

Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной физики
Российской академии наук

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ' 2018

Нижний Новгород
ИПФ РАН
2019

УДК 534.222.2
ББК 22.312я4
Н49

Издано по решению редакционно-издательского совета
ФИЦ Институт прикладной физики РАН

Ответственные редакторы:
академик РАН *А. Г. Литвак*,
доктор физико-математических наук *А. В. Слюняев*

Организационно-финансовая поддержка:

- Федеральное агентство научных организаций;
- Президиум Российской академии наук;
- Российский фонд фундаментальных исследований
(гранты № 18-02-20012, 18-02-20013, 18-05-20005);
- ЗАО «Научно-производственное предприятие «ГИКОМ».

Нелинейные волны' 2018 / Федер. исслед. центр Ин-т при-
клад. физики РАН ; отв. ред. А. Г. Литвак, А. В. Слюняев. — Ниж-
ний Новгород : ИПФ РАН, 2019. — 272 с. + [8] с. илл.

ISBN 978-5-8048-0092-6

В сборник включены статьи, написанные по материалам лекций, прочитанных на XVIII школе по нелинейным волнам (Нижний Новгород, февраль — март 2018 г.). В работах обсуждаются разнообразные аспекты нелинейной науки, включая использование источников электромагнитного излучения в новых приложениях, вопросы взаимодействия, переноса, эволюции волн и волновых структур, процессы на границе океана и атмосферы, возможности реконструкции сложных нелинейных процессов в геофизике и биологии.

Книга рассчитана на специалистов, занимающихся изучением нелинейных явлений, а также на аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

УДК 534.222.2
ББК 22.312я4

ISBN 978-5-8048-0092-6

© ФИЦ Институт прикладной физики РАН, 2019

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Предисловие</i>	5
Новые приложения источников электромагнитного излучения	
<i>Стародубцев М. В., Соловьев А. А., Бурдонов К. Ф.</i> Экспериментальное исследование процессов с высокой плотностью электромагнитной энергии	9
<i>Палашиов О. В.</i> Лазерные системы для удаления космического мусора с околоземной орбиты	23
<i>Дмитриев А. С., Ефремова Е. В., Рыжов А. И.</i> Радиосвет: концепция и технология	40
Нелинейные процессы в структурированных средах	
<i>Балакин А. А.</i> Самокомпрессия и транспортировка интенсивных лазерных импульсов в системе слабосвязанных световодов	65
<i>Юлин А. В.</i> Резонансное взаимодействие квазилинейных волн с оптическими солитонами и генерация суперконтинуума в нелинейных оптических волокнах с дисперсией	84
<i>Самохвалов А. В.</i> Электродинамика гибридных структур «сверхпроводник — ферромагнетик»	100
Нелинейные процессы на границе океана и атмосферы	
<i>Бадулин С. И.</i> Азбука ветрового волнения	121
<i>Слюняев А. В.</i> Портреты нелинейных морских волн в пространстве Фурье	142
<i>Троицкая Ю. И.</i> Морские брызги при сильных ветрах: механизмы генерации и роль в механике и термодинамике ураганов	166

Реконструкция сложных динамических систем

*Фейгин А. М., Гаврилов А. С., Лоскутов Е. М., Мухин Д. Н.,
Селезнев А. Ф.* Нелинейные динамические моды: метод эмпирической
реконструкции сложных систем 191

*Караваев А. С., Боровкова Е. И., Руннова А. Е., Киселев А. Р.,
Журавлев М. О., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Храмов А. Е.,
Короновский А. А., Безручко Б. П.* Синхронизация процессов
регуляции кровообращения: экспериментальное наблюдение
и математическое моделирование 218

Современные проблемы теории нелинейных колебаний и волн

Кузнецов Е. А., Агафонцев Д. С., Майлыбаев А. А., Серещенко Е. В.
Сжимаемые вихревые структуры в гидродинамической
турбулентности 237

Кащенко С. А., Глызин С. Д., Толбей А. О. Асимптотика быстро
осциллирующих решений в задаче о дислокациях 259

Предисловие

В настоящий сборник вошли обзорные и оригинальные статьи, написанные по материалам лекций, прочитанных на очередной (восемнадцатой) научной школе «Нелинейные волны — 2018». Школа проводилась Институтом прикладной физики РАН 26 февраля — 4 марта 2018 года. Ее главной целью было сориентировать молодежь в проводимых в научных центрах нашей страны исследованиях, которые соответствуют наиболее интересным и перспективным направлениям развития мировой науки в области фундаментальной нелинейной физики и ее приложений.

Тематика школы представила несколько отобранных программным комитетом школы срезов исследований нелинейных процессов в физике, геофизике, математике, астрономии, биологии, теории информации. Основу программы составили 6 главных тематических направлений:

- современные проблемы теории нелинейных колебаний и волн;
- нелинейные процессы в геофизике;
- астрофизика и космология;
- физика экстремальных световых полей и мощных лазеров;
- нелинейные процессы в нейросистемах;
- квантовые системы и конденсированные среды.

