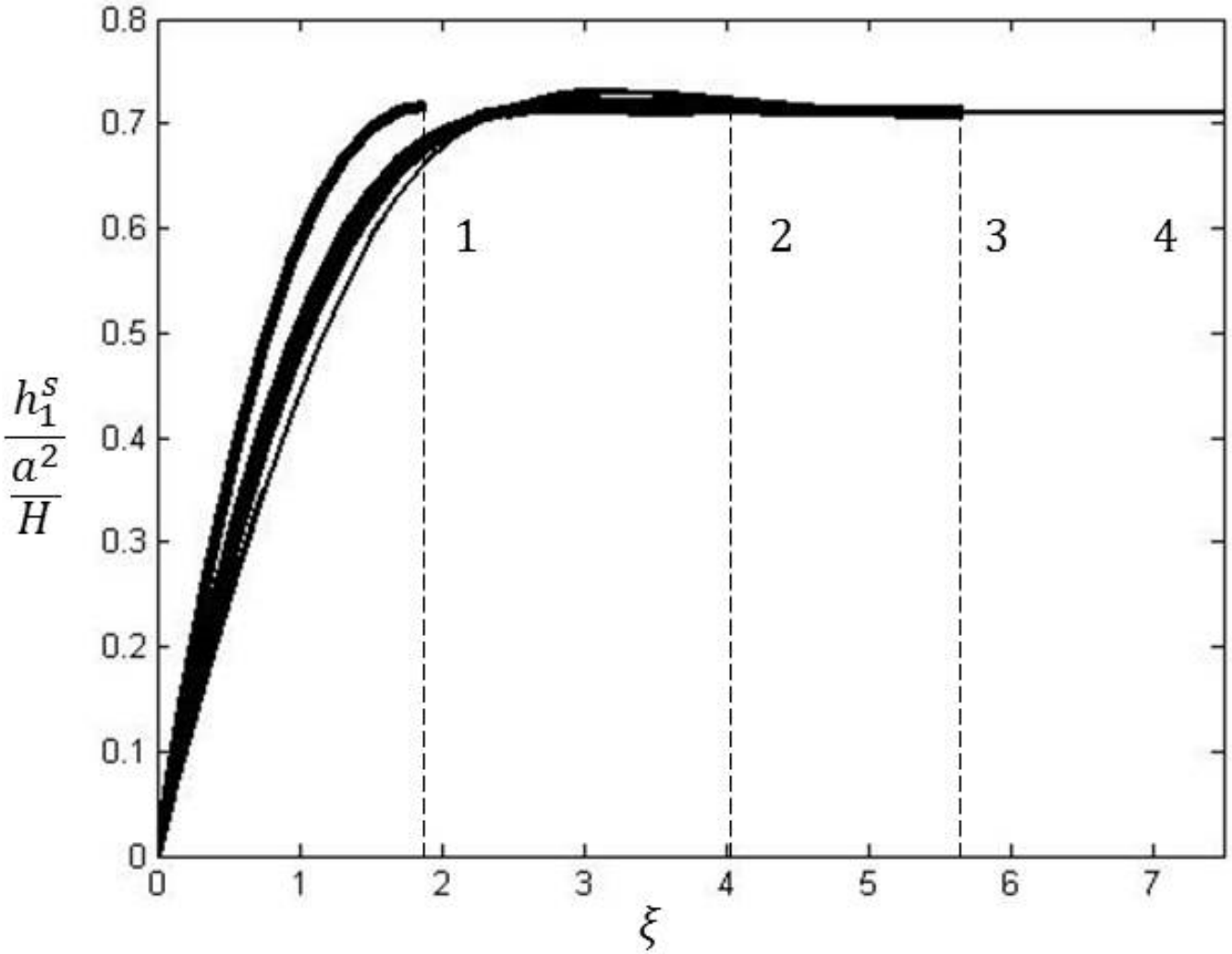
$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \varepsilon\beta \frac{1-\sigma\xi}{1-\varepsilon\beta\sigma cos\tau} sin\tau \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-\varepsilon\beta\sigma cos\tau)^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{(1+\varepsilon\eta)\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right\}$$

С граничными условиями $\eta(0,\tau) = cos\tau$, $\frac{\partial \eta\,(\xi,t)}{\partial \xi}_{\xi=\sigma} = 0$.

