## Самокомпрессия и транспортировка интенсивных лазерных импульсов в системе слабосвязанных световодов

#### А.А. Балакин

Институт прикладной физики РАН

XVIII Научная школа «Нелинейные волны – 2018»

### Содержание

Введение

1D дискретный «коллапс»

2D дискретный «коллапс»

Самокомпрессия лазерных импульсов

Активные дискретные системы

Малоразмерные системы

Выводы

#### Дискретное уравнение Шредингера

Исходный лагранжиан

$$\mathcal{L} = \int \left[ \frac{\mathrm{i}}{2} \left( U \frac{\partial U^*}{\partial z} - U^* \frac{\partial U}{\partial z} \right) - \epsilon |U|^2 - \frac{1}{2} |U|^4 \right] dx.$$

Для поля в виде  $U = \sum u_n f(x - x_n)$  получаем

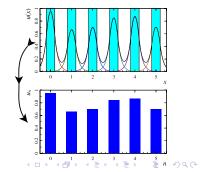
$$\mathcal{L} \approx \sum_{n} \frac{\mathrm{i}}{2} \left( u_n \frac{\partial u_n^*}{\partial z} - u_n^* \frac{\partial u_n}{\partial z} \right) - \left( u_{n+1} u_n^* + u_{n+1}^* u_n + \frac{1}{2} |u_n|^4 \right).$$

Дискретный НУШ

$$i\frac{\partial u_n}{\partial z} + u_{n+1} + u_{n-1} + |u_n|^2 u_n = 0.$$

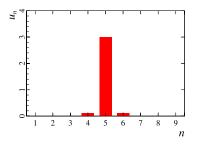
Закон сохранения энергии

$$\mathcal{P} = \int |U|^2 dx \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|^2 = \text{const.}$$

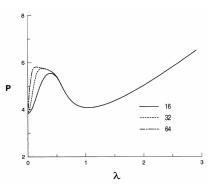


#### Особенности дискретной задачи

Основная особенность – наличие локализованных мод как в 1D случае.



D.N. Christodoulides, R.I. Joseph, Opt.Lett. 13, 794 (1988).

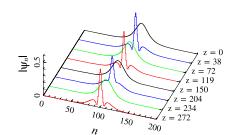


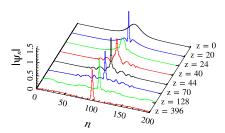
Laedke E.W., Spatschek K.H., Mezentsev V.K., Musher S.L., Ryzhenkova I.V., Turitsyn S.K., Письма ЖЭТФ, **62**, 652 (1995).

#### Особенности дискретной задачи

При малой мощности динамика близка к случаю непрерывной среды.

Повышение мощности открывает новый сценарий эволюции волнового поля в дискретной среде.





# Случай 1D

#### Вариационное приближение

Пусть ищем решение сложного нелинейного уравнения в частных производных

$$S = \int \mathcal{L}[u, u^*] d\mathbf{r} dt \ \Rightarrow \ \delta S \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^*} \delta u^* + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} \delta u = \delta Q \ \Rightarrow \ u(\mathbf{r}, t) = ?$$

Будем искать решение в заданном классе функций  $u \approx \psi(r; a)$ , зависящих от параметров  $a_j(t), (j = 1 \dots N)$ . Тогда интегрируя по r получаем укороченное действие

$$Spprox ar{S} = \int ar{\mathcal{L}} dt, \quad ar{\mathcal{L}} \equiv \int \mathcal{L}[\psi(m{r};m{a}),\psi^*(m{r};m{a})] dm{r}.$$

которое дает систему обыкновенных диф.<br/>уравнений на  $a_j$ 

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{a}_{j}} - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial a_{j}} = -\int \frac{\delta Q}{\delta a_{j}} [\psi(\boldsymbol{r};\boldsymbol{a}), \psi^{*}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{a})] d\boldsymbol{r}.$$

ВОПРОС: как выбрать  $\psi$ ?



#### Вариационное приближение (1D case)

Будем искать решение в классе гауссовых волновых пакетов

$$u(x) = \sqrt{\frac{\mathcal{P}}{a\sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2} + \mathrm{i}\beta(x-x_0)^2 + \mathrm{i}\gamma(x-x_0)\right).$$

Укороченный лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}_c = \frac{d\beta}{dz} \frac{\mathcal{P}a^2}{2} - \gamma \mathcal{P} \frac{dx_0}{dz} - 2\mathcal{P}\cos\gamma \exp\left(-\frac{1}{4a^2} - \beta^2 a^2\right) - \frac{\mathcal{P}^2}{2a} \sqrt{\frac{1}{2\pi}}.$$

Уравнения на параметры

$$\frac{d\beta}{dz} = -\frac{\mathcal{P}}{2\sqrt{2\pi}a^3} + \frac{1 - 4\beta^2 a^4}{2a^2} \frac{2}{a^2} e^{-\beta^2 a^2 - 1/4a^2} \cos \gamma,$$

$$\frac{da}{dz} = 4\beta a e^{-\beta^2 a^2 - 1/4a^2} \cos \gamma,$$

$$\frac{dx_0}{dz} = 2e^{-\beta^2 a^2 - 1/4a^2} \sin \gamma, \qquad \frac{d\gamma}{dz} = 0.$$

#### 1D коллапс

Эти уравнения имеют интеграл

$$C = \exp\left(-\frac{1}{4a^2} - \beta^2 a^2\right) + \frac{\mathcal{P}}{4\sqrt{2\pi}a}.$$

и могут быть сведены к:

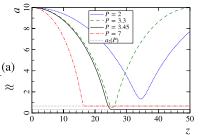
$$\frac{da}{dz} = \pm 4\mathcal{C}\left(1 - \frac{a_1}{a}\right)\sqrt{-\ln\left(\mathcal{C} - \frac{\mathcal{C}a_1}{a}\right) - \frac{1}{4a^2}} \approx$$

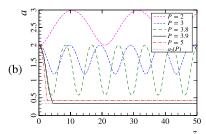
$$\approx \pm \frac{2\mathcal{C}}{a}\sqrt{\ln\mathcal{C}}\sqrt{(a_0 - a)(a - a_2)},$$

