АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИНТЕНСИВНОГО ЛАЗЕРНОГО ПОЛЯ С АТОМНЫМИ СИСТЕМАМИ

Фролов М.В.

Воронежский государственный университет

ПЛАН

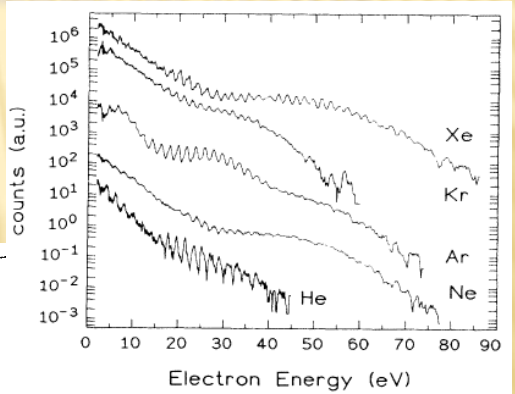
- ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИЛЬНОМ ЛАЗЕРНОМ ПОЛЕ
- ОБЩЕТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ
- АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
- ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИ
- ЗАКЛЮЧЕНИЕ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИЛЬНОМ ЛАЗЕРНОМ ПОЛЕ

- Лазерно-индуцированные процессы
  - ✓ *Надпороговая ионизация*

$$A + n\hbar\omega \to A^+ + e,$$

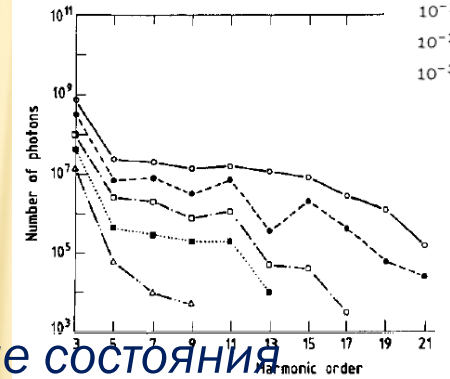
$$\frac{d^2\mathcal{P}}{dEd\Omega} = \mathcal{P}(\mathbf{p})$$



  - ✓ *Генерация гармоник*

$$A + n\hbar\omega \to A + \hbar\Omega$$

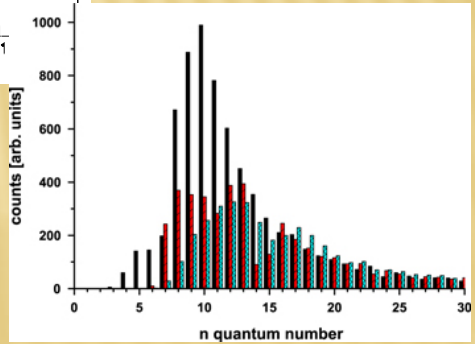
$$\frac{d\mathcal{E}}{dE_\Omega} = \rho(\Omega), \quad E_\Omega = \hbar\Omega$$



  - ✓ *Захват электрона в ридберговские состояния*

$$A + n\hbar\omega \to A^*$$

$$\mathcal{P}_{nl} = \mathcal{P}(n, l)$$

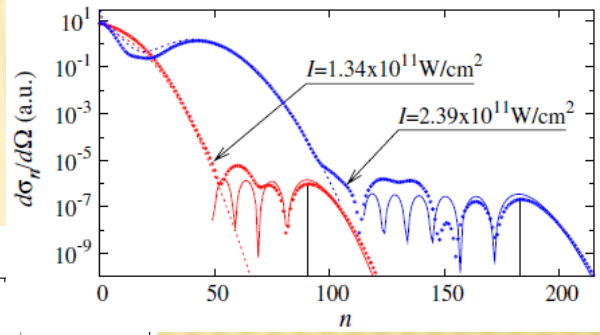


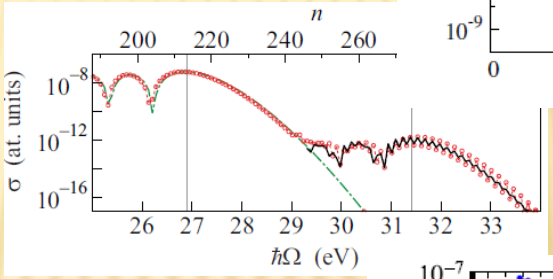
ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИЛЬНОМ ЛАЗЕРНОМ ПОЛЕ

- Лазерно-стимулированные процессы
  - ✓ *Электрон-атомное рассеяние*

$$A + \mathbf{p} + n\hbar\omega \to A^{(*)} + \mathbf{p}',$$

$$\frac{d\sigma}{d\mathbf{p}'} = \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$$





  - ✓ *Электронная рекомбинация*

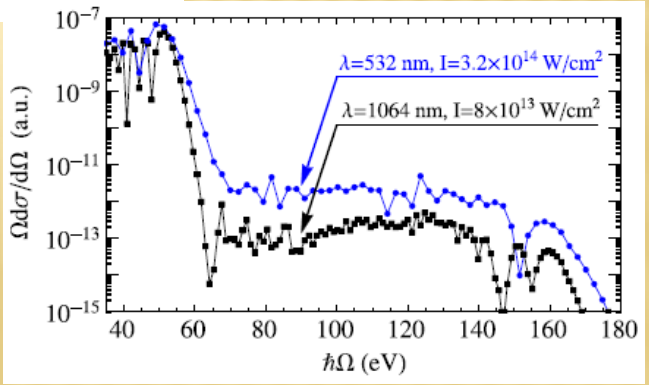
$$A^+ + \mathbf{p} + n\hbar\omega \to A^{(*)} + \hbar\Omega$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dE_\Omega} = \rho(\mathbf{p}, \Omega), \quad E_\Omega = \hbar\Omega$$

  - ✓ *Тормозное излучение*

$$A + \mathbf{p} + n\hbar\omega \to A^{(*)} + \mathbf{p}' + \hbar\Omega$$

$$\frac{d\sigma}{dE_\Omega d\mathbf{p}'} = \sigma(\mathbf{p}; \mathbf{p}', \Omega)$$



ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИЛЬНОМ ЛАЗЕРНОМ ПОЛЕ

- **Особенности элементарных процессов в сильном лазерном поле**

✓ *Существенно нелинейная зависимость вероятности процесса от интенсивности:*

$$W \propto I^n.$$

✓ *Наличие областей слабой зависимости вероятности процесса от энергии электрона (или фотона) – области “плато”.*

✓ *Наличие интерференционных структур в области “плато”.*

✓ ***Можно ли указанные особенности описать аналитически ?***

ОБЩЕТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ

- S-матричный подход

$$A = \langle IN|V|OUT\rangle$$

*Milošević, D. B. Scattering and reaction processes in powerfull laser fields /*D. B. *Milošević*, F. Ehlotzky *// Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics.— 2003.— Vol. 49.— Pp. 373–532*
Becker, A. Intense-field many-body S-matrix theory / A. Becker, F. H. M. Faisal *// Journal of Physics B.— 2005.— Vol. 38.— Pp. R1–R56.*

- Квазиэнергетический подход
  - Метод комплексных квазиэнергий
- Численное решение уравнения Шредингера

ОБЩЕТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ

Квазиэнергетический подход

Взаимодействие с полем и гамильтониан

$$\hat{H}(\mathbf{r},t) = \hat{H}_{at}(\mathbf{r}) + \hat{V}_{int}(\mathbf{r},t), \quad \hat{V}_{int}(\mathbf{r},t) = \hat{V}_{int}(\mathbf{r},t+T),$$

$$\hat{H}(\mathbf{r},t) = \hat{H}(\mathbf{r},t+T)$$

Квазиэнергетическое решение уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial\Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \hat{H}(\mathbf{r},t)\Psi(\mathbf{r},t),$$

$$i\frac{\partial\Psi(\mathbf{r},t+T)}{\partial(t+T)} = \hat{H}(\mathbf{r},t+T)\Psi(\mathbf{r},t+T),$$

$$i\frac{\partial\Psi(\mathbf{r},t+T)}{\partial t} = \hat{H}(\mathbf{r},t)\Psi(\mathbf{r},t+T),$$

$$\Psi(\mathbf{r},t+T) = C\Psi(\mathbf{r},t), \quad \Psi(\mathbf{r},t+nT) = C^n\Psi(\mathbf{r},t), \quad |C| = 1, \quad C = e^{-i\epsilon T}$$

Зельдович, Я. Б. Квазиэнергия квантовой системы, подвергающейся периодическому воздействию / Я. Б. Зельдович // Журнал экспериментальной и теоретической физики.— 1966.— Т. 51.— С. 1492–1495.

ОБЩЕТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ

Квазиэнергетическое решение уравнения Шредингера

$$\Psi(\mathbf{r},t) = e^{-i\epsilon t}\Phi_\epsilon(\mathbf{r},t), \quad \Phi_\epsilon(\mathbf{r},t) = \Phi_\epsilon(\mathbf{r},t+T),$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{r},t)\Phi_\epsilon(\mathbf{r},t) = \epsilon\Phi_\epsilon(\mathbf{r},t), \quad \mathcal{H}(\mathbf{r},t) = \left[\hat{H}(\mathbf{r},t) - i\frac{\partial}{\partial t}\right].$$

Простой пример: волковская волна

$$H(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{p}}^2/2 + \mathbf{r}\cdot\mathbf{F}(t), \quad \mathbf{F}(t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

$$\Psi_\epsilon(\mathbf{r},t) = \exp\left[i\mathbf{P}(t)\cdot\mathbf{r} - iS(\mathbf{r},t)\right], \quad \mathbf{P}(t) = \mathbf{p} + \frac{\mathbf{A}(t)}{c}, \quad S(t) = \int^t \mathbf{P}^2(t')/2dt',$$

$$\mathbf{P}(t+T) = \mathbf{P}(t), \quad S(t+T) = S(t) + \epsilon T, \quad \epsilon = \frac{\mathbf{p}^2}{2} + \frac{1}{2T}\int_{-T/2}^{T/2}\mathbf{A}^2(t')dt'.$$

ОБЩЕТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ

Функции рассеяния

$$\lim_{r\to\infty} \Phi_\epsilon(\mathbf{r},t) \propto e^{i\mathcal{S}_\mathbf{P}(\mathbf{r},t)} + \sum_n \frac{A(\mathbf{p},\mathbf{p}_n)e^{ip_n R}}{R} e^{-i\mathcal{S}_{\mathbf{P}n}(t)},$$

$$\mathcal{S}_\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \mathbf{P}(t)\cdot\mathbf{r} - \int^t \left[\mathbf{P}^2(t')/2 - \epsilon\right] dt', \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - c^{-1}\int^t \mathbf{A}(t')dt'.$$

$$\frac{p_n^2}{2} = n\omega + \epsilon - u_p, \quad u_p = \frac{1}{2T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{A}^2(t')dt'.$$

$p_n^2 > 0$ ***открытые каналы***

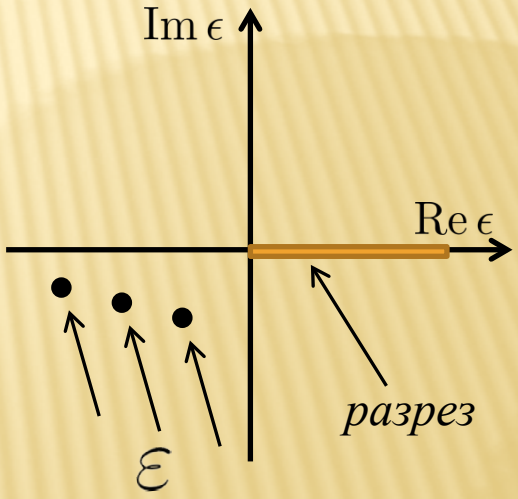
$p_n^2 < 0$ ***закрытые каналы***

ОБЩЕТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ

Аналитические свойства амплитуды рассеяния и функции КЭС

$$A(\mathbf{p},\mathbf{p}_n) \propto \frac{\mathcal{A}(\mathbf{p}_n)}{\epsilon-\varepsilon}, \quad p_n^2 = n\omega + \varepsilon - u_p.$$

$$\lim_{\epsilon\to\varepsilon}(\epsilon-\varepsilon)\Phi_\epsilon(\mathbf{r},t) = \Phi_\varepsilon(\mathbf{r},t)$$



Функция ККЭС и комплексная квазиэнергия

$$\mathcal{H}(\mathbf{r},t)\Phi_\varepsilon(\mathbf{r},t) = \varepsilon\Phi_\varepsilon(\mathbf{r},t),$$

$$\lim_{r\to\infty}\Phi_\epsilon(\mathbf{r},t) \propto \sum_n \frac{\mathcal{A}(\mathbf{p}_n)e^{ip_nR}}{R}e^{-i\mathcal{S}_{\mathbf{p}_n}(t)},$$

$$\varepsilon = \mathrm{Re}\,\varepsilon - i\frac{\Gamma}{2}, \quad \Gamma = \sum_n \Gamma_n, \quad \Gamma_n = \int d\Omega_{\mathbf{p}_n}|\sqrt{p_n}\mathcal{A}(\mathbf{p}_n)|^2$$

ОБЩЕТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ

Особенности ККЭС

- ✓Комплексные собственные значения $\varepsilon = \mathrm{Re}\,\varepsilon - i\Gamma/2, \quad \Gamma > 0$
- ✓Неограниченные волновые функции $\mathrm{Im}\,p_n < 0$
- ✓Отсутствие самосопряженности операторов на функциях ККЭС

Решение основных трудностей ККЭС

- ✓Аналитическое продолжение $\langle\langle\tilde{\Phi}_\varepsilon|\hat{\mathcal{H}}|\Phi_\varepsilon\rangle\rangle = \langle\langle\Phi_\varepsilon|\hat{\mathcal{H}}|\tilde{\Phi}_\varepsilon\rangle\rangle^*,$
- ✓Введение дуальных функций $\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{r},t)\tilde{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{r},t) = \varepsilon^*\tilde{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{r},t),$

$$\tilde{\Phi}_\varepsilon \propto \sum_n \frac{\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{p}_n)e^{-ip_n^*R}}{R} e^{i\mathcal{S}_{\mathbf{p}_n}(t)},$$

$$\langle\langle\tilde{\Phi}_\varepsilon|\Phi_\varepsilon\rangle\rangle = 1, \quad \langle\langle..|..\rangle\rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt d\mathbf{r}.$$

Зельдович, Я. Б. К теории нестабильных состояний / Я. Б. Зельдович // Журнал экспериментальной и теоретической физики.—1960.— Т. 39.— С. 776–780.
Hokkyo, N. A remark on the norm of the unstable state / N. Hokkyo //Progress of Theoretical Physics.— 1965.— Vol. 33.— Pp. 1116–1128.