Хотя в ряде случаев принадлежность лекции одному из направлений можно было назвать лишь условно.

Кроме 33 пленарных приглашенных лекций, в программу школы вошло около 70 устных выступлений по более узким тематикам, сделанных как уже состоявшимися учеными, так и молодыми специалистами, а также около 90 стендовых докладов молодых ученых. В работе школы принимали участие иностранные ученые из Германии, США, Канады, Белоруссии.

В настоящем издании собраны статьи, посвященные новым областям применения источников мощного лазерного излучения: для лабораторного исследования задач астрофизики, решения усугубляющейся проблемы мусора в ближнем космосе. Источники хаотического микроволнового излучения предлагаются для всепогодной системы видения. В статье А. А. Балакина обсуждаются возможности повышения пропускной способности световодов по мощности; разнообразие эффектов нелинейного взаимодействия оптических солитонов и линейных волн, генерации суперконтинуума собраны в обзоре А. В. Юлина. Представление об основных механизмах, лежащих в основе сверхпроводящей спинтроники, излагается в работе А. В. Самохвалова. В сборнике приведены три лекции, посвященные морскому ветровому волнению, затрагивающие вопросы обмена океана с атмосферой, возникновения волн и их описания динамическими и кинетическими подходами. Эмпирические методы применены для реконструкции сложных процессов в живой и неживой природе, когда описание из первых принципов вряд ли возможно. Метод нелинейных динамических мод рассмотрен в статье А. М. Фейгина, которая базируется на лекции, прочитанной на школе 2016 года, с учетом новых результатов. Лекция Е. А. Кузнецова также продолжает тему, поднятую в сборнике по итогам предыдущей школы, она посвящена эффектам, лежащим в основе развития гидродинамической турбулентности и определяющим ее спектр. Наконец, приведены новые асимптотические решения для обобщенной модели Ферми — Пасты — Улама.

В дополнение к трудам, представленным в настоящем сборнике, статьи, подготовленные на основе лекционных и избранных инициативных докладов на школе, опубликованы в томе 61, выпусках 8/9, 11 и 12 журнала «Известия вузов. Радиофизика» (2018 г.). Материалы лекций, прочитанных на школе (файлы презентаций), доступны на ее сайте (www.nonlinearwaves.sci-nnov.ru/). По ним можно ознакомиться и с лекциями, авторы которых не смогли представить свои рукописи в настоящий сборник в силу тех или иных причин. Среди них: К. В. Анохин «Нейрофотоника: исследование живого бодрствующего мозга с помощью фотонов», И. С. Аронсон «Активные пловцы в анизотропных средах — живые жидкие кристаллы», «Динамика подвижных бактериальных суспензий», С. П. Вятчанин «Дорога к открытию гравитационных волн», А. В. Глазунов «Изучение турбулентности в пограничном слое атмосферы при помощи численного моделирования DNS-и LES-методами», В. В. Жмур «Нелинейные эффекты подземной гидродинамики», Ю. Ю. Ковалев «Современные результаты исследования ядер галактик», Г. А. Леонов «Скрытые нелинейные колебания в динамических системах», А. А. Лутовинов «Нейтронные звезды: от рождения до слияния», М. А. Мальков «Современная физика космических лучей: аналитические и численные результаты», Е. А. Мареев «Главная стадия молнии: наблюдения и модели», В. И. Некоркин «Транзитивные последовательности в адаптивных осцилляторных сетях: гиперсети и пространственно-временной процессинг», Р. И. Нигматулин «Ударные волны в пузырьковых жидкостях», А. М. Пухов «Сверхвысокие плотности энергии и генерация терабарного давления в лазерной плазме», В. А. Рубаков «Космология: факты и проблемы», А. М. Сергеев «Процессы в экстремальных световых полях», А. В. Турлапов «Охлаждение до нанокельвинов лазерами и физика при низких температурах», А. В. Устинов «Сверхпроводящие квантовые процессоры: физика, технология и перспективы», А. М. Федотов «Множественные и непертурбативные КЭД-процессы в экстремально сильных полях», М. В. Фролов «Аналитические методы и модели для описания нелинейного взаимодействия интенсивного лазерного поля с атомными системами», Ж.-К. Киффер «Вторичные излучатели для лазеров с высокой пиковой мощностью: блестящее будущее агрикультуры и вопросы глобальной продуктовой безопасности» (J.-C. Kieffer «High peak power laser driven secondary sources: a brilliant future for agriculture and Global Food Security issues»).