где 
$$a_1 = \frac{\mathcal{P}}{4\sqrt{2\pi}\mathcal{C}}, \ a_2 \approx \frac{\sqrt{2\pi}\mathcal{C}}{\mathcal{P}} - \frac{\mathcal{P}}{8\sqrt{2\pi}\mathcal{C}}.$$

Это дает возможность "коллапса" в единственный световод при

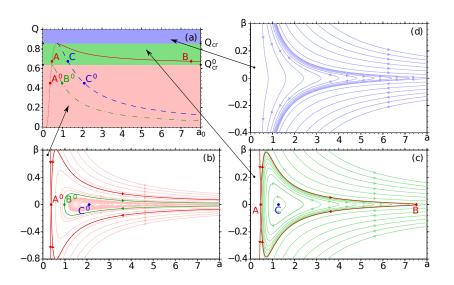
$$\mathcal{P} > \mathcal{P}_{cr} = \sqrt{\frac{48\pi}{11}} \mathcal{C}(a) \approx 3.7 \ \mathcal{C}.$$





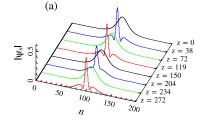
Расчеты дают  $\mathcal{P}_{cr} \approx 3.3~\mathcal{C}$ . При этом  $\mathcal{P}_{cr}^{max} \approx 4.9$ .

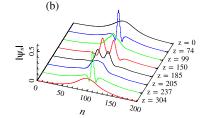
#### Фазовая плоскость

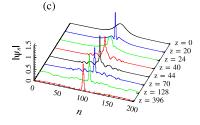


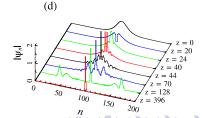
#### Численное моделирование 1D коллапса

Динамика амплитуды поля |u(z,n)| для: (a)  $\mathcal{P}=1.6<\mathcal{P}_{cr}$ , (b)  $\mathcal{P}=1.8<\mathcal{P}_{cr}$ , (c)  $\mathcal{P}=3.6>\mathcal{P}_{cr}$  и (d)  $\mathcal{P}=10>\mathcal{P}_{cr}$ .



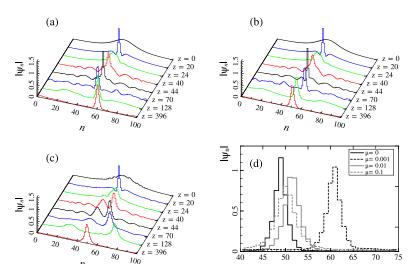






#### Анализ устойчивости

Динамика амплитуды поля |u(z,n)| для различного уровня шумов: (a)  $\mu=0.001$ , (b)  $\mu=0.01$ , и (c)  $\mu=0.1$ .



# Двумерная решетка (случаи 2D и 2D+ au)

### 2D набор световодов

#### Расширим систему

$$i\frac{\partial u_{m,n}}{\partial z} + |u_{m,n}|^2 u_{m,n} + u_{m+1,n} + u_{m-1,n} + u_{m,n+1} + u_{m,n-1} + \frac{\partial^2 u_{m,n}}{\partial \tau^2} = 0.$$

Энергия вновь сохраняется

$$\mathcal{P} = \sum \int |u_{mn}|^2 d\tau = \text{const.}$$

τ

Лагранжиан такой системы имеет вид

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left( u_{mn} \frac{\partial u_{mn}^*}{\partial z} - u_{mn}^* \frac{\partial u_{mn}}{\partial z} \right) + \left| \frac{\partial u_{mn}}{\partial \tau} \right|^2 - \frac{1}{2} |u_{mn}|^4 - u_{m,n+1}^* u_{mn}^* - u_{m,n+1}^* u_{mn}^* - u_{m+1,n}^* u_{mn}^* - u_{m+1,n}^* u_{mn}^*.$$

#### Вариационное приближение (случай $2D+\tau$ )

Вновь рассматриваем класс гауссовых функций

$$u_{n,m} = \frac{\sqrt{W}}{a\sqrt{\tau_0}\sqrt[4]{\pi^3}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2\tau_0^2} - \frac{(x^2 + y^2)}{2a^2} + i\beta(x^2 + y^2) + i\alpha\tau^2\right).$$

Укороченный лагранжиан равен ( $\sigma = 4\pi\sqrt{2\pi}$ )

$$\mathcal{L}_{c} = \dot{\beta}a^{2}W + \frac{1}{2}\dot{\alpha}\tau_{0}^{2}W + \frac{W}{2\tau_{0}^{2}}\left(1 + 4\alpha^{2}\tau_{0}^{4}\right) - 4W\exp\left(-\frac{1}{4a^{2}} - \beta^{2}a^{2}\right) - \frac{W^{2}}{\sigma a^{2}\tau_{0}}.$$

Соответствующие уравнения имеют вид

$$\begin{split} \dot{\beta} &= \left(\frac{1}{a^4} - 4\beta^2\right) e^{-\frac{1}{4a^2} - \beta^2 a^2} - \frac{W}{\sigma a^4 \tau_0}, \\ \dot{a} &= 4\beta a e^{-\frac{1}{4a^2} - \beta^2 a^2}, \\ \ddot{\tau}_0 &= \frac{4}{\tau_0^3} - \frac{4}{\sigma} \frac{W}{a^2 \tau_0^2}. \end{split}$$

#### Дискретный коллапс в случае 2D

Для длинных импульсов  $\tau_0 \gg a$ , уравнения имеют интеграл  $(\mathcal{P} \equiv \frac{W}{\sqrt{2\pi}\tau_0})$ 

$$C = \exp\left(-\frac{1}{4a^2} - \beta^2 a^2\right) + \frac{\mathcal{P}}{16\pi a^2} \quad \Rightarrow \quad a_{\min} = \sqrt{\frac{\mathcal{P}}{16\pi \mathcal{C}}},$$

и могут быть сведены к

$$\frac{da}{dz} = \pm 4\left(\mathcal{C} - \frac{\mathcal{P}}{16\pi a^2}\right)\sqrt{-\ln\left(\mathcal{C} - \frac{\mathcal{P}}{16\pi a^2}\right) - \frac{1}{4a^2}}.$$