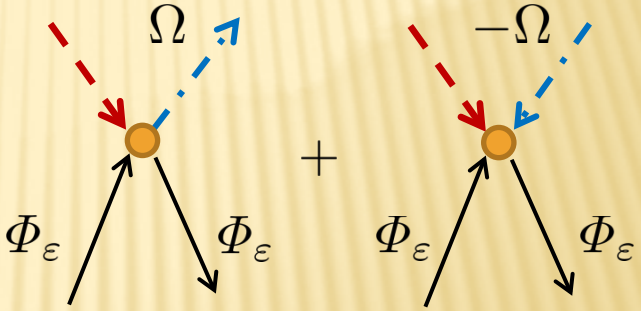
ОБЩЕТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ

Теорема Гельмана-Фейнмана и амплитуда ГВГ

$$\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{r},t;\lambda) \equiv \hat{\mathcal{H}}(\lambda) \Rightarrow \varepsilon(\lambda),$$

$$\frac{\partial \varepsilon(\lambda)}{\partial \lambda} = \left\langle\left\langle \tilde{\Phi}_\varepsilon \left| \frac{\partial \hat{\mathcal{H}}(\lambda)}{\partial \lambda} \right| \Phi_\varepsilon \right\rangle\right\rangle,$$

$$\langle\langle \tilde{\Phi}_\varepsilon | \Phi_\varepsilon \rangle\rangle = 1.$$



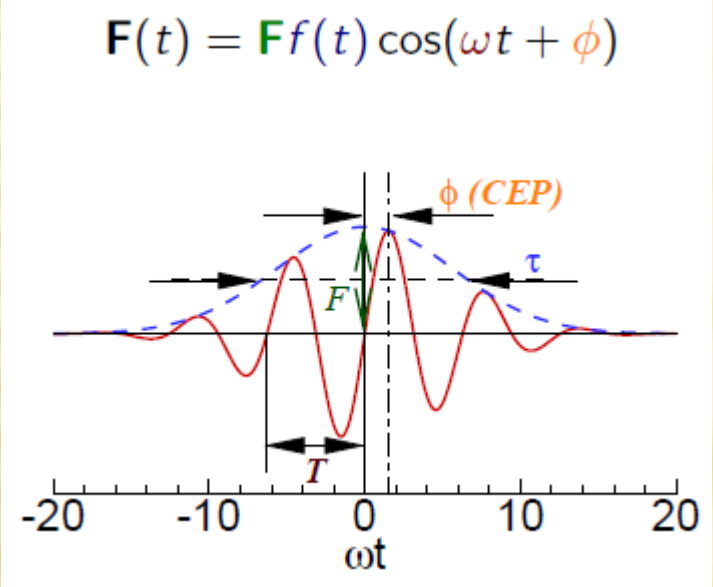
Амплитуда ГВГ

$$\hat{H} = \hat{H}_{\mathrm{at}}(\mathbf{r}) + \hat{V}(\mathbf{r},t) - \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{F}_\Omega(t), \quad \mathbf{F}_\Omega(t) = \frac{F_\Omega \mathbf{e}_\Omega}{2} e^{-i\Omega t} + \frac{F_\Omega \mathbf{e}_\Omega^*}{2} e^{i\Omega t},$$

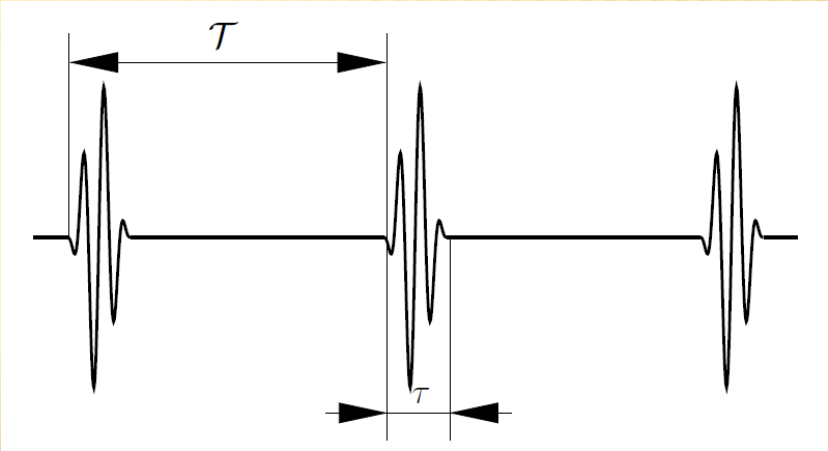
$$\lambda = F_\Omega \mathbf{e}_\Omega^*/2 \equiv \mathbf{F}_\Omega^*/2, \quad \mathbf{d}(\Omega) = -2\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{F}_\Omega^*}, \quad \mathcal{R}(\Omega) = I(\Omega)/\Omega \propto \Omega^3 |\mathbf{d}(\Omega)|^2.$$

ОБЩЕТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ

Обобщение на случай коротких лазерных импульсов



$\mathcal{T} \to \infty$



$$V(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{F}(t),$$

$$V_\tau(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V(\mathbf{r}, t + n\mathcal{T}) = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{F}_\tau(t),$$

$$V_\tau(\mathbf{r}, t) = V_\tau(\mathbf{r}, t + \mathcal{T}).$$

ОБЩЕТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ

Надпороговая ионизация

$$\mathcal{P}(\mathbf{p}) \equiv \frac{d^2 P}{dE_p d\Omega_{\mathbf{p}}}.$$

$$\mathcal{P}(\mathbf{p}) = 2\pi p \lim_{\omega_\tau \to 0} \frac{|\mathcal{A}(\mathbf{p})|^2}{\omega_\tau^2}.$$

$$\Gamma_{\text{tot}} = \mathcal{T} \sum_{n \geq n_0} \int d\Omega_{\mathbf{p}_n} \Gamma(\mathbf{p}_n),$$

$$p_n = \sqrt{2m(n\hbar\omega_\tau + \varepsilon - u_p)} \to p, \quad \omega_\tau = \frac{2\pi}{\mathcal{T}},$$

$$\sum_{n > n_0} \to \frac{1}{m\hbar\omega_\tau} \int p\, dp = \frac{1}{\hbar\omega_\tau} \int dE_p,$$

$$\begin{cases} \Gamma_{\text{tot}} = \dfrac{2\pi}{\hbar\omega_\tau^2} \displaystyle\int\int \Gamma(\mathbf{p}) dE_p d\Omega_{\mathbf{p}}, \\ \Gamma(\mathbf{p}) = |\sqrt{p}\mathcal{A}(\mathbf{p})|^2, \quad \mathcal{A}(\mathbf{p}) \equiv \mathcal{A}(\mathbf{p}_n)\Big|_{\mathbf{p}_n = \mathbf{p}} \end{cases}$$

ОБЩЕТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ

Генерация высоких гармоник

$$\rho(E_\Omega) = \frac{d\mathcal{E}_{\rm tot}}{dE_\Omega}.$$

$$\mathcal{E}_{\rm tot} = \mathcal{T}\sum_N \Omega\mathcal{R}(\Omega), \quad \Omega = N\omega_\tau,$$