В подготовке программы и материалов лекций принимали участие С. И. Бадулин, С. Н. Гурбатов, Л. С. Долин, О. А. Дружинин, А. В. Ким, В. В. Клиньшов, И. Ю. Костюков, Вл. В. Кочаровский, В. В. Курин, А. Г. Лучинин, Е. А. Мареев, С. В. Миронов, В. И. Некоркин, Е. Н. Пелиновский, А. Н. Степанов, А. А. Шайкин, С. В. Янчук. Выражаем признательность всем лекторам школы и авторам за предоставленные материалы для сборника.

А. Г. Литвак, А. В. Слюняев

**Новые приложения
источников
электромагнитного излучения**



ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ С ВЫСОКОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ

М. В. Стародубцев, А. А. Соловьев, К. Ф. Бурдонов

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород

В статье представлен обзор результатов экспериментальных исследований процессов лазерно-плазменного взаимодействия, связанных с ускорением заряженных частиц и созданием плазмы с высокой плотностью энергии для исследования задач астрофизики. Основное внимание уделено нагреву мишеней сверхмощным лазерным излучением и взаимодействию лазерной плазмы с внешними магнитными полями.

В настоящей работе представлен ряд результатов, относящихся к лабораторной астрофизике — молодому и бурно развивающемуся направлению, находящемуся на пересечении астрофизики, лазерной физики и физики плазмы. Цель лабораторной астрофизики состоит в том, чтобы с помощью лабораторных экспериментов тестировать физические модели, описывающие наблюдаемые космические явления, и решать проблемы современной астрофизики, не решенные до настоящего времени в связи с нехваткой данных наблюдений. Тем самым результаты лабораторных экспериментов позволяют достичь лучшего понимания процессов, протекающих в астрофизических объектах. Современные лазерные системы дают возможность моделировать широкий спектр астрофизических явлений — от получения в лабораторных условиях экстремальных состояний вещества, характерных для звезд и ядер планет (описанию этих результатов посвящен первый раздел), до моделирования высокоскоростных потоков плазмы, присущих аккреционным процессам (эти результаты изложены во втором разделе статьи).

Получение теплого плотного вещества с помощью фемтосекундного лазерного излучения

Задача получения в лабораторных условиях состояния вещества, называемого в англоязычной литературе режимом warm dense matter (WDM), или по-русски «теплого плотного вещества», представляет интерес как с фундаментальной точки зрения, так и с точки зрения многочисленных приложений. Свойства вещества в этом состоянии находятся на пересечении физики конденсированного состояния и физики плазмы и характери-

зуются плотностью, близкой к плотности твердого тела или превышающей ее, и температурой, превышающей 1 эВ, т. е. вещество пребывает в состоянии с высокой плотностью энергии (более 10^5 Дж/см³). В этом состоянии вещество ионизованно; вследствие высокой плотности в нем проявляются эффекты кулоновского взаимодействия между частицами и квантового вырождения. Дополнительная мотивация при исследовании вещества в состоянии WDM связана с тем, что это состояние повсеместно распространено во Вселенной, в том числе в звездах и ядрах планет.

Стоит отметить, что с точки зрения методологии лабораторных исследований WDM желательнее иметь образец с однородной температурой и плотностью. Естественным экспериментальным ограничением является то обстоятельство, что в условиях высокой плотности энергии вещество может находиться только в течение очень короткого времени инерционного удержания образца.

В ранних экспериментах для получения WDM в лабораторных условиях использовался нагрев мишеней интенсивным короткоимпульсным лазерным излучением [1], что позволяло быстро формировать WDM в тонких (нанометрового масштаба) мишенях. Недавно удалось получить WDM в более толстых (микрометровой толщины) образцах, используя нагрев быстрыми частицами (электронами [2] или ионами [3, 4]), генерируемыми при взаимодействии лазерного излучения с тем же самым образцом. Новые перспективы в исследовании WDM связаны с развитием лазеров на свободных электронах, которые позволили получить образцы с минимальными градиентами температуры и концентрации [5, 6]. Кроме того, эффективная генерация WDM возможна с помощью импульсных электрофизических машин [7].

В этом разделе будет продемонстрирована возможность квазиизохорного нагрева твердотельных мишеней микрометровой толщины до температур порядка 300 эВ с помощью сверхинтенсивного фемтосекундного излучения лазера PEARL (ИПФ РАН) [8]. Следует отметить, что основную трудность при нагреве мишени таким способом представляет наличие у фемтосекундного лазерного импульса так называемого предимпульса, имеющего наносекундные длительности. Несмотря на то, что мощность предимпульса на несколько порядков ниже, чем мощность самого фемтосекундного импульса, запасенной в предимпульсе энергии достаточно, чтобы разрушить поверхность мишени до прихода основного импульса, что может радикально изменить условия взаимодействия. Особенностью лазера PEARL, которая позволила продвинуться в задаче нагрева мишени до WDM-состояния, является то, что он основан на принципе параметрического усиления света, вследствие чего характерная длительность предимпульса и его амплитуда оказываются существенно ниже, чем у аналогичных лазерных систем, построенных на прямом лазерном усилении.