Здесь уже три безразмерных параметра ε , $\varepsilon\beta$ и $\varepsilon\beta\sigma$. Новый параметр $\sigma = \frac{L}{L_0}$.

При моделировании **подобие явлений** предполагает сохранение трех безразмерных параметров $\varepsilon = \frac{a}{H}$, $\beta = \frac{H}{L} ctg\alpha$, $\sigma = \frac{L}{L_0}$. Здесь $L = \sqrt{\frac{2KH}{\omega}}$. В частности угол α в природном явлении и в модели могут быть различными. Важно выполнение условия мелкой воды $a \ll H \ll L$. С учетом зависимости L от параметров задачи неравенство перепишется в следующем виде $a \ll H \ll \frac{2K}{\omega}$.

Параметр $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{L_0}}$ указывает на относительную ширину водоносного слоя и позволяет оценить значение $\boldsymbol{L_0}$, при превышении которого все параметры ведут себя как для случая $\boldsymbol{L_0} = \infty$. Решение безразмерного уравнения Буссинеска для различных значений $\boldsymbol{\sigma}$, показало, что $\boldsymbol{L_0} > \boldsymbol{4\,L}$ вполне соответствует значению $\boldsymbol{L_0} = \infty$. На следующем слайде показаны результаты расчета стационарной накачки и демонстрируется зависимость безразмерного $\frac{\boldsymbol{h_s(\xi)}}{\boldsymbol{a^2/_H}}$ от $\boldsymbol{\xi} = {}^{\boldsymbol{X}}/_{\boldsymbol{L}}$ при различных значениях $\boldsymbol{\sigma}^{-1} = {}^{\boldsymbol{L_0}}/_{\boldsymbol{L}}$. Цифрами 1,2,3,4 обозначены результаты расчетов $\frac{\boldsymbol{h_s(\xi)}}{\boldsymbol{a^2/_H}}$ для значений ${}^{\boldsymbol{L_0}}/_{\boldsymbol{L}}$ равных соответственно 2,4,6,8. В размерных единицах ширины водоносного слоя $\boldsymbol{L_0}$ для условий полигона на о. Шпицберген эти кривые примерно соответствуют $\boldsymbol{L_0} = \boldsymbol{100}$м, $\boldsymbol{200}$м, $\boldsymbol{300}$м, $\boldsymbol{400}$м. Как видно из рисунков распределение стационарной части накачки $\frac{\boldsymbol{h_s(\xi)}}{\boldsymbol{a^2/_H}}$ от $\boldsymbol{\xi}$ для значений $\boldsymbol{L_0} \geq \boldsymbol{200}$м ведут себя одинаково. Максимум стационарного подъема подземной воды (насыщение) примерно соответствует безразмерному расстоянию от уреза воды $\boldsymbol{\xi} \cong \boldsymbol{2}$, в размерных единицах $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{2L}$. Для полигона на о. Шпицберген насыщение водоносного слоя соответствует расстоянию $\boldsymbol{X} \cong \boldsymbol{100}$м.


0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
1
2
3
4
5
6
7
1
2
3
4
$\frac{h_1^s}{\frac{a^2}{H}}$
ξ

Нелинейные профили береговой линии

$$x = F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n y^n \quad , \qquad y = a \cdot cos\omega t, \qquad x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n a^n cos^n \omega t$$

$$\frac{h_s}{a^2/_H} = \frac{Hk}{2}\left(m_1 + \frac{3}{4}a^2 m_3 + \frac{5}{8}a^4 m_5 + \cdots\right)\left(1 - e^{-kX}(sinkX + coskX)\right) + \frac{1}{4}\left(1 - e^{-2kX}\right)$$