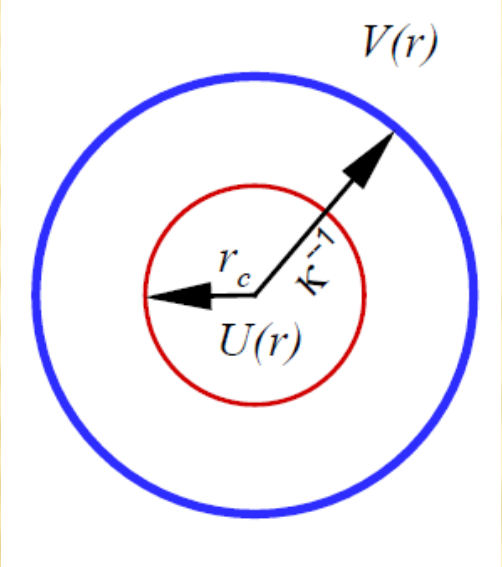
$$\rho(E_\Omega) = 2\pi\Omega \lim_{\omega_\tau\to 0}\frac{\mathcal{R}(\Omega)}{\omega_\tau^2}.$$

$$\sum_N \to \int \frac{dE_\Omega}{\omega_\tau},$$

$$\mathcal{E}_{\rm tot} = \lim_{\omega_\tau\to 0}\frac{2\pi}{\omega_\tau^2}\int dE_\Omega \Omega\mathcal{R}_\Omega \equiv \int dE_\Omega \rho(E_\Omega),$$

$$\rho(E_\Omega) \propto \Omega^4 |\mathbf{d}(\Omega)|^2$$

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ



- ✓ $U(r)$ –атомный потенциал (короткодействующий)
- ✓ r_c – радиус действия атомного потенциала
- ✓ $V(r)=-\mathbf{d}\cdot\mathbf{F}(t)$ – взаимодействие с лазерным полем
- ✓ $\mathbf{F}(t)$ – лазерное поле
- ✓ $E_0= -\kappa^2/2$ – характерная энергия связи
- ✓ $|\mathbf{F}(t)| \ll \kappa^3$, $w \ll |E_0|$, $\mathbf{d}=-\mathbf{r}$

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Метод эффективного радиуса: граничные условия $r\kappa \ll 1$

$$V(\mathbf{r},t) = -\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}(t) \ll \kappa^2, \quad ||V(\mathbf{r},t)|| \ll ||U(r)||,$$

$$\iint \Phi_\varepsilon(\mathbf{r},t) Y^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) e^{in\omega_\tau t} d\Omega dt \sim \left[(r^{-l-1}+\cdots) + B_l(\varepsilon + n\omega_\tau)(r^l+\cdots)\right] f_n^{(l,m)},$$

$$(2l-1)!!(2l+1)!!B_l(\varepsilon) = k^{2l+1}\cot\delta_l(k), \quad k = \sqrt{2m\varepsilon/\hbar^2},$$

$$f^{(l,m)}(t+\mathcal{T}) = f^{(l,m)}(t) = \sum_n f_n^{(l,m)} e^{-in\omega_\tau t}.$$

Регулярное решение: $j_l(\kappa r) \propto \kappa^l r^l$

Иррегулярное решение: $h_l(\kappa r) \propto \kappa^{-l-1} r^{-l-1}$

Периодичность: $f^{(l,m)}(t), \quad \kappa^2 \to \epsilon + n\omega_\tau$

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Метод эффективного радиуса: волновые функции

- ✓*Удовлетворять граничному условию на больших расстояниях*
- ✓*Иметь соответствующую асимптотику на малых расстояниях*

Простой пример: свободное движение

$$U(r) = 0, \quad V(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - i\mathbf{p}^2 t/2},$$

$$G^{(+)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \theta(t - t') \int d\mathbf{p}\, \psi^*_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}', t')\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t),$$

$$\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -2\pi \int dt' e^{ik^2(t-t')/2} G^{(+)}(\mathbf{r}', t'; \mathbf{r}, t),$$

$$\mathcal{Y}_{1,m}(\nabla_{\mathbf{r}'}) \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\Bigg|_{\mathbf{r}'=0} \propto h_1^{(1)}(kr) Y_{1,m}(\hat{\mathbf{r}}),$$

$$\mathcal{Y}_{1,0}(\nabla_{\mathbf{r}'}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{\partial}{\partial z'}, \quad \mathcal{Y}_{1,\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left(\frac{\partial}{\partial x'} \pm i \frac{\partial}{\partial y'} \right)$$

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Метод эффективного радиуса: волновые функции

$$\chi_\varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{r}';t) = -2\pi \int_{-\infty}^{t} e^{i\varepsilon(t-t')} G^{(+)}(\mathbf{r}',t';\mathbf{r},t) f_{l,m}(t') dt',$$

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}'} \chi(\mathbf{r},\mathbf{r}';t) \propto \frac{f_{l,m}(t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},$$

$$\Phi_\varepsilon^{(l,m)}(\mathbf{r},t) = \mathcal{Y}_{l,m}(\nabla_{\mathbf{r}'})\chi(\mathbf{r},\mathbf{r}';t)|_{\mathbf{r}'=0},$$

$$\mathcal{Y}_{l,m}(\nabla_{\mathbf{r}'}) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}(l+m)!(l-m)!} \sum_{p,q,r} \frac{(-1)^p}{2^{p+q}p!q!r!} \left(\frac{\partial}{\partial x'} + i\frac{\partial}{\partial y'}\right)^p$$

$$\times \left(\frac{\partial}{\partial x'} - i\frac{\partial}{\partial y'}\right)^q \left(\frac{\partial}{\partial z'}\right)^r, \quad p+r+q=l, \quad p-q=m$$

$$\lim_{r\to 0} \Phi_\varepsilon^{(l,m)}(\mathbf{r},t) \propto \frac{Y_{l,m}(\hat{\mathbf{r}})}{r^{l+1}} f^{(l,m)}(t) + \cdots,$$

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Метод эффективного радиуса: волновые функции для $\kappa r \gg 1$

$$\Phi_\varepsilon(\mathbf{r},t) = \sum_{l,m} \Phi_\varepsilon^{(l,m)}(\mathbf{r},t),$$

$$\Phi_\varepsilon^{(l,m)}(\mathbf{r},t) = -(-i)^l 2\pi C_{\kappa l}\kappa^{1/2-l}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{i\varepsilon(t-t')} f^{(l,m)}(t')$$

$$\times \quad \mathcal{Y}_{lm}\left(\frac{\mathbf{r}}{(t-t')} + \boldsymbol{\alpha}(t,t')\right) G^{(+)}(\mathbf{r},t;0,t')dt',$$

$$\boldsymbol{\alpha}(t,t') = \frac{e}{c}\left(\mathbf{A}(t') - \frac{1}{t-t'}\int_{t'}^{t}\mathbf{A}(\tau)d\tau\right),$$

$G^{(+)}(\mathbf{r},t;0,t')$ - запаздывающая функция Грина электрона в лазерном поле