Как уже отмечалось, эксперименты выполнялись на лазерном стенде PEARL. В ходе экспериментов интенсивное лазерное излучение (длина волны — 910 нм, энергия импульса — до 8 Дж) фемтосекундной длительности (порядка 60 фс) фокусировалось внеосевой параболой на поверхность тонких твердотельных мишеней (алюминий толщиной от 10 до 0,1 мкм). Для достижения высокой пиковой интенсивности излучения на поверхности мишени (до $2,8 \cdot 10^{20}$ Вт/см² в наших экспериментах) использовалась острая фокусировка лазерного пучка: его угловая сходямость составляла 1/4 радиана. Контраст лазерного излучения, т. е. отношение интенсивности предимпульса наносекундной длительности к интенсивности основного (фемтосекундного) импульса, составлял величину $1/(2 \cdot 10^8)$.

Состояние мишени исследовалось с помощью двух методик. Во-первых, с помощью фокусирующего спектрометра с пространственным разрешением (Focusing Spectrometer with Spatial Resolution — FSSR) наблюдалось рентгеновское излучение с передней поверхности мишени, что позволяло измерить температуру и концентрацию электронов мишени под воздействием мощного лазерного излучения. Во-вторых, с обратной стороны мишени наблюдался выход ионов и протонов, ускоренных в так называемом режиме TNSA (target normal sheath acceleration) [9]; анализ характеристик этих ускоренных частиц позволял качественно обрисовать состояние задней поверхности мишени. Комбинация этих двух методов вкпе с численным моделированием взаимодействия лазерного излучения с мишенью давала возможность определить однородность нагрева мишени и наличие градиентов плотности на ее границах.

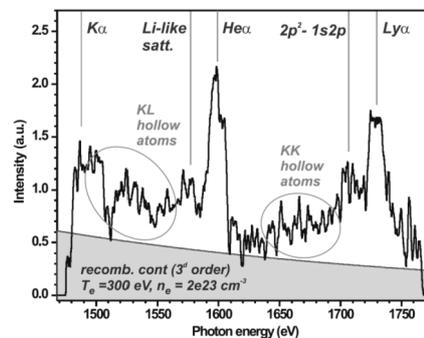


Рис. 1. Спектр излучения с передней поверхности мишени толщиной 0,8 мкм. Обозначены резонансные линии H- и He-подобных ионов алюминия, линия K α и указаны спектральные области с переходами KK и KL полых ионов алюминия. Серым цветом показан рекомбинационный континуум

Диапазон работы рентгеновского спектрометра (энергии фотонов от 1,47 до 1,74 кэВ) был выбран таким, чтобы измерять излучение K-оболочки многозарядных ионов алюминия. Из рисунка 1 видно, что в

спектре присутствуют резонансные линии $\text{Lu}\alpha$ (1727 эВ) и $\text{He}\alpha$ (1598 эВ) вместе со своими сателлитами. Как показано в работе [10], наблюдающиеся спектральные линии могут быть интерпретированы исключительно в рамках модели, в которой твердотельная мишень нагревается сверхмощным фемтосекундным излучением. Параметры плазмы определяются с помощью согласования модельных эмиссионных спектров ионов алюминия с наблюдаемыми спектрами путем подбора значений электронной температуры и плотности. Таким образом было определено, что в фокусе лазерного излучения достигается характерная температура электронов порядка 300 эВ и околотвердотельная концентрация плазмы. Отметим, что помимо характерных спектральных линий в спектре на рис. 1 присутствует рекомбинационный континуум, также соответствующий температуре электронов в излучающей плазме порядка 300 эВ и концентрации порядка твердотельной. Таким образом, данные рентгеновской спектрометрии однозначно свидетельствуют, что мощное фемтосекундное лазерное излучение взаимодействует с твердотельной мишенью, т. е. мишень не разрушена лазерным предимпульсом к моменту прихода основного импульса.

Состояние задней поверхности мишени можно качественно охарактеризовать, измерив параметры ускоренных протонов. Действительно, в условиях нашего эксперимента протоны ускорялись с помощью механизма TNSA. Как было показано в работе [9], эффективная генерация протонных пучков в этом режиме возможна только в случае, когда задняя поверхность мишени в момент прихода основного (фемтосекундного) лазерного импульса не разрушена наносекундным предимпульсом. Для того чтобы продемонстрировать разрушение мишени лазерным предимпульсом, можно варьировать толщину мишени при сохранении параметров лазерного излучения и определять ее минимальное значение, при котором еще наблюдаются ускоренные протоны с высокими энергиями, — именно на эту толщину предимпульс успевает разрушить мишень до прихода основного импульса. Данные измерений ускоренных протонов показаны на рис. 2 и 3.