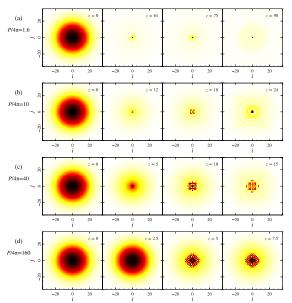
Для  $a\gg a_{\min}$ , волновое поле коллапсирует на трассе

$$\frac{da}{dz} \approx -\frac{1}{\sqrt{\pi}a}\sqrt{\mathcal{P} - 4\pi} \quad \Rightarrow \quad z^* = \frac{a_0^2\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\mathcal{P} - 4\pi}}.$$

На конечной стадии, ширина поля уменьшается к минимальному размеру  $a_{\min}$  по асимптотическому закону

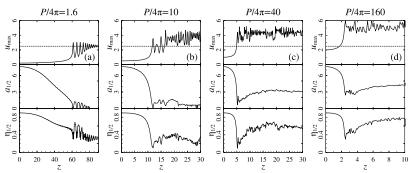
$$a \approx a_{\min} \left[ 1 + \frac{1}{2} \exp\left( -\frac{z^2}{a_{\min}^2} \right) \right].$$

#### Численное моделирование (случай 2D)





#### Характеристики коллапса



- «Коллапс» происходит при мощности выше  $\mathcal{P}_{cr} = 4\pi$ .
- Амплитуда поля ограничена величиной порядка  $\sqrt{2\pi}$ .
- При высоких мощностях  $\mathcal{P} \ggg \mathcal{P}_{\mathrm{cr}}$  динамика становится стохастической.
- Размер области сильного поля растет с ростом мощности.
- Заметная доля энергии находится в области сильного поля.



#### Дисперсионное соотношение

Рассмотрим линейный случай

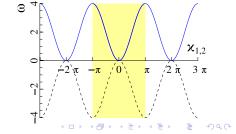
$$i\frac{\partial u_{m,n}}{\partial z} + u_{m+1,n} + u_{m-1,n} + u_{m,n+1} + u_{m,n-1} + \frac{\partial^2 u_{m,n}}{\partial \tau^2} = 0.$$

Поскольку это линейное уравнение с постоянными коэффициентами, то его общее решение имеет вид

$$u_{m,n} = \iiint C_{\varkappa_1,\varkappa_2,\omega} e^{ikz - i(\omega\tau + \varkappa_1 m + \varkappa_2 n)} d\varkappa_1 d\varkappa_2 d\omega + c.c.$$

При этом продольное волновое число подчиняется дисперсионному соотношению

$$k = 4 + \omega^2 + 4\sin^2\frac{\varkappa_1}{2} + 4\sin^2\frac{\varkappa_2}{2}.$$



#### Филаментационная неустойчивость в дискретной среде

Исследуем на устойчивость однородное решение  $u=u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2+|u_0|^2)t}$  дискретного НУШ

$$i\partial_t u_n + u_{n+1} + u_{n-1} + |u_n|^2 u_n = 0.$$

Для возмущения в виде  $u=(u_0+\delta u \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(u_0)})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2+|u_0|^2)t}$  получим систему линеаризованных уравнений

$$i\partial_t \delta u_n + \delta u_{n+1} + \delta u_{n-1} + |u_0|^2 \delta u_n + |u_0|^2 \delta u_n^* = 0$$
  
$$-i\partial_t \delta u_n^* + \delta u_{n+1}^* + \delta u_{n-1}^* + |u_0|^2 \delta u_n^* + |u_0|^2 \delta u_n = 0$$

Линеаризованная система не зависит явно от индекса n и времени. Следовательно, можно искать решение в виде  $e^{i\omega t - \varkappa n}$  процессов. Это дает дисперсионное уравнение

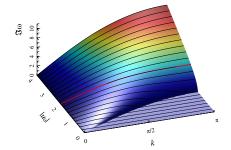
$$\det \begin{vmatrix} -\omega - 4\sin^2\frac{\varkappa}{2} + |u_0|^2 & |u_0|^2 \\ |u_0|^2 & \omega - 4\sin^2\frac{\varkappa}{2} + |u_0|^2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = 8\sin^2\frac{\varkappa}{2}(2\sin^2\frac{\varkappa}{2} - |u_0|^2)$$

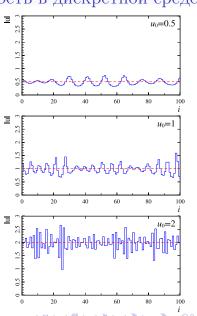
#### Филаментационная неустойчивость в дискретной среде

Инкремент неустойчивости для возмущений  $\propto \exp(i\varkappa n)$  имеет вид

$$\mathcal{I}\mathrm{m}\,\omega^2 = 8\sin^2\frac{\varkappa}{2}\left(u_0^2 - 2\sin^2\frac{\varkappa}{2}\right).$$



Он максимален на периоде решетки  $L_{\perp} \equiv \pi/\varkappa = 1$  при  $|u_0| \geq 2$ .

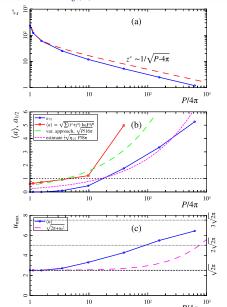


#### Ограничение амплитуды

Длина «коллапса» хорошо совпадает с аналитической оценкой.

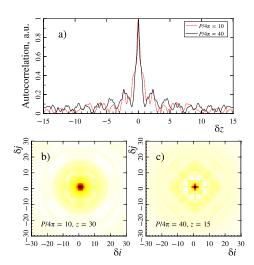
В процессе коллапса фазовый синхронизм нарушается при  $L_d \delta k_z \simeq \frac{1}{2} |u|^2 \sim \pi$ . Это ограничивает амплитуду поля величиной порядка

$$|u| \lesssim \sqrt{2\pi}$$
.