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Уравнение на комплексную квазиэнергию

$$\sum_n \left[B_0(\varepsilon + n\omega_\tau) + \sqrt{\varepsilon + n\omega_\tau}\right] f_n^{(0)} e^{-in\omega_\tau t} = -2\pi \int_{-\infty}^{t} \left[G^{(+)} - G_0^{(+)}\right] e^{i\varepsilon(t-t')} f^{(0,0)}(t')dt'$$

$$-2\pi i\sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{m=\pm 1} m \int_{-\infty}^{t} G^{(+)} e^{i\varepsilon(t-t')} f^{(1,m)}(t')\boldsymbol{\alpha}_m dt'$$

$$\sum_n \left[B_1(\varepsilon + n\omega_\tau) - \frac{(\varepsilon + n\omega_\tau)^{3/2}}{3}\right] f_n^{(1,m)} e^{-in\omega_\tau t} = 2\pi i \int_{-\infty}^{t} \frac{G^{(+)} - G_0^{(+)}}{t - t'} e^{i\varepsilon(t-t')} f^{(1,m)}(t')dt'$$

$$-\pi i m \int_{-\infty}^{t} G^{(+)} e^{\varepsilon(t-t')} \left[f^{(1,m)}(t')\boldsymbol{\alpha}_m - f^{(1,-m)}(t')\boldsymbol{\alpha}_{-m}\right] \mathbf{K}_{-m} dt'$$

$$-\pi i m\sqrt{\frac{2}{3}} \int_{-\infty}^{t} G^{(+)} e^{\varepsilon(t-t')} f^{(0,0)}(t')\mathbf{K}_{-m} dt', \quad m = 0, \pm 1.$$

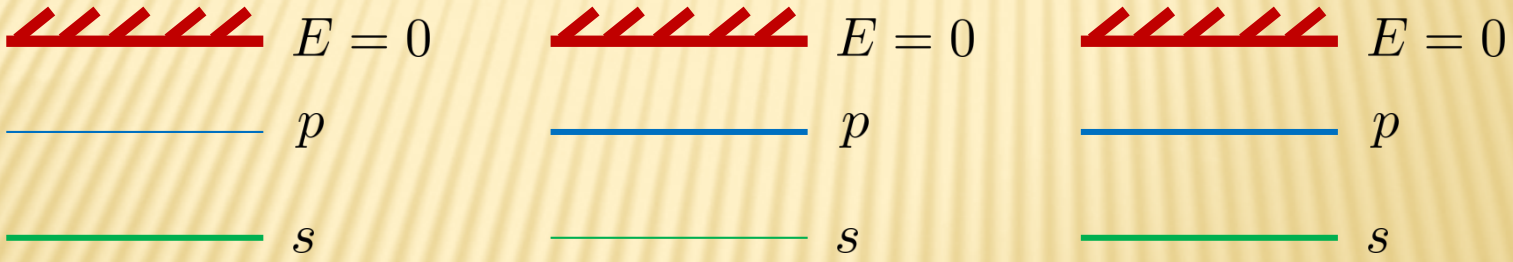
$$\mathbf{K}(t,t') = \frac{1}{c}\left(\mathbf{A}(t) - -\frac{1}{t-t'}\int_{t'}^{t} \mathbf{A}(\tau)d\tau\right), \quad (\mathbf{a})_\pm = \mp\frac{a_x \pm i a_y}{2}, \quad G^{(+)} \equiv G^{(+)}(0,t';0,t)$$

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Решение уравнения на квазиэнергию (численное)

$$\sqrt{4\pi i}\int_0^\infty \frac{e^{i\varepsilon\tau}}{\tau^{1/2}}g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{\sqrt{k-\varepsilon}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik\tau}g(\tau)d\tau$$

Решение уравнения на квазиэнергию (аналитическое)



$$f^{(0,0)} \approx 1 + g^{(0,0)}(t),$$
$$f^{(1,m)} \approx g^{(1,m)}(t).$$

$$f^{(0,0)} \approx g^{(0,0)}(t),$$
$$f^{(1,m)} \approx 1 + g^{(1,m)}(t).$$

$$f^{(0,0)} \approx f_0^{(0,0)} + g^{(0,0)}(t),$$
$$f^{(1,m)} \approx f_n^{(1,m)}e^{-in\omega_\tau t} + g^{(1,m)}(t).$$

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Решение уравнения на квазиэнергию (аналитическое)

- ✓Метод усреднений (разделение быстрых и медленно меняющихся функций)
- ✓Метод перевала

$$g^{(0,0)}(t) \approx -2\pi \int_{-\infty}^{t} \frac{\left[G^{(+)} - G_0^{(+)}\right]}{\mathcal{R}_0(\alpha^2/2)} e^{i\varepsilon(t-t')} dt',$$

$$g^{(1,m)}(t) \approx -\pi i m \sqrt{\frac{2}{3}} \int_{-\infty}^{t} \frac{G^{(+)}}{\mathcal{R}_1(\alpha^2/2)} e^{\varepsilon(t-t')} \mathbf{K}_{-m} dt'$$

$$\mathcal{R}_0(E) = B_0(E) + \sqrt{E},$$

$$\mathcal{R}_1(E) = B_1(E) - \frac{E^{3/2}}{3}$$

$$g^{(0,0)}(t) = -2\pi i \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{m=\pm 1} m \int_{-\infty}^{t} \frac{G^{(+)}}{\mathcal{R}_0(\alpha^2/2)} e^{i\varepsilon(t-t')} \alpha_m dt',$$

$$g^{(1,m)} = -\pi i m \int_{-\infty}^{t} \frac{G^{(+)}}{\mathcal{R}_1(\alpha^2/2)} e^{\varepsilon(t-t')} \left[\alpha_m - \alpha_{-m}\right] \mathbf{K}_{-m} dt'$$

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Слабые стороны модели

- ✓Приближение одного активного электрона
- ✓Невозможность учета кулоновского взаимодействия
- ✓Конечное число учета фаз рассеяния

Сильные стороны модели

- ✓Возможность получения явных параметризаций вероятностей элементарных процессов в сильном лазерном поле

Учет кулоновского взаимодействия

- ✓Квазиклассическая теория возмущений

Popruzhenko S. V., Keldysh theory of strong field ionization: History, applications, difficulties and perspectives/ S. V. Popruzhenko J. Phys. B .—2014.— V. 47.— C. *204001*.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИ

Генерация высоких гармоник

$$\rho(\Omega) = W(\Omega)\sigma(\Omega), \quad W(\Omega) = \mathcal{I}\mathcal{W}$$

✓Проявление многоэлектронных эффектов

✓Проявление гигантского дипольного резонанса в ГВГ

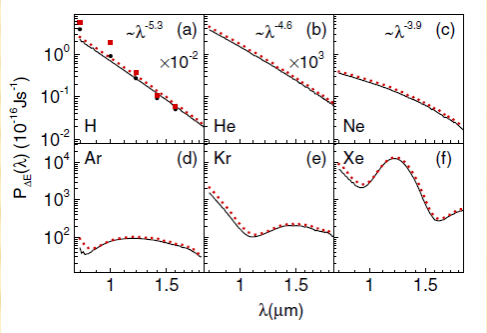
✓Проявление вклада автоионизационных состояний в спектрах ГВГ положительно заряженных ионов переходных металлов

✓Определены общие универсальные зависимости выхода высоких гармоник от частоты сильного частоты лазерного поля и частоты излучаемой гармоники: $\rho \propto \lambda^{-5}$.

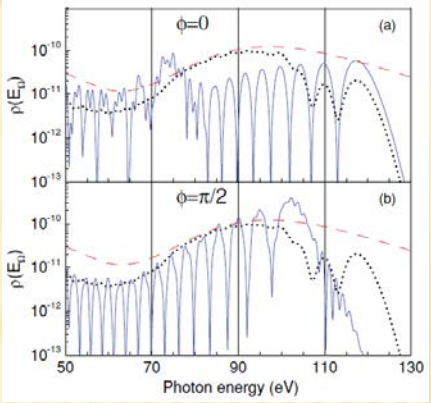
✓Получены явные выражения для лазерного параметра в произвольных лазерных полях

✓Предложены новые схемы спектроскопии на основе параметризации в двухчастотном и эллиптически поляризованных полях.