На рисунке 2 представлены результаты измерения энергетического спектра ускоренных протонов при помощи набора радиоохромных пленок (radiochromic film, или RCF, в англоязычной литературе). Активный компонент пленок состоит из радиационно-чувствительного мономера. Когда пленка подвергается воздействию ионизирующего излучения (в нашем случае — вследствие поглощения протонов в пленке), происходит полимеризация активного компонента, в результате чего образуется краситель. Количество полимера (а следовательно, уменьшение прозрачности пленки) пропорционально поглощенной дозе в активном слое. Потеря энергии протоном в твердом теле (в том числе и в используемом наборе RCF-пленок) обладает особенностью — так называемым брегговским пиком поглощения. В зависимости от своей кинетической энергии протон преодолевает какое-то количество пленок, потеряв в них лишь небольшую часть энер-

гии, а в следующей останавливается и полностью теряет свою энергию. Таким образом, с некоторыми допущениями можно сказать, что изображение на каждой пленке в наборе соответствует определенной энергии протонов. Например, изображение на третьей пленке соответствует более энергичным протонам по сравнению с изображением на первой и второй пленках, но менее энергичным, чем изображение на четвертой пленке. На рисунке 2 представлены необработанные изображения с RCF-пленок.

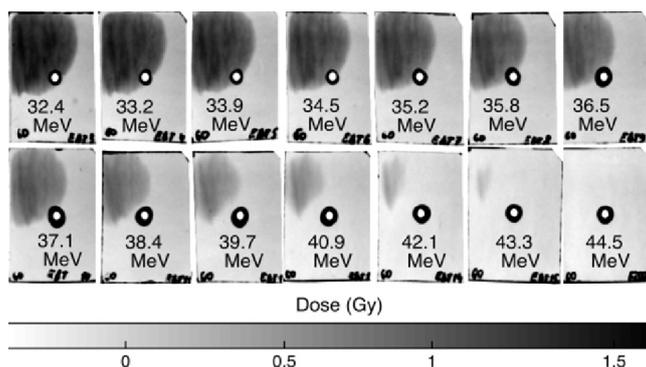


Рис. 2. Измерение энергий ускоренных протонов с помощью набора радиоохромных пленок. Потемнение пленок вызвано выделением в них энергии при прохождении протонного пучка, полученного при облучении алюминиевой мишени толщиной 0,8 мкм 60-фемтосекундным лазерным импульсом энергией 7 Дж. Значения энергии, указанные на пленках, соответствуют энергии брегговского пика поглощения протонов в соответствующей пленке

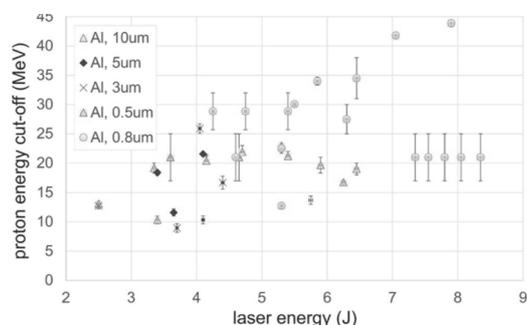


Рис. 3. Максимальная энергия протонов в зависимости от энергии лазерного импульса для различной толщины мишени

Как показано на рис. 3, при уменьшении толщины мишени максимальная энергия протонов увеличивается, что свидетельствует о том, что задняя поверхность мишеней не разрушена предимпульсом и представляет собой вещество с твердотельной плотностью.

Используя две дополняющие диагностики, мы смогли охарактеризовать взаимодействие сверхвысокоинтенсивного и высококонтрастного лазера с тонкой алюминиевой мишенью. В эксперименте удалось перевести мишень в WDM-состояние, т. е. в состояние теплого плотного вещества, что позволит в дальнейшем использовать предлагаемую методику для исследования физических процессов в веществе, находящемся в WDM-состоянии.

Лабораторное моделирование аккреционных процессов

Процессы аккреции вещества на астрофизические объекты активно исследуются в течение нескольких десятилетий. Актуальность этих исследований связана с тем, что аккреция является одним из наиболее важных механизмов энерговыделения в астрофизике и, соответственно, приводит к формированию наиболее ярких источников космического излучения. Аккрецирующие объекты были обнаружены в самых разнообразных астрофизических системах — от черных дыр и компактных звезд до молодых звезд; динамика аккреционных потоков в них обладает рядом общих черт. В частности, в процессе падения на звезду аккреционный поток разогревается и превращается в высокопроводящую плазму, которая может взаимодействовать с собственным магнитным полем звезды и магнитным полем межзвездного пространства. Действительно, аккреционное вещество (зачастую принимающее форму аккреционного диска), должно останавливаться магнитным полем звезды в области равенства магнитного и газодинамического давления [11—13]. В результате подобного взаимодействия аккреционного потока и магнитного поля формируется магнитосфера звезды, контактирующая с внутренним краем аккреционного диска. Современные представления о собственных магнитных полях аккрецирующих звезд (нейтронные звезды — порядка 10^{12} Гс, белые карлики — до десятков мегагаусс, протозвезды — порядка 10^3 Гс) свидетельствуют о том, что магнитное поле аккрецирующих звезд достаточно велико для того, чтобы внутренний край аккреционного диска формировался на некотором удалении от поверхности звезды. Проникновение аккреционной плазмы внутрь магнитосферы может происходить только в результате развития каких-либо неустойчивостей на внутреннем крае аккреционного диска. Механизмы генерации этих неустойчивостей до конца не изучены, хотя динамика плазменных потоков в области баланса магнитного и газодинамического давлений рассматривалась в большом числе работ [14—17].