#### Стохастическая динамика

Амплитуда поля ограничена, но нелинейность продолжает фокусировать поле на периферии. Следовательно, динамика становится стохастической при  $\mathcal{P}/4\pi \gg 1$ .



# Самокомпрессия (случай $2D+\tau$ )

#### Вариационное приближение (случай $2D+\tau$ )

Вновь рассматриваем класс гауссовых функций

$$u_{n,m} = \frac{\sqrt{W}}{a\sqrt{\tau_0}\sqrt[4]{\pi^3}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2\tau_0^2} - \frac{(x^2 + y^2)}{2a^2} + i\beta(x^2 + y^2) + i\alpha\tau^2\right).$$

Укороченный лагранжиан равен ( $\sigma = 4\pi\sqrt{2\pi}$ )

$$\mathcal{L}_{c} = \dot{\beta}a^{2}W + \frac{1}{2}\dot{\alpha}\tau_{0}^{2}W + \frac{W}{2\tau_{0}^{2}}\left(1 + 4\alpha^{2}\tau_{0}^{4}\right) - 4W\exp\left(-\frac{1}{4a^{2}} - \beta^{2}a^{2}\right) - \frac{W^{2}}{\sigma a^{2}\tau_{0}}.$$

Соответствующие уравнения имеют вид

$$\begin{split} \dot{\beta} &= \left(\frac{1}{a^4} - 4\beta^2\right) e^{-\frac{1}{4a^2} - \beta^2 a^2} - \frac{W}{\sigma a^4 \tau_0}, \\ \dot{a} &= 4\beta a e^{-\frac{1}{4a^2} - \beta^2 a^2}, \\ \ddot{\tau}_0 &= \frac{4}{\tau_0^3} - \frac{4}{\sigma} \frac{W}{a^2 \tau_0^2}. \end{split}$$

#### Самокомпрессия лазерных импульсов

Закон «медленного» движения для коротких импульсов,  $au_0 \ll a$ 

$$au_0(z) pprox rac{\sigma}{W} a^2(z) \equiv rac{a^2(z)}{a_c^2}, \quad a_c = \sqrt{W/\sigma}.$$

Это дает приближенный интеграл движения

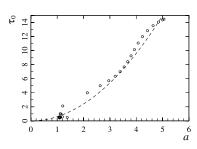
$$C = \exp\left(-\frac{1}{4a^2} - \alpha^2 a^2\right) + \frac{W^2}{2\sigma^2 a^4}.$$

Для широких импульсов  $a\gg a_c$ , все аналогично динамике в непрерывной среде – коллапс при  $W>W_{\rm cr}=\sqrt{2}\sigma a_0$ . На конечной стадии, ширина и длительность импульса изменяются по асимптотическому закону

$$\tau_0 = \left(\frac{a}{a_c}\right)^2 = \left[1 + \frac{1}{4}e^{-64z^2/a_c^2}\right]^2.$$

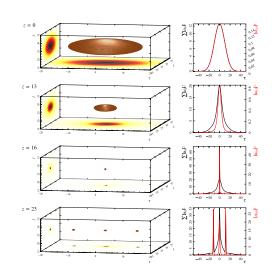
Итак, самофокусировка широкого солитоноподобного импульса сопровождается значительным уменьшением его длительности.

#### Моделирование гауссовых импульсов



Моделирование подтверждает качественный анализ.

Однако, модуляционная неустойчивость разбивает импульс на конечной стадии.

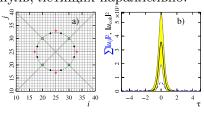


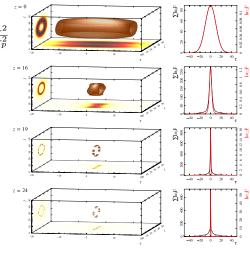
#### «Полые» импульсы

#### Использование полых пучков

$$u_{ij} = u_0 e^{-\frac{\left(\sqrt{(i-i_0)^2 + (j-j_0)^2} - r_0\right)^2}{a^2} - \frac{\tau}{\tau}}$$

позволяет избежать модуляции за счет филаментации по кольцу. В результате формируется когерентный набор световых пуль, летящих параллельно.





# Активные световоды (случай 1D+ au)

#### Самокомпрессия в активном световоде

Длительность «солитона» в уравнении Гинзбурга-Ландау

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial z} + |u|^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \mathrm{i}\gamma u + \mathrm{i}D\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}$$

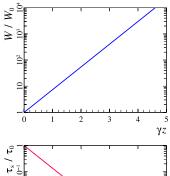
уменьшается адиабатически

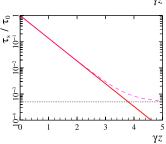
$$\tau_s \propto \frac{1}{W} \propto \exp(-2\gamma z), \quad \gamma \tau_0 \ll 1.$$

Длина компрессии

$$z_c \approx \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{\tau_0}{\tau_{fin}} \gg \tau_0 \ln \frac{\tau_0}{\tau_{fin}}.$$

Здесь 
$$\tau_{fin} \approx \sqrt{D/2\gamma}$$
.





M. Nakazawa, K. Kurokawa, H. Kubota, E. Yamada, Phys.Rev.Lett. 65, 1881 (1990).

#### Система активных световодов

Считая амплитуду малой (пренебрегая насыщением усиления), приходим к дискретному уравнению Гинзбурга-Ландау

$$i\frac{\partial u_n}{\partial z} + u_{n+1} + u_{n-1} + |u_n|^2 u_n + \frac{\partial^2 u_n}{\partial \tau^2} = i\gamma u_n + iD\frac{\partial^2 u_n}{\partial \tau^2}.$$

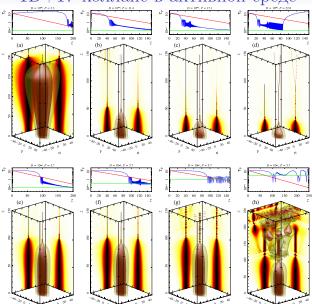
Это не гамильтонова задача. Для использования вариационного описания необходимо вводить диссипативную функцию

$$\delta Q = i \left[ \gamma u_n + D \frac{\partial^2 u_n}{\partial \tau^2} \right] \delta u^* + c.c.$$

Тогда уравнения Эйлера для параметров примут вид

$$\frac{d}{dz}\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \dot{a}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial a_i} = \sum \int \frac{\partial \delta Q}{\partial \delta u_n^*} \frac{\partial u_n^*}{\partial a_i} d\tau, \quad \dot{a}_j = \frac{da_j}{dz}.$$

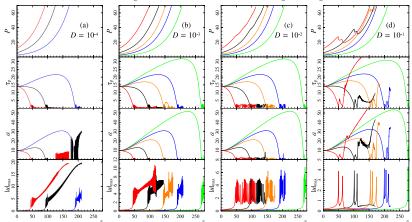
### $1\mathrm{D}{+}1\tau$ коллапс в активной среде





#### $1\mathrm{D}{+}1 au$ коллапс в активной среде

Видно 3 стадии: начальное расплывание, «коллапс» в один световод, самокомпрессия в квази-одномерном режиме.