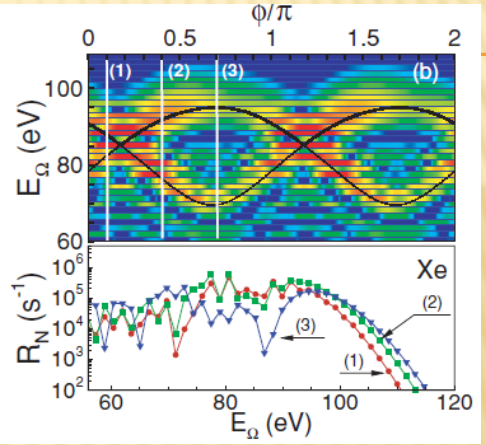
ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИ



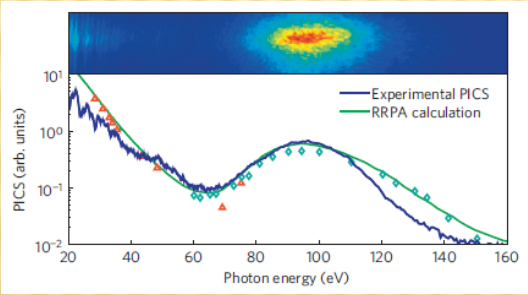
M.V. Frolov, N. L. Manakov, T. S. Sarantseva, M.Yu. Emelin, M.Yu. Ryabikin, A. F. Starace, PRL **102**, 243901, (2009)



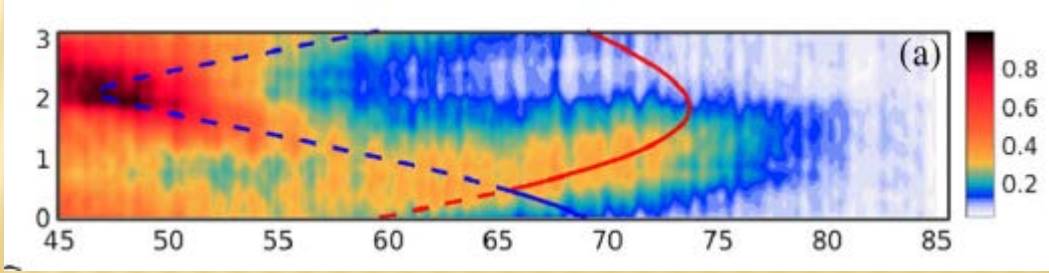
M.V. Frolov, N.L. Manakov, A.A. Silaev, N.V. Vvedenskii, A.F. Starace, PRA **83**, 021405(R) (2011)



M.V. Frolov, N.L. Manakov, A.A. Silaev, N.V. Vvedenskii, A.F. Starace, PRA **81**, 063407 (2010)

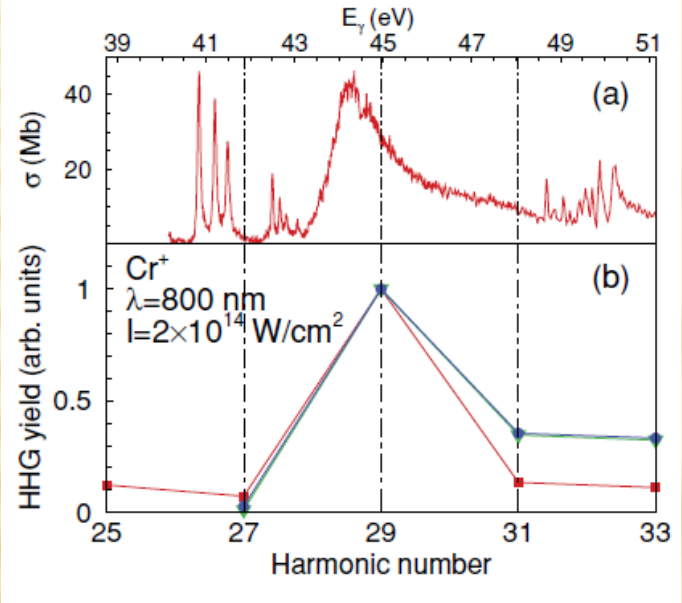


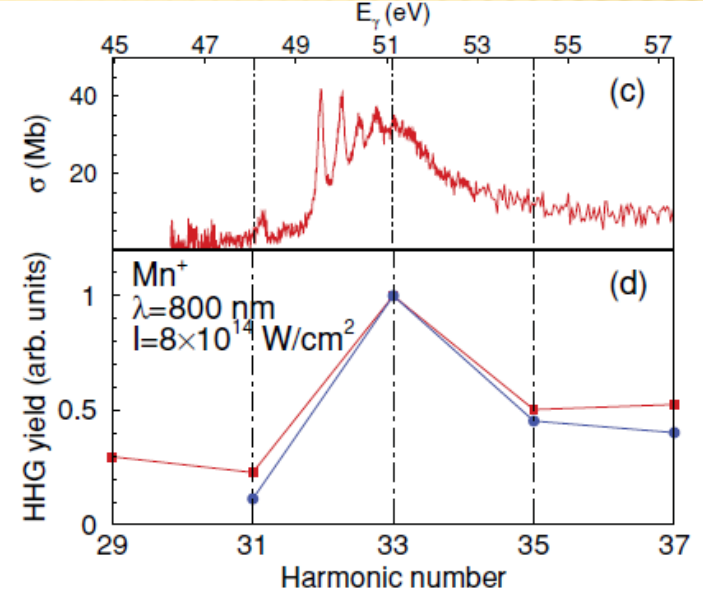
A.D Shiner et al., Nature Physics **7**, 464 (2011).



D. Facciala et al., PRL **117**, 093902 (2016)

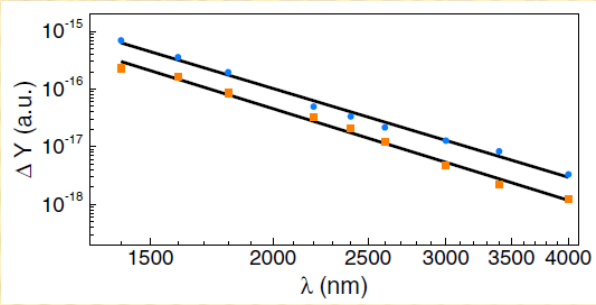
ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИ



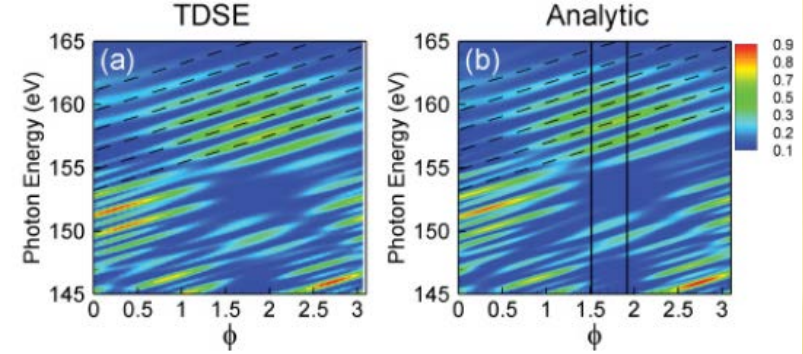


M. V. Frolov and N. L. Manakov, A.F. Starace, PRA **82**, 023424 (2010)

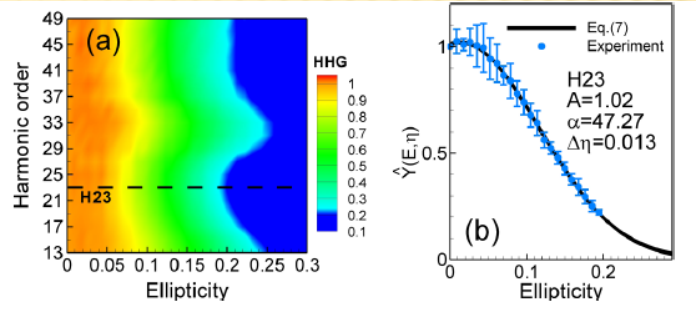
ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИ

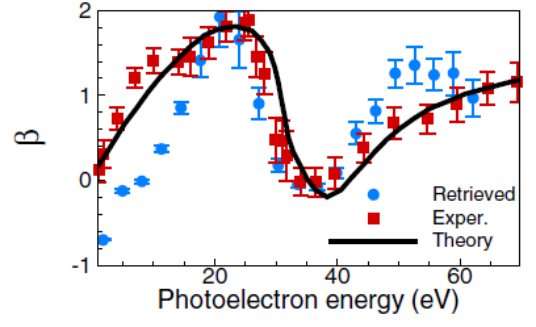


M. V. Frolov, N. L. Manakov, W.-H. Xiong, Li.-Y. Peng, J. Burgdörfer, A. F. Starace, Phys. Rev. A **92**, 023409 (2015)



M. V. Frolov, N. L. Manakov, A. M. Popov, O. V. Tikhonova, E. A. Volkova, A. A. Silaev, N. V. Vvedenskii, A.F.Starace, Phys. Rev. A **85**, 033416 (2012)





M. V. Frolov, T. S. Sarantseva, N. L. Manakov, K. D. Fulfer, B. P. Wilson, J. Troß, X. Ren, E. D. Poliakoff, A. A. Silaev, N. V. Vvedenskii, A. F. Starace, C. A. Trallero-Herrero, PRA A **93**, 031403 (2016)

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИ

Надпороговая ионизация

$$\mathcal{P}(\mathbf{p}) = W(\mathbf{p})\sigma(\mathbf{p} + \tfrac{1}{c}\mathbf{A})$$

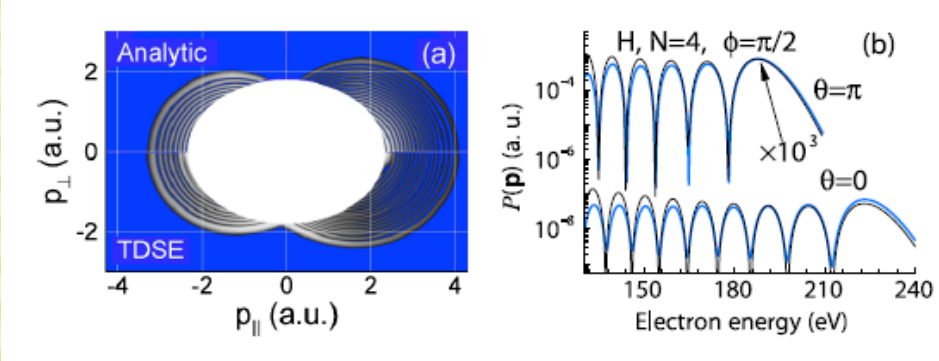
✓Дано теоретическое обоснование факторизации выхода высокоэнергетических электронов на лазерный параметр и сечение рассеяния

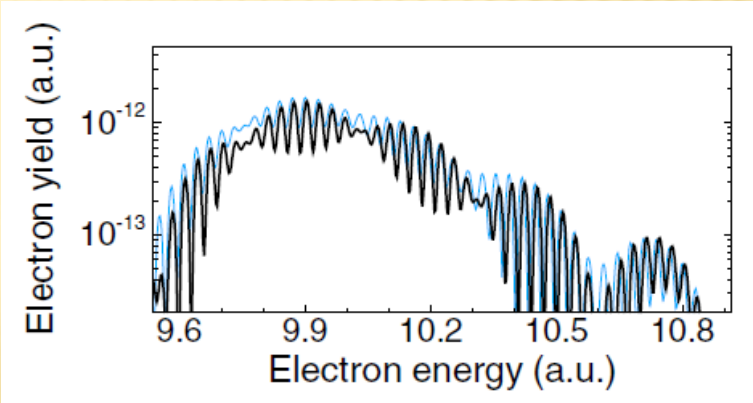
✓Установлены границы применимости вышеуказанной факторизации

✓Установлена общая структура лазерного параметра в коротких и длинных лазерных импульсах

✓ Аналитически описаны интерференционные эффекты в спектрах надпороговой ионизации и эффекты подавления.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИ





M.V. Frolov, D.V. Knyazeva, N.L. Manakov, A.M. Popov, O.V. Tikhonova, E.A. Volkova, M.-H. Xu, Li.-Y. Peng, L.-W. Pi, A.F. Starace, PRL **108**, 213002 (2012)

M. V. Frolov, D. V. Knyazeva, N. L. Manakov, J-W. Geng, L.-You Peng, A. F. Starace, PRA **89**, 063419 (2014)

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИ

Электрон-атомное рассеяния

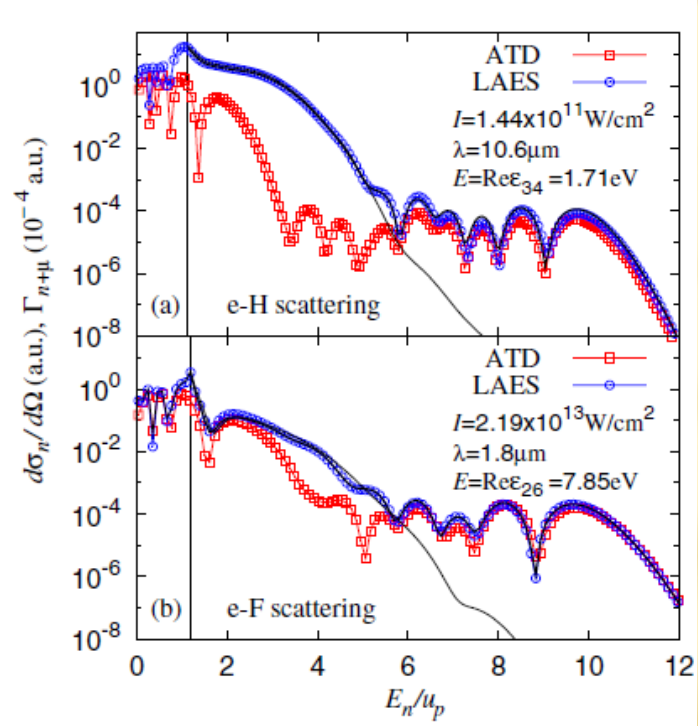
$$\frac{d\sigma(\mathbf{p},\mathbf{p}_n)}{d\Omega_{\mathbf{p}_n}} = \frac{d\sigma(\tilde{\mathbf{p}})}{d\Omega_{\tilde{\mathbf{p}}}}\mathcal{W}(\tilde{\mathbf{p}};\mathbf{p}_n)\frac{d\sigma(\tilde{\mathbf{p}}_n)}{d\Omega_{\tilde{\mathbf{p}}_n}}, \quad \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + \mathbf{A}(t_1), \quad \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p}_n + \mathbf{A}(t_2)$$