Эксперименты, направленные на исследование процессов разлета плотного плазменного облака поперек внешнего магнитного поля, проводились с 1970-х годов в лабораторных [18—20] и магнитосферных условиях [21]. Основным результатом этих исследований было обнаружение уси-

ленного по сравнению с классическими представлениями магнитной гидродинамики проникновения магнитного поля внутрь облака плотной плазмы и быстрого развития осцилляторной структуры на его границе. Характерные размеры наблюдаемой осцилляторной структуры оказывались меньше или порядка ларморовского радиуса ионов лазерной плазмы, ее формирование было интерпретировано в рамках так называемой холловской магнитной гидродинамики [22] как неустойчивость Рэля — Тейлора с учетом конечного гирорадиуса ионов лазерной плазмы. Эта неустойчивость определяет динамику взаимодействия диамагнитного плазменного облака с магнитным полем и фоновой плазмой в случае субальфвеновского разлета облака [21], т. е. когда альфвеновская скорость в фоновой плазме V_A много больше скорости разлета плазменного облака V_0 : $V_A \gg V_0$. Именно в этом режиме разлет плазмы тормозится магнитным полем, а не фоновой плазмой и именно такой режим реализуется во многих астрофизических ситуациях, в том числе в аккреционных течениях. Таким образом, уже в ранних экспериментах было обнаружено, что при описании процессов взаимодействия потоков плазмы с внешним магнитным полем необходимо учитывать эффекты, связанные с быстрым развитием неустойчивости в области торможения плазмы внешним магнитным полем, например во внутренних областях аккреционных дисков.

Основным ограничением предыдущих экспериментов являлась принципиальная невозможность изменения геометрии эксперимента. Действительно, основным методом создания плотного плазменного облака в лабораторных экспериментах было облучение твердотельной мишени размером порядка 1 см лазерным излучением длительностью порядка 1—100 нс и энергией порядка 1—100 Дж. В этих экспериментах лазерная плазма расширялась в большой вакуумный объем (с характерными размерами, достигающими нескольких кубических метров), заполненный квазиоднородным магнитным полем напряженностью порядка нескольких сотен гаусс, лазерная плазма при этом вытесняла магнитное поле, формируя «диамагнитную» полость размерами порядка нескольких десятков сантиметров. Таким образом, во всех экспериментах исследовалось взаимодействие квазисферического плазменного облака с внешним магнитным полем. В настоящей работе представлен другой подход к постановке подобных экспериментов. В рамках этого подхода эксперименты проводились в сильном магнитном поле порядка 10—20 Тл, что позволило уменьшить характерные размеры области торможения плазмы магнитным полем до миллиметрового или даже субмиллиметрового масштаба. Вместе с этим размер мишени и размер пятна лазерного излучения на ее поверхности может достигать масштаба порядка нескольких сантиметров, что позволяет формировать плазменный поток почти любой геометрии и значительно расширяет возможности лабораторного моделирования. В частности,

в этой статье представлены результаты лабораторного исследования взаимодействия узкого плазменного слоя, моделирующего геометрию аккреционного диска, с внешним магнитным полем. Отметим также, что характерные концентрации лазерной плазмы в получающемся облаке оказываются больше или порядка 10^{17} см^{-3} , что позволяет использовать оптическую интерферометрию для диагностики плазмы. Высокое пространственное разрешение этого метода и хорошая повторяемость лазерной плазмы обеспечили возможность детального изучения динамики взаимодействия облака лазерной плазмы с магнитным полем, в особенности на больших временах развития процесса, не исследованных до настоящего времени. Схема эксперимента представлена на рис. 4.