#### Вариационное приближение (активные среды)

В классе гауссовых импульсов

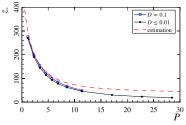
$$u = \sqrt{\frac{W}{\pi a \tau_p}} \exp\left(i\theta - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{\tau^2}{2\tau_p^2} + i\beta x^2 + i\sigma\tau^2\right)$$

уравнения для параметров импульса

$$\begin{split} \frac{dW}{dz} &= 2\gamma W - \frac{DW}{\tau_p^2} \left(1 + 4\sigma^2 \tau_p^4\right), \\ \frac{da}{dz} &= 4\beta a d, \\ \frac{d\beta}{dz} &= -\frac{W}{4\pi a^3 \tau_p} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{a^2} - 4\beta^2 a^2\right) d, \\ \frac{d\tau_p}{dz} &= 4\sigma \tau_p + \frac{D}{\tau_p} \left(1 - 4\sigma^2 \tau_p^4\right), \\ \frac{d\sigma}{dz} &= \frac{1}{\tau_p^4} - 4\sigma^2 - \frac{W}{4\pi a \tau_p^3} - 4\sigma \frac{D}{\tau_p^2}. \end{split}$$

#### Оценка длины коллапса в активной среде

Пусть дифракция идет при постоянной мощности. Сшивка решений даст длину коллапса  $z_*$  в зависимости от мощности 2ой стадии q. Минимум дает:



$$q_* \approx 1 + \left(\frac{\gamma^2 z_L^2(q_*) + \beta^2}{\beta}\right)^2 + \frac{2q_0\beta^2}{\beta^2 + 1}, \quad \beta = \gamma a_0^2.$$

Сравнение с расчетами дает достаточность одной итерации:

$$z_L \approx \frac{1}{2\gamma} \ln \left[ \frac{1+\beta^2}{q_0} + \frac{2\beta^2}{\beta^2 + 1} + \frac{1}{2q_0} \ln^2 \left( \frac{1+\beta^2}{q_0} \right) + \frac{1}{16\beta^2 q_0} \ln^4 \left( \frac{1+\beta^2}{q_0} \right) \right].$$

В результате, длина коллапса в среде с усилением имеет вид

$$z_* \approx \left(1 - \frac{(1 + 1/\beta^2)q_0}{\beta^2 + 1 + 2q_0}\right) z_L + \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2q_0}{\beta^2 + 1}}} \approx z_L + \frac{1}{\gamma}.$$

#### Вторая стадия компрессии

Динамика квазиодномерная с  $a \approx 1$ . Система уравнений

$$\frac{d\tau_p}{dz} = 4\sigma\tau_p + \frac{D}{\tau_p} \left( 1 - 4\sigma^2 \tau_p^4 \right),$$

$$\frac{d\sigma}{dz} = \frac{1}{\tau_p^4} - 4\sigma^2 - \frac{W}{W_{cr}\tau_p^3} - 4\sigma \frac{D}{\tau_p^2}.$$

имеет стац. точку  $\tau_s \approx W_{\rm cr}/W$ ,  $\sigma_s=0$ , отвечающую солитону. Изменение энергии описывает уравнением

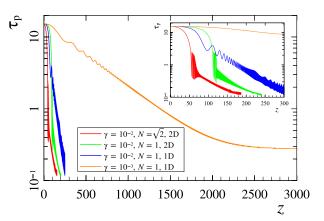
$$\frac{dW}{dz} = 2\gamma W - \frac{DW}{\tau_p^2} \left( 1 + 4\sigma^2 \tau_p^4 \right).$$

При  $\gamma \ll 2W^2/W_{\rm cr}^2$ , длительность солитона  $\tau_s$  адиабатически медленно уменьшается по закону

$$\tau_s \approx \sqrt{\frac{D}{2\gamma} + \left[1 - \frac{D}{2\gamma}\right]e^{-4\gamma(z - z_*)}}$$

## «Второе дыхание»

Итак, использование «коллапса» волнового поля системы активных световодов позволяет *значительно* сократить длину самокомпрессии, и понизить чувствительность к начальным параметрам импульса.

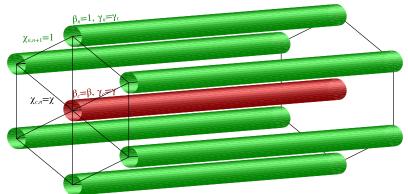




# Малоразмерные системы

## Малоразмерные системы. Мотивация

Система из малого числа связанных световодов проще в создании, и позволяет менять параметры всех световодов.



Будем рассматривать систему из 2N+1 световода: центрального и 2N по кольцу.