✓Установлена общая параметризация сечения рассеяния в сильном лазерном поле

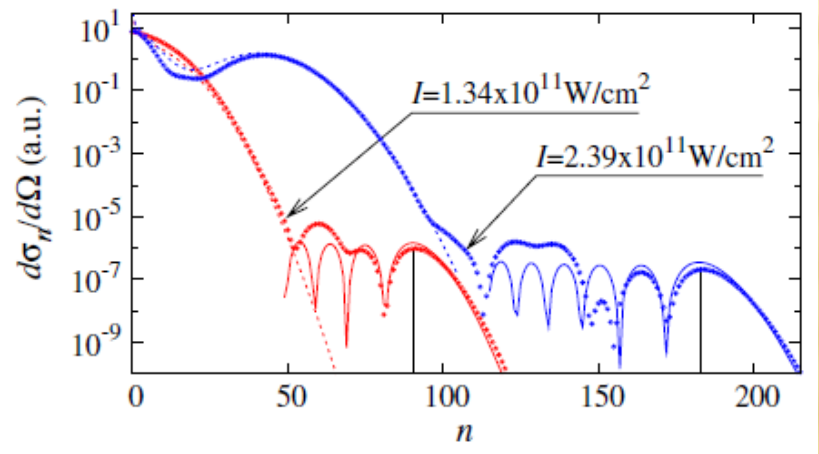
✓Исследованы резонансные явления при электрон атомном рассеянии в сильном лазерном поле

✓Указаны каналы управления электронной динамикой при электрон-атомном рассеянии

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИ



A. V. Flegel, M. V. Frolov, N. L. Manakov, A. F. Starace, PRL **102**, 103201 (2009)



A.V. Flegel, M.V. Frolov, N.L. Manakov, A. N. Zheltukhin, JPB **42**, 241002 (2009)

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИ

Электронная рекомбинация

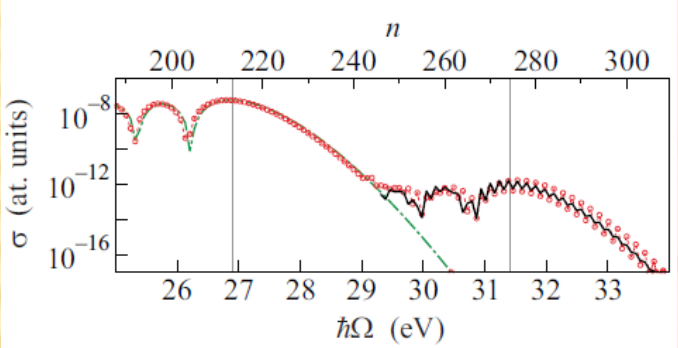
$$\rho(p,\Omega) = W(p,\Omega)\sigma(\Omega)$$

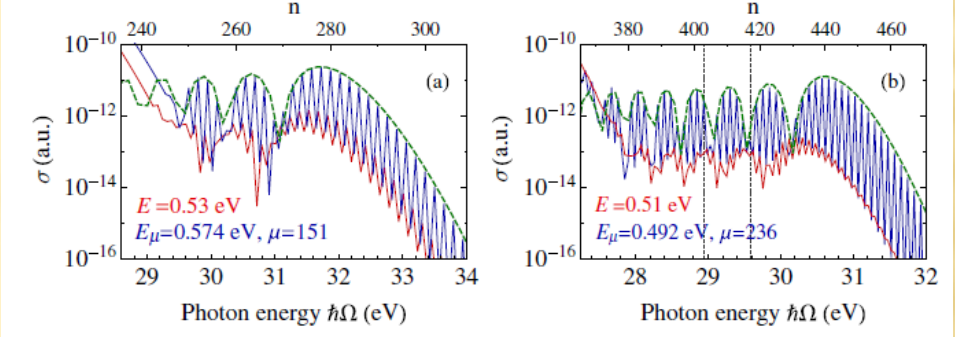
✓Установлена общая параметризация сечения электронной рекомбинации (с/без учета эффектов перерассеяния) в сильном лазерном поле

✓Исследованы резонансные явления в сечении электронной рекомбинации в сильном лазерном поле

✓Обнаружены эффекты проявления атомной структуры в сечении в сечении электронной рекомбинации в сильном лазерном поле

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИ





А. Н. Желтухин, Н. Л. Манаков, А. В. Флегель, М. В. Фролов, Письма в ЖЭТФ **84**, 641 (2011)

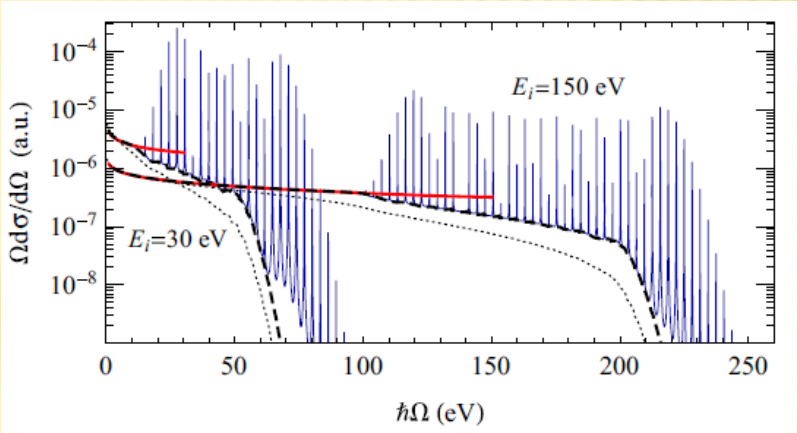
A.N. Zheltukhin, A.V. Flegel, M.V. Frolov, N.L. Manakov, A.F. Starace, JPB **45**, 081001 (2012)

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИ

Тормозное излучение

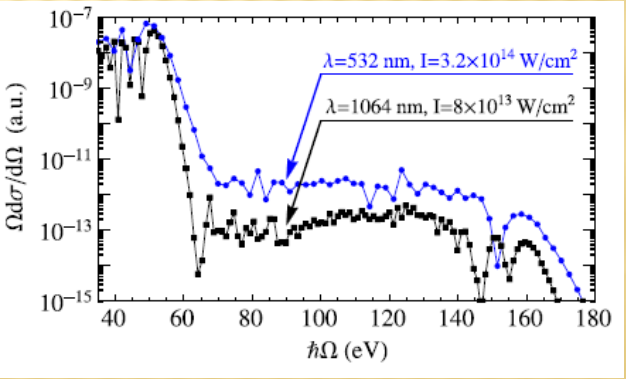
✓Исследованы резонансные явления в тормозном излучении электрона на атомных мешенях

A. N. Zheltukhin, A. V. Flegel, M. V. Frolov, N. L. Manakov, A. F. Starace, Phys. Rev. A **89**, 023407 (2014)



✓Исследованы эффекты перерассеяния в тормозном излучении

A. N. Zheltukhin, A. V. Flegel, M. V. Frolov, N. L. Manakov, A. F. Starace, JPB **48**, 075202 (2015)



TDSE-ПОДДЕРЖКА

- А.А. Силаев
- А. А. Романов
- М.Ю. Емелин
- М.Ю. Рябикин
- Н.В. Введенский