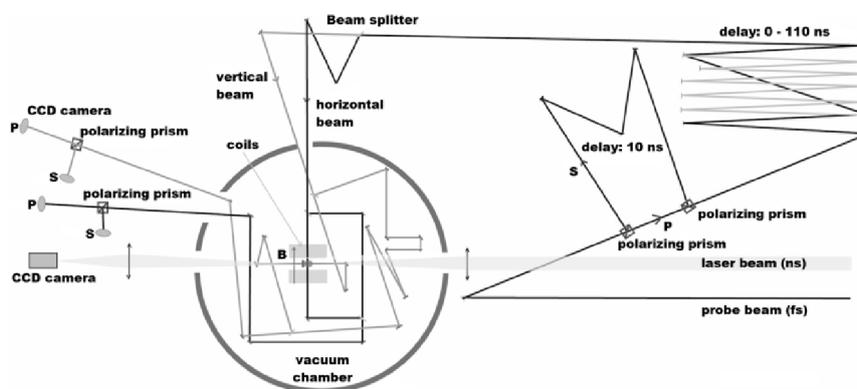


Рис. 4. Схема эксперимента по лабораторному исследованию взаимодействия потоков плазмы с внешним магнитным полем

Высокоскоростной поток плотной плазмы, моделирующий плазму аккреционного диска, формировался путем термической абляции вещества с поверхности твердотельной мишени при ее облучении мощным лазерным излучением. Лазерный импульс, посредством которого создавалась плазма (laser beam на рис. 4), поставлялся лазером накачки на неодимовом стекле и имел следующие параметры: диаметр пучка — 100 мм, длительность — 1 нс, энергия импульса — до 30 Дж, длина волны — 527 нм (излучение на второй гармонике лазера накачки). Лазерный пучок фокусировался на поверхность мишени с углом схождения, равным $1/10$ радиана. Мишень располагалась внутри соленоида, создающего квазиоднородное внешнее магнитное поле напряженностью порядка 15 Тл. При облучении мишени наносекундным лазерным излучением с ее поверхности вылетает высокоскоростной поток абляционной лазерной плазмы. Скорость плазменного потока максимальна в направлении по нормали к поверхности мишени и составляет величину порядка 100—1000 км/с в зависимости от интенсивно-

сти лазерного излучения на поверхности мишени. Вследствие высокой проводимости лазерной плазмы магнитное поле в начальные моменты времени оказывается вмороженным в плазму, в результате чего при расширении плазменного облака напряженность вмороженного магнитного поля быстро уменьшается. Таким образом, представленные ниже экспериментальные результаты соответствуют взаимодействию плотного потока практически немагнитной плазмы с внешним магнитным полем.

Для фемтосекундной оптической интерферометрической диагностики параметров и динамики плазмы, разлетающейся в вакуум при наличии внешнего магнитного поля, использовалось лазерное излучение комплекса PEARL на выходе из оптического компрессора с центральной длиной волны 910 нм, длительностью около 100 фс и энергией до 10 мДж. В мишенной камере были собраны два интерферометра Маха — Цандера (горизонтальный и вертикальный — показаны на рис. 4 тонкими линиями), позволяющие получать мгновенные двумерные картины пространственного распределения плазмы на временах от 0 до 110 нс после начала формирования плазменного облака в двух плоскостях: вдоль направления силовых линий магнитного поля (вертикальный интерферометр) и перпендикулярно (горизонтальный интерферометр). При помощи призмы Глана (polarizing prism на рис. 4) фемтосекундный пучок разделялся на две поляризационные компоненты, одна из которых задерживалась относительно другой на 10 нс. Каждая из компонент проходила через интерферометр и регистрировалась независимо, что позволяло получать за один выстрел два различных момента эволюции плазмы.

На рисунке 5 представлены интерферометрические измерения динамики разлета облака лазерной плазмы при «точечной» фокусировке лазерного излучения на поверхность мишени. Диаметр лазерного излучения на мишени составлял 0,4 мм, максимальная интенсивность излучения при этом достигала $2 \cdot 10^{13}$ Вт/см². Этот плазменный поток взаимодействовал с внешним магнитным полем, направленным вдоль поверхности мишени, т. е. плазменный поток распространялся преимущественно поперек магнитных силовых линий. Подобная постановка задачи, как отмечалось выше, была направлена на моделирование процессов взаимодействия аккреционных течений с магнитным полем звезды. Следует отметить, что в условиях магнитосферной аккреции поток плазмы, двигаясь перпендикулярно магнитным силовым линиям в направлении увеличения магнитного поля звезды, достигает области, в которой сохраняется баланс газодинамического давления потока и магнитного давления и развиваются интересные нас явления торможения плазменного потока и формирования неустойчивостей на его границе. В лабораторных экспериментах, напротив, поток лазерной плазмы движется в изначально однородном магнитном поле, однако при удалении от мишени плотность лазерной плазмы уменьшается, в результате чего на некотором расстоянии от поверхности

мишени газодинамическое давление лазерной плазмы также сравнивается с магнитным давлением. Эта область в лабораторных экспериментах и будет моделировать интересующую нас область аккреционного потока.