## Дискретное уравнение Шредингера

Исходный лагранжиан

$$\mathcal{L} = \int \left[ \frac{\mathrm{i}}{2} \left( U \frac{\partial U^*}{\partial z} - U^* \frac{\partial U}{\partial z} \right) - \epsilon |U|^2 - \frac{1}{2} |U|^4 \right] dx.$$

Для поля в виде  $U = \sum u_n f(x - x_n)$  получаем

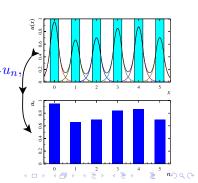
$$\mathcal{L} \approx \sum_{n} \frac{\mathrm{i}}{2} \left( u_n \frac{\partial u_n^*}{\partial z} - u_n^* \frac{\partial u_n}{\partial z} \right) - u_{n+1} u_n^* - u_{n+1}^* u_n - \frac{1}{2} |u_n|^4.$$

Выделяя поле в центре a и по кольцу  $u_n$  получаем:

$$i\partial_z u_n = \chi a + u_{n+1} + u_{n-1} + |u_n|^2 u_n + \partial_{\tau\tau} u_n,$$
  
$$i\partial_z a = \chi \sum u_n + |a|^2 a + \partial_{\tau\tau} a.$$

Закон сохранения энергии/мощности

$$C = |a|^2 + \sum |u_n|^2 = \text{const.}$$



## Линейный случай

В линейном случае удобно разложить по функциям Блоха:

$$u_n = \sum_m f_m(z) e^{i\varkappa_m n}, \quad \varkappa_m = \frac{\pi m}{N}.$$

Уравнения на амплитуды мод  $f_m$  имеют простой вид:

$$i\partial_z f_m = 2\cos(\varkappa_m) f_m + \alpha \partial_{tt} f_m, \quad m \neq 0$$

$$\begin{cases} i\partial_z a = 2N\chi f_0 + \alpha \partial_{tt} a, \\ i\partial_z f_0 = \chi a + 2f_0 + \alpha \partial_{tt} f_0. \end{cases}$$

Общее решение системы имеет вид:

$$\forall J_{+}, J_{-}, J_{m} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = J_{+} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1 + \sqrt{2N\chi^{2} + 1})z} + J_{-} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1 - \sqrt{2N\chi^{2} + 1})z}, \\ f_{0} = \frac{\chi J_{+} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1 + \sqrt{2N\chi^{2} + 1})z}}{\sqrt{2N\chi^{2} + 1} - 1} - \frac{\chi J_{-} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1 - \sqrt{2N\chi^{2} + 1})z}}{\sqrt{2N\chi^{2} + 1} + 1}, \\ f_{m} = J_{m} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z \cos \varkappa_{m}}, \quad m = 1, 2 \dots 2N - 1. \end{cases}$$

## Однородное распределение

Мода при m=0 существует в системе без центра ( $\chi=0$ ):

$$a = 0$$
,  $u_n = f_0 e^{-i(2+|f_0|^2)z}$ ,  $\forall f_0$ .

К сожалению, устойчива она будет только при малых амплитудах и мощностях

$$|f_0|^2 \le 2\sin^2\frac{\pi}{2N} \quad \Rightarrow \quad C \le 4N\sin^2\frac{\pi}{2N} \approx \frac{\pi^2}{N}.$$

Действительно, для поля с возмущениями вида

$$u_n = (f_0 + \delta_m e^{i\lambda z + i\varkappa_m n}) e^{-i(2+|f_0|^2)z}, \quad |\delta_m| \ll |f_0|$$

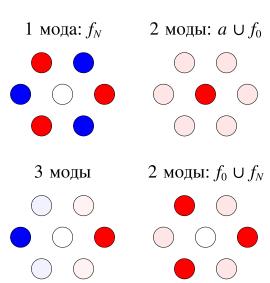
получаем при  $m \neq 0$  действительные собственные числа

$$\lambda^2 = \left( |f_0|^2 - 4\sin^2\frac{\varkappa_m}{2} \right)^2 - |f_0|^4 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad |f_0|^2 \le 2\sin^2\frac{\pi}{2N}.$$

## Маломодовое описание

Как правило, линейные моды не являются решениями в нелинейном случае. Однако, маломодовые структуры часто остаются устойчивыми в нелинейном пределе!

Ниже мы найдем их аналитически и исследуем на устойчивость.



## Изотропные случай. Пучки

Изотропный случай  $(f_0 \cup a)$  допускает решение в квадратурах:

$$i\partial_z a = 2N\chi f_0 + \alpha \partial_{tt} a + |a|^2 a,$$
  
$$i\partial_z f_0 = \chi a + 2f_0 + \alpha \partial_{tt} f_0 + |f_0|^2 f_0.$$

Используя замену

$$a = \sqrt{CA}e^{i\varphi + i\theta}, f_0 = \sqrt{C(1-A)/2N}e^{i\varphi}$$

получаем уравнения

$$\partial_z \theta = \sqrt{2N} \chi \frac{2A - 1}{\sqrt{A - A^2}} \cos \theta - \frac{(2N + 1)C}{2N} A + \frac{C}{2N} + 2,$$
$$\partial_z A = -2\chi \sqrt{2N} \sqrt{A - A^2} \sin \theta$$

с гамильтонианом

$$H = 2\chi \sqrt{2NA(1-A)}\cos\theta + \frac{C^2}{4N} (2NA^2 + (A-1)^2) - 2AC.$$

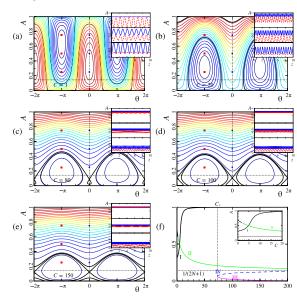
## Изотропный случай. Фазовая плоскость

#### Имеются три центра

$$A_I \approx 1 - rac{2N}{C^2},$$
 
$$A_{II} \approx rac{1}{2N+1} + rac{2N}{C},$$
 
$$A_{III} \approx rac{8N^3}{C^2}.$$

Из них азимутально устойчивы только  $A_I$  (всегда) и  $A_{II}$  (при  $C \lesssim \pi$ ).

ВЫВОД: Мощные пучки передавать плохо!