Профиль берега $y = Aarctg\frac{x}{l} \quad x = \frac{l}{A}y + \frac{l}{3A^3}y^3 + .., \quad \frac{h_s(\infty)}{a^2/_H} = \frac{Hkl}{2A}\left(1 + \frac{1}{4}\frac{a^2}{A^2}\right) + \frac{1}{4}$

Профиль берега $\quad y = (px)^{1/3} \quad x = \frac{y^3}{p} \qquad \frac{h_s(\infty)}{a^2/_H} = \frac{3}{8}a^2\frac{Hk}{p} + \frac{1}{4}$

Главное свойство профильного пампинга в случае неплоского берегового склона – зависимость величины накачки (в безразмерном виде) от амплитуды колебания уровня моря (прилива)

Качественное описание полигона на о. Шпицберген

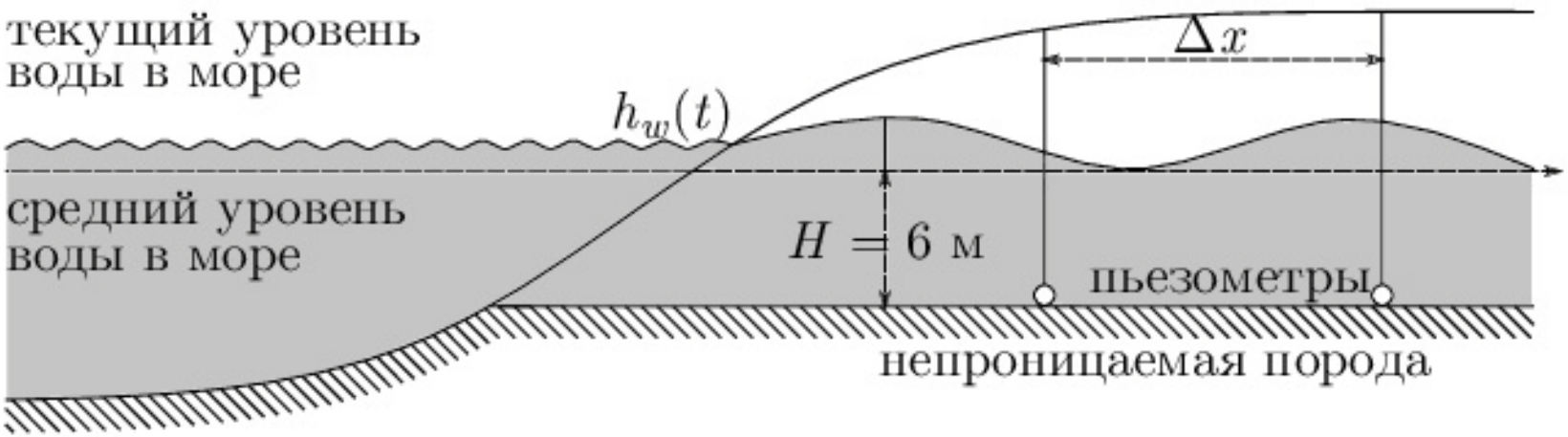


Рис.: профиль экспериментального полигона

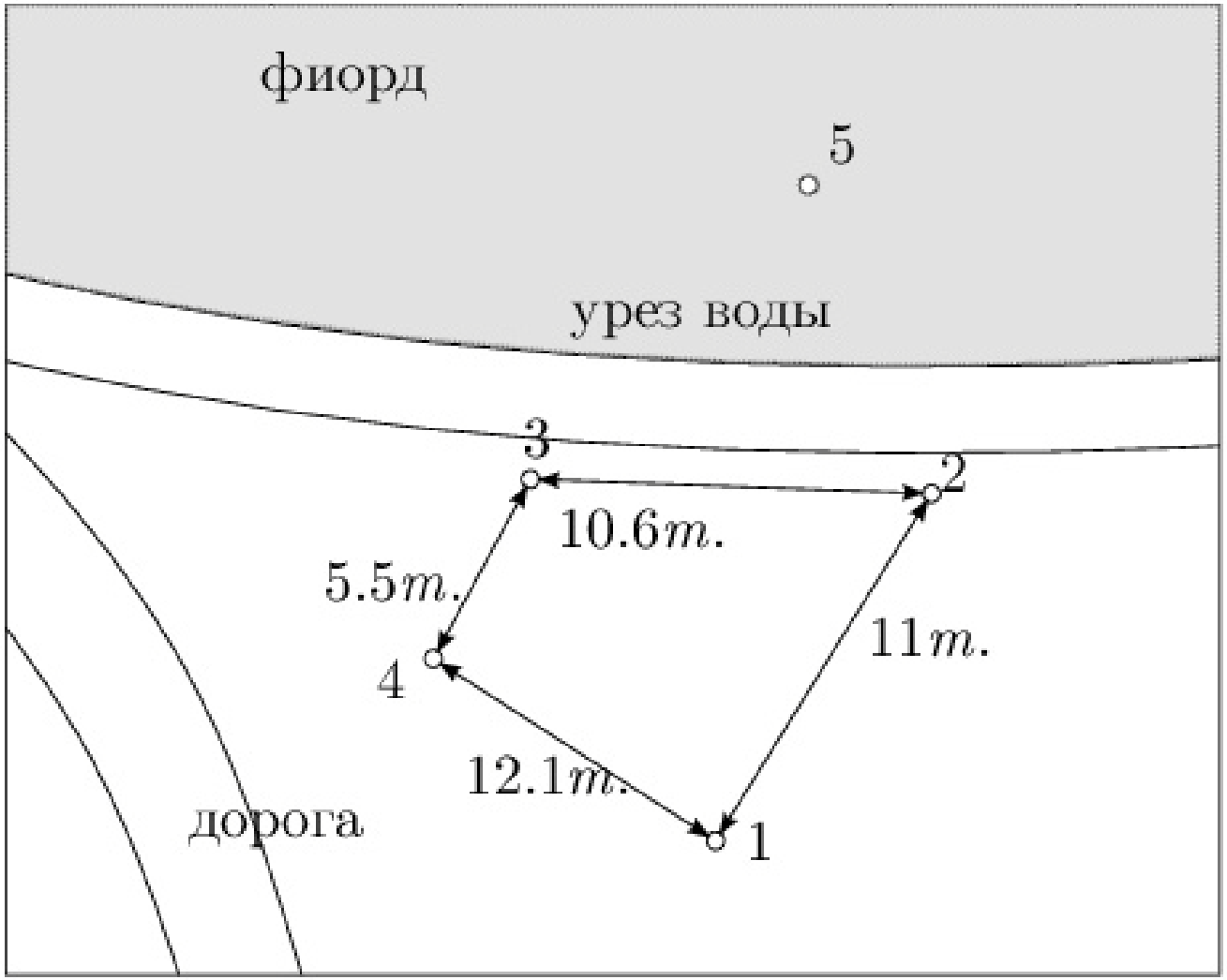
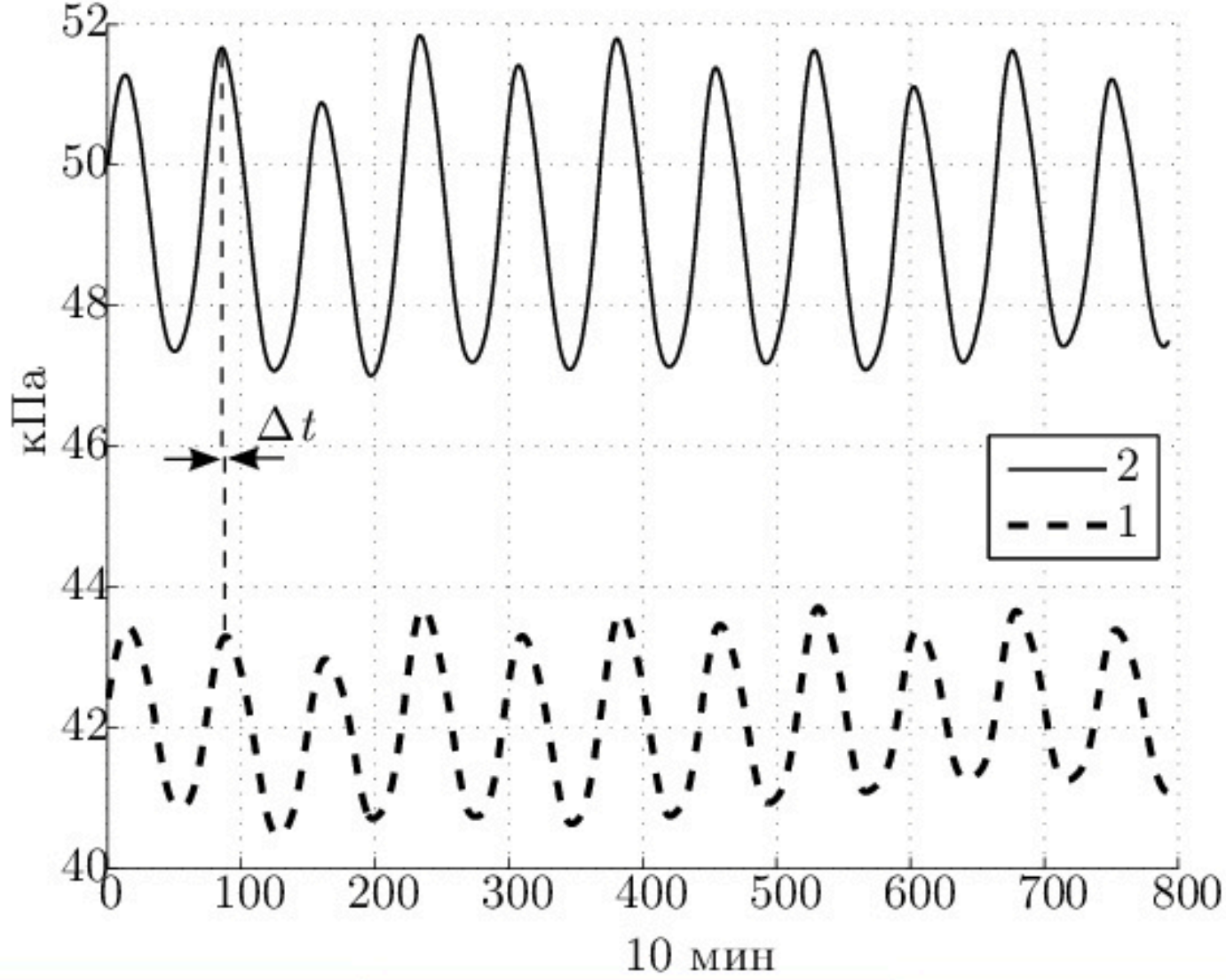