## Вариационное приближение

Анализ устойчивости решения удобно проводить в рамках вариационного приближения. В классе функций:

$$a = \sqrt{\frac{CA}{2\tau_p}} e^{i\varphi + i\theta} f(\tau), \quad f_0 = \sqrt{\frac{C(1-A)}{4N\tau_p}} e^{i\varphi} f(\tau), \quad f(\tau) = \frac{e^{i\sigma\tau^2}}{\cosh(\tau/\tau_p)}.$$

получаем систему уравнений

$$\partial_z \theta = \chi \sqrt{2N} \frac{2A - 1}{\sqrt{A - A^2}} \cos \theta - C \frac{(2N+1)A - 1}{6N\tau_p} + 2,$$

$$\partial_z A = -2\chi \sqrt{2N} \sqrt{A - A^2} \sin \theta,$$

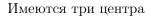
$$\partial_z \tau_p = -4\tau_p \sigma,$$

$$\partial_z \sigma = 4\sigma^2 - \frac{1}{\pi^2 \tau_p^3} \left[ \frac{2NA^2 + (A-1)^2}{2N} C - \frac{4}{\tau_p} \right]$$

Стационарные точки существует при  $\sigma=0,\,\theta=0|\pi$  и

$$\tau_p = \frac{4}{C} \frac{2N}{2NA^2 + (A-1)^2}$$

## Солитоны в изотропном случае

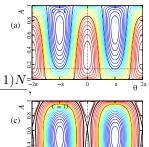


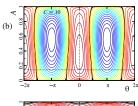
$$A_{I} pprox 1 - rac{288N}{C^4},$$
  $A_{II} pprox rac{1}{2N+1} + rac{24(2N+1)N}{C^2},$   $A_{III} pprox rac{4608N^5}{C^4}.$  (c)

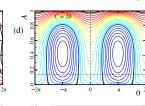
Из них устойчива только мода  $A_I$ .

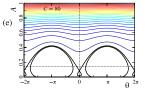
#### вывод:

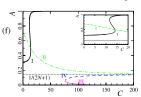
Мощные короткие импульсы передавать все равно плохо!



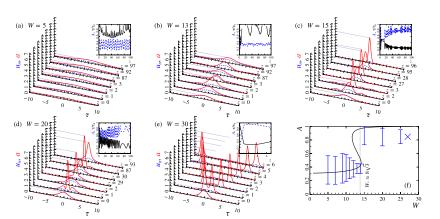








## Самокомпрессия в малоразмерных системах



Скачкообразное уменьшение ширины солитона  $A_I$  с ростом его энергии можно использовать для самокомпрессии лазерных импульсов в малоразмерных системах.

## Нечетные моды

Нечетные моды не могут возбудить четные или центр. Это позволяет написать решение для распределений вида:

$$u_n = \left[\sqrt{1-A}\cos\frac{\pi n}{3} + \sqrt{\frac{A}{2}}(-1)^n e^{i\theta}\right] \sqrt{\frac{C}{3}} e^{i\varphi}.$$

Для параметров A и  $\theta$  находим уравнения

$$\partial_z \theta = \frac{C}{3} \frac{4A - 1}{2} \sqrt{\frac{1 - A}{2A}} \cos(\theta) + \frac{C}{6} (2A - 1) \cos(2\theta) + \frac{CA}{4} - \frac{C}{12} + 3$$
$$\partial_z A = -\frac{C}{3} (1 - A) \left[ \sqrt{\frac{A - A^2}{2}} \sin(\theta) - A \sin(2\theta) \right]$$

Стационарные состояния находятся при A=1 (мода  $f_N$ ) или при  $\theta=0|\pi.$ 

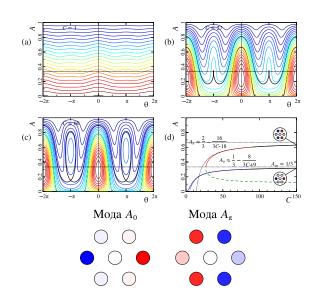
## Нечетные моды. Фазовая плоскость

Имеются два центра

$$A_0 \approx \frac{1}{3} - \frac{8}{3C+9},$$
 
$$A_\pi \approx \frac{2}{3} - \frac{16}{3C-18}.$$

Обе моды устойчивы при  $C \ge 70$ .

ВЫВОД: Мощные пучки передавать удобнее.



## Кольцо с модуляцией

Еще один точно решаемый класс задач – суперпозиция мод  $f_0$  и  $f_N$  и центра a:

$$u_n = \left[\sqrt{1 - A - B} + (-1)^n \sqrt{B} e^{i\phi}\right] \sqrt{\frac{C}{2N}} e^{i\zeta}, \quad a = \sqrt{CA} e^{i(\zeta + \theta)}.$$

Уравнения на параметры имеют вид

$$\partial_z B = -\frac{C}{N} (1 - B - A) B \sin 2\phi,$$

$$\partial_z A = -2\chi \sqrt{2NA(1 - A - B)} \sin \theta,$$

$$\partial_z \phi = 4 + \frac{C}{N} (2B + A - 1) \cos^2 \phi + \sqrt{\frac{2N\chi^2 A}{1 - A - B}} \cos \theta,$$

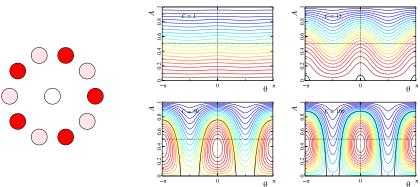
$$\partial_z \theta = 2 + \frac{\chi \sqrt{2N} \cos \theta}{\sqrt{A(1 - A - B)}} (B + 2A - 1) + \frac{C}{2N} (1 - (2N + 1)A + 2B \cos^2 \phi).$$

## «Корона» без центра

Наиболее просто ищется мода

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{2} - \frac{2N}{C}.$$

Мода имеет пороговый характер (C > 4N), и азимутально устойчива при C > 20N.

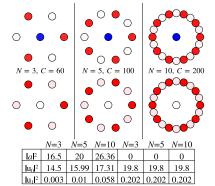


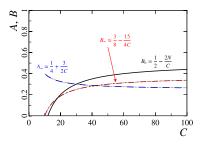
ВЫВОД: Можно передавать мощные пучки!

#### ... добавляем центр

В пучковой задаче можно дополнительно задействовать центральный световод. Устойчиво только стац.точка при  $\theta=\pi$  и  $C\gtrsim 20N$ :

$$A \approx \frac{1}{N+1} + \frac{N(N-2)}{C(N+1)}, \quad B \approx \frac{N}{2(N+1)} - \frac{N(3N+1)}{2C(N+1)}.$$







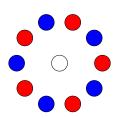
#### Нелинейные «моды»

Линейные моды при  $m \neq 0$  являются точными решениями и в нелинейном случае:

$$u_n = f_m e^{i\varkappa_m n - i(|f_m|^2 + 2\cos\varkappa_m)z}, \quad \forall f_m.$$

К сожалению, устойчивым будет единственное решение с m=N, т.е. мода

$$u_n = (-1)^n f_N e^{i(2-|f_N|^2)z}.$$



Действительно, для поля с возмущениями вида

$$u_n = ((-1)^n f_N + \delta_m e^{i\lambda z + i\varkappa_m n}) e^{i(2-|f_N|^2)z}, \quad |\delta_m| \ll |f_N|$$

получаем при  $m \neq 0$  действительные собственные числа

$$\forall f_N : \quad \lambda^2 = \left(4\cos^2\frac{\varkappa_m}{2} + |f_N|^2\right)^2 - |f_N|^4 \ge 0.$$



### Выводы

- Определены условия «коллапса» волновых пучков в одномерной системе связанных световодов.
- Найдено ограничение максимальной амплитуды поля при самофокусировке в пассивной дискретной среде.
- Обобщен метод самокомпрессии на случай пассивной дискретной среды. Показано, что использование «полых» импульсов производит когерентный набор световых пуль, летящих параллельно в световодах.
- Предложено улучшение метода самокомпрессии лазерных импульсов в активном световоде, за счет использования «коллапса» в системе связанных световодов.
- Найдены распределения волновых полей, допускающие когерентную транспортировку интенсивных лазерных импульсов.



## Рамановская нелинейность

#### Рамановская нелинейность

Нестационарность нелинейного отклика приводит к сдвигу частоты в красную область

$$i\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u = \mu u \frac{\partial |u|^2}{\partial \tau} + i\gamma u + iD \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}.$$

В классе гауссовых импульсов

$$u = \sqrt{\frac{W}{\sqrt{\pi}\tau_p}} \exp\left[-\frac{(\tau - q)^2}{2\tau_p^2} + i\beta(\tau - q)^2 - i\varpi(\tau - q) + i\theta\right].$$

параметры удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{dW}{dz} = 2\gamma W - \frac{DW}{\tau_p^2} \left( 1 + 4\beta^2 \tau_p^4 + \frac{2\varpi^2 \tau_p^2}{\tau_p^2} \right),$$

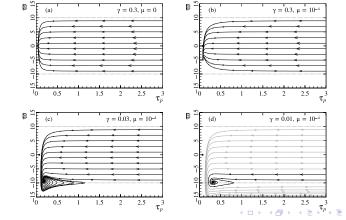
$$\frac{d\beta}{dz} = \frac{1}{\tau_p^4} - 4\beta^2 - \frac{W}{\sqrt{8\pi}\tau_p^3} - \frac{4D\beta}{\tau_p^2}, \quad \frac{d\tau_p}{dz} = 4\beta\tau_p + \frac{D}{\tau_p} - 4D\beta^2 \tau_p^3,$$

$$\frac{d\varpi}{dz} = -\frac{\mu W}{\sqrt{2\pi}\tau^3} - \frac{2D\varpi}{\tau_p^2} - 8D\varpi\beta^2 \tau_p^2, \quad \frac{dq}{dz} = 4D\beta\varpi\tau_p^2 - 2\varpi.$$

## Фазовая плоскость для Г-Л

#### Эта система имеет стационарную точку при

$$\tau_p = \sqrt{-\frac{\mu}{D\varpi}}, \quad \varpi = \frac{D^2 - \sqrt{D^4 + 16\gamma\mu^2 D}}{4D\mu} \approx -\sqrt{\frac{D}{\gamma}}.$$



#### Знакопостоянное усиление

Знакопостоянное усиление меняет картину качественно

$$i\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u = \mu u \frac{\partial |u|^2}{\partial \tau} + \frac{i\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2/\Omega^2} u(z,\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega.$$

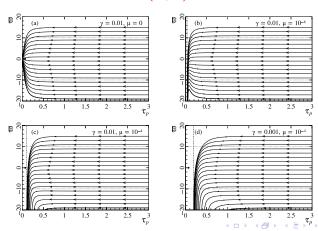
В этом случае параметры гауссова импульса удовлетворяют системе уравнений ( $\sigma=\sqrt{\tau_p^2\Omega^2+4\tau_p^4\beta^2+1},\ d=\mathrm{e}^{-\tau_p^2\varpi^2/\sigma^2})$ 

$$\begin{split} \frac{dW}{dz} &= \frac{2W\tau_p\Omega\gamma}{\sigma}d,\\ \frac{d\beta}{dz} &= \frac{1}{\tau_p^4} - 4\beta^2 - \frac{W}{\sqrt{8\pi}\tau_p^3} - \frac{4\gamma\tau_p\beta\Omega}{\sigma^5} \left(\sigma^2 - 2\tau_p^2\varpi^2\right)d,\\ \frac{d\tau_p}{dz} &= 4\beta\tau_p - \frac{\tau_p^2\Omega\gamma}{\sigma^5} \left[4\tau_p^6\beta^2\Omega^2 - \tau_p^2\Omega^2 - 8\tau_p^6\beta^2\varpi^2 + 2\tau_p^2\varpi^2 + 16\tau_p^8\beta^4 - 1\right]d,\\ \frac{d\varpi}{dz} &= -\frac{\mu W}{\sqrt{2\pi}\tau_p^3} - \frac{2\tau_p\varpi\Omega\gamma}{\sigma^3} \left(1 + 4\tau_p^4\beta^2\right) \mathrm{e}^{-\tau_p^2\varpi^2/\sigma^2}. \end{split}$$

## Фазовая плоскость для Гаусса

Эта система не имеет стационарных точек. Однако, удается оценить предельную длительность импульса

$$\tau_{\rm lim} = \left(\frac{\mu}{4\gamma\Omega}\right)^{1/4}.$$



## Численное моделирование

Численное моделирование подтверждает полученную оценку.