Рис.: Схема экспериментального полигона. Вид сверху.

Пример записей синхронизированных датчиков давления в точках 1 и 2. В дальнюю от берега точку 1 сигнал приходит позже. Время запаздывания Δt.



Датчик :	Метод 1 :	Метод 2 :	Метод 3 :	Метод 4 :
Справедливо **при** подчиняющаяся y и выражается	28 мин	28 мин	24 мин 48 с	24 мин 18 с
Из закона сохран	11 мин 58 с	10 мин 54 с	11 мин 36 с	12 мин 30 с
Введем еще одну ρ -плотность вод	4 ч 45 мин	4 ч 52 мин	4 ч 50 мин	4 ч 50 мин
вязкости воды, пористой среды величины.	5 ч 11 мин	5 ч 8 мин	5 ч 19 мин	5 ч 17 мин

Параметры грунта вычисляются через задержку сигнала Δt и расстояние между датчиками Δx

$$h(x,t) = ae^{-kx}\cos(\omega t - kx)\,, k = \frac{\omega \Delta t}{\Delta x} = 0.018\frac{1}{\text{м}}, \varkappa = \frac{\mathbb{C}}{m} = 34 \cdot 10^{-3}\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Лабораторное подтверждение пампинг-эффекта .

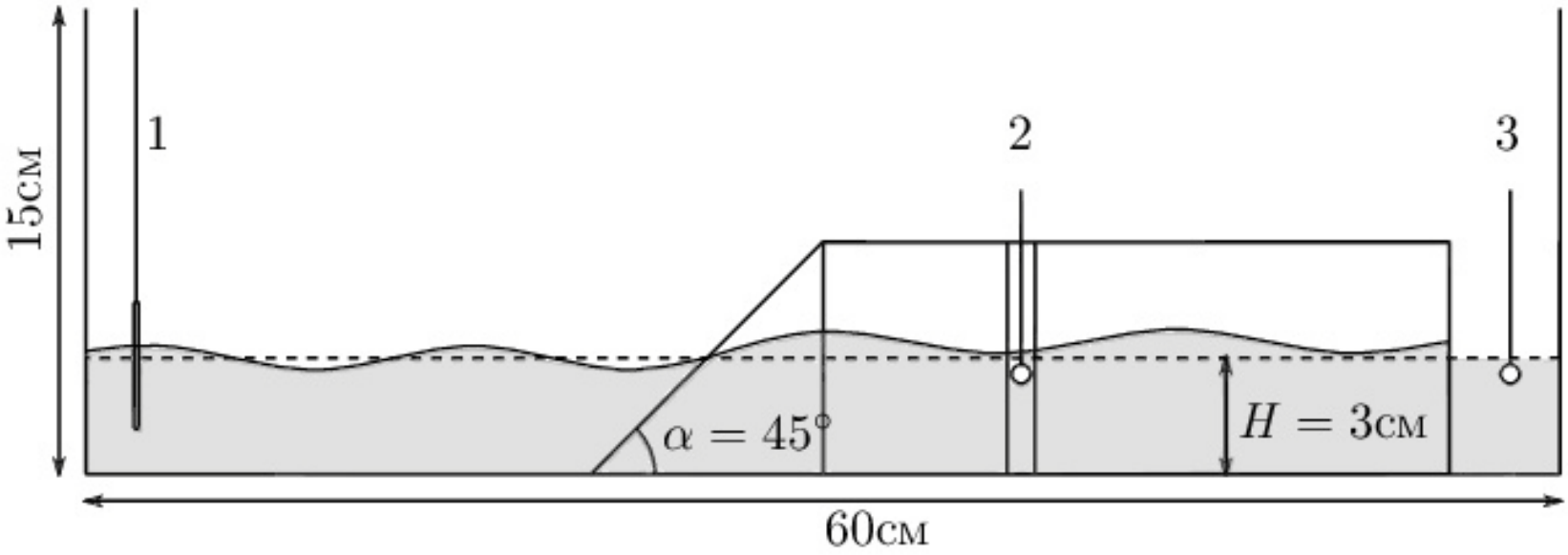


Рис.: Устройство лабораторной установки. 1 – волнопродуктор, 2, 3 – точки измерения колебания уровня свободной поверхности. Экспериментальный материал – полиэтиленовые гранулы диаметром 3.5 мм

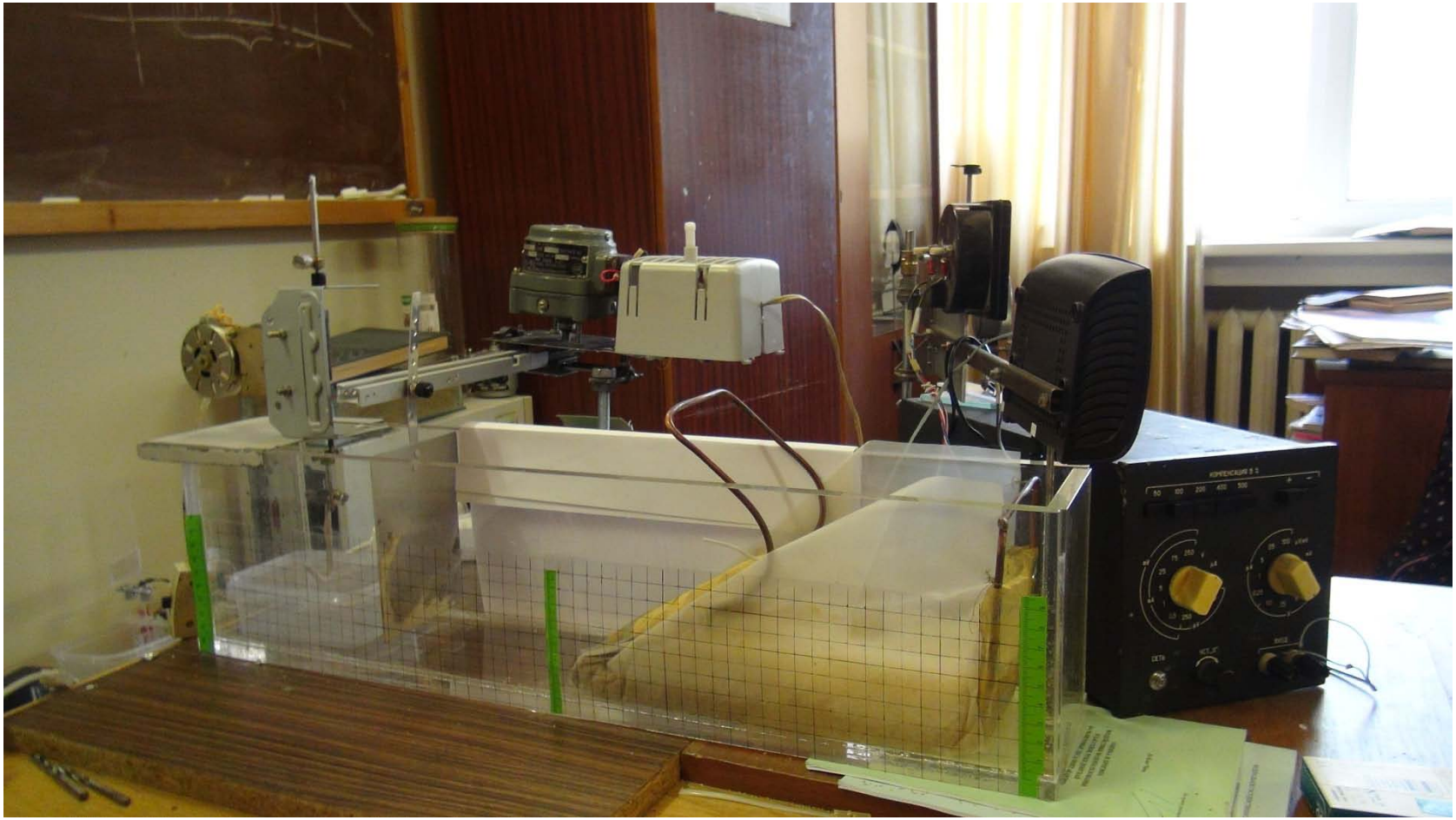
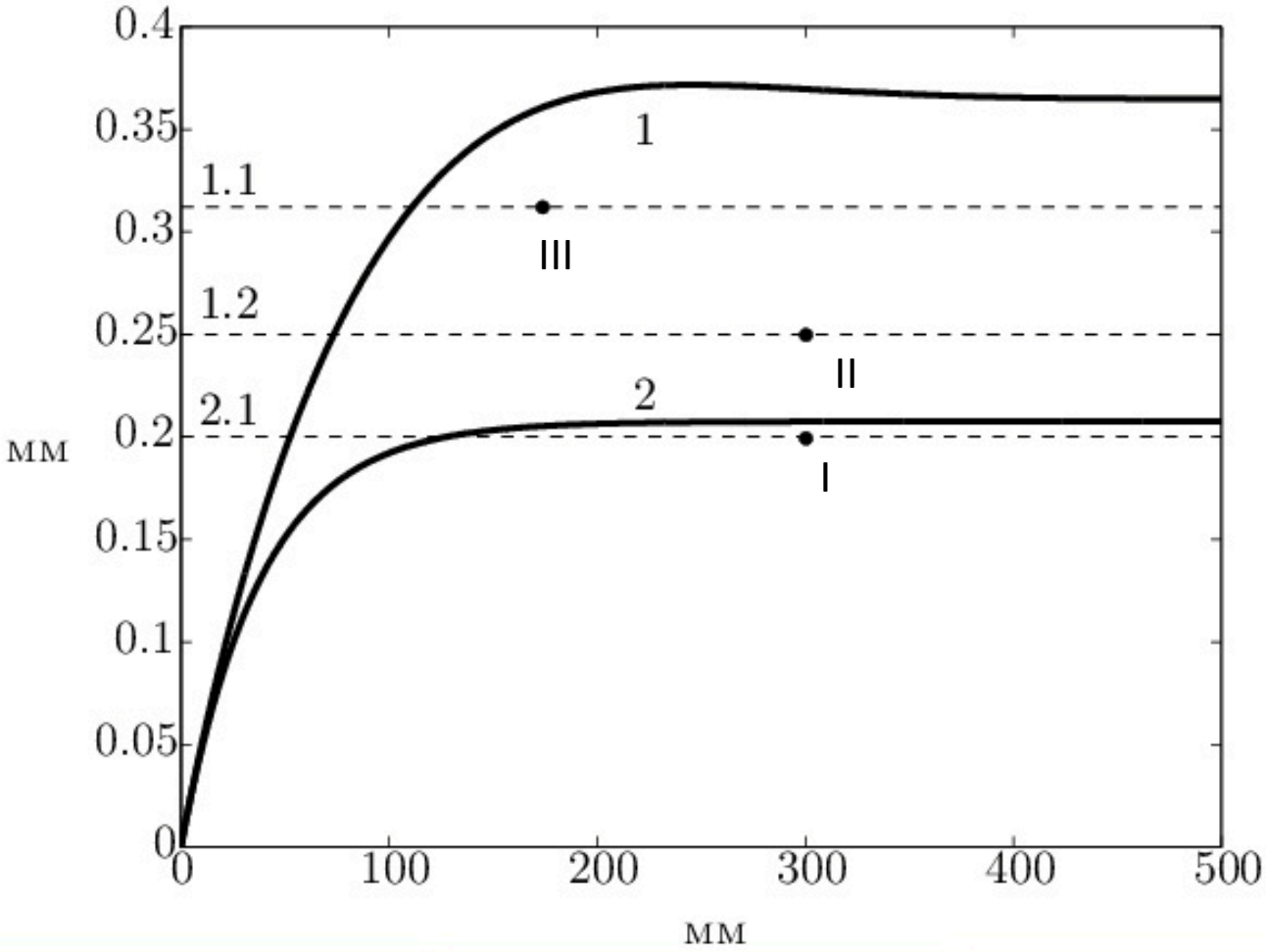


Рис.: Лабораторная установка



Сплошная линия 1 соответствует суперпозиции базовой и профильной накачки. Сплошная линия 2 только базовая накачка (теория). Экспериментальные точки: точка I – базовый пампинг-эффект (вертикальный берег), точки II и III суперпозиция базового и профильного пампинг-эффектов (наклонный берег). В случае наклонного берега средний уровень подземной воды выше, чем для вертикального берега – это результат дополнительной профильной накачки.

Выводы

- Найден новый тип пампинг-эффекта - это пампинг-эффект, связанный с профилем дна;

- Показано, что суммарный пампинг-эффект формируется суперпозицией профильной и базовой составляющими и оба эффекта действуют в сторону увеличения уровня подземных вод;

- Лабораторным экспериментами впервые подтверждено существование двух типов накачки в динамике грунтовых вод.