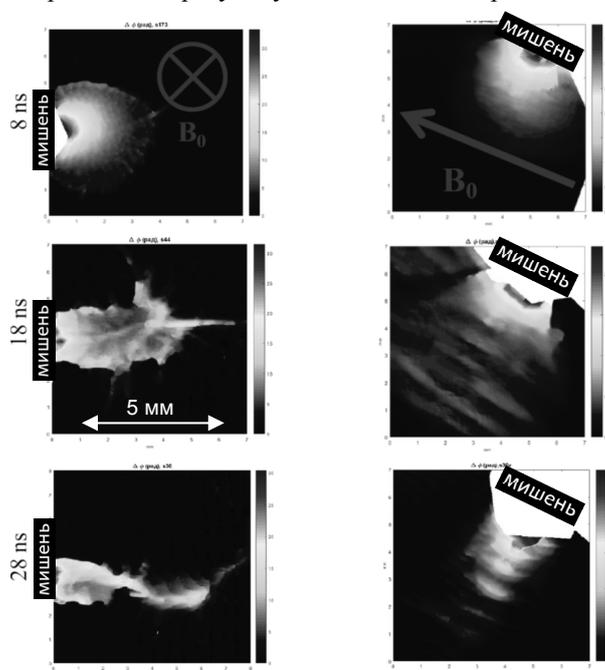


Рис. 5. Интерферометрические измерения динамики разлета плазменного потока во внешнее магнитное поле. Представлен набег фазы в диагностическом луче, проходящем через плазменное облако. Набег фазы пропорционален интегральной концентрации электронов ($\int N_e dl$) вдоль направления распространения луча. Левая колонка — распределение интегральной концентрации для интерферометрических измерений вдоль направления внешнего магнитного поля \mathbf{B}_0 , правая колонка — для измерений поперек \mathbf{B}_0

Анализ экспериментальных данных, представленных на рис. 5, позволяет выделить несколько этапов в процессе взаимодействия плазменного потока с внешним магнитным полем. На начальном этапе лазерная плазма расширяется, практически не чувствуя магнитное поле, так как давление плазмы значительно превосходит давление внешнего магнитного поля. На временах порядка 10 нс после прихода лазерного драйвера разлет плазмы останавливается магнитным полем, в результате чего формируется резко очерченная немагнитная плазменная каверна (верхний ряд панелей). Уже на этом этапе наблюдается развитие мелкомасштабной неустойчивости, имеющей, по-видимому, желобковый характер. Действительно,

на левом верхнем рисунке хорошо видна мелкомасштабная модуляция границы плазменной каверны. Дальнейшая динамика каверны связана с развитием этой неустойчивости: характерный масштаб неустойчивости увеличивается, плазма просачивается из каверны между силовыми линиями внешнего магнитного поля в виде узких плазменных слоев, в результате чего размер каверны уменьшается (средний ряд панелей). На поздних этапах развития (нижний ряд панелей) выделяется преимущественное направление просачивания плазмы — по нормали к поверхности мишени, т. е. в направлении максимальной начальной скорости плазменного потока. В результате каверна деградирует, а плазменный поток формирует узкий «лист», ориентированный преимущественно в плоскости, образованной нормалью к поверхности мишени и направлением внешнего магнитного поля.

Обратимся теперь к лабораторному моделированию динамики дисковой аккреции. Пример такой аккреции схематически изображен на рис. 6 (рисунок взят из работы [13]). Структура диска аксиально-симметрична и может быть смоделирована достаточно узким слоем плазмы.

Формирование узкого слоя плазмы, расширяющегося во внешнее магнитное поле, достигалось с помощью соответствующего профилирования интенсивности лазерного излучения на поверхности мишени. Для этого использовалась маска, установленная сразу после фокусирующей линзы, вырезающая из исходного круглого пучка вертикальную полоску длиной 100 мм и толщиной 10 мм. На поверхности мишени сходящийся пучок образовывал полоску размерами 10 мм на 1 мм, что соответствовало максимальной пиковой интенсивности излучения порядка $5 \cdot 10^9$ Вт/см². Полоска была ориентирована длинной стороной поперек направления внешнего магнитного поля, что как раз и моделирует взаимодействие края аккреционного диска с магнитным полем звезды, как показано на рис. 6.

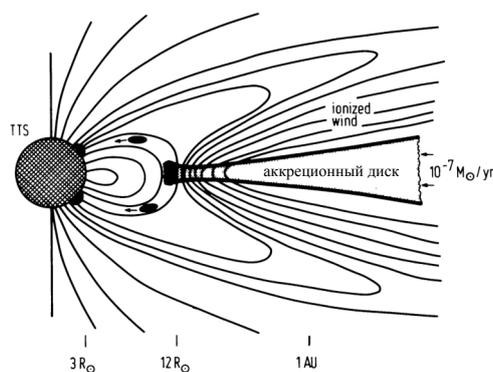


Рис. 6. Схематическое изображение дисковой аккреции на молодую звезду [13]

Результаты интерферометрических измерений динамики разлета плоского плазменного слоя во внешнее магнитное поле представлены на рис. 7. Видно, что изначально однородный плазменный слой под действием желобковой неустойчивости рассыпается на набор параллельных плазменных «листов», вытянутых вдоль направления внешнего магнитного поля и сжатых в поперечном направлении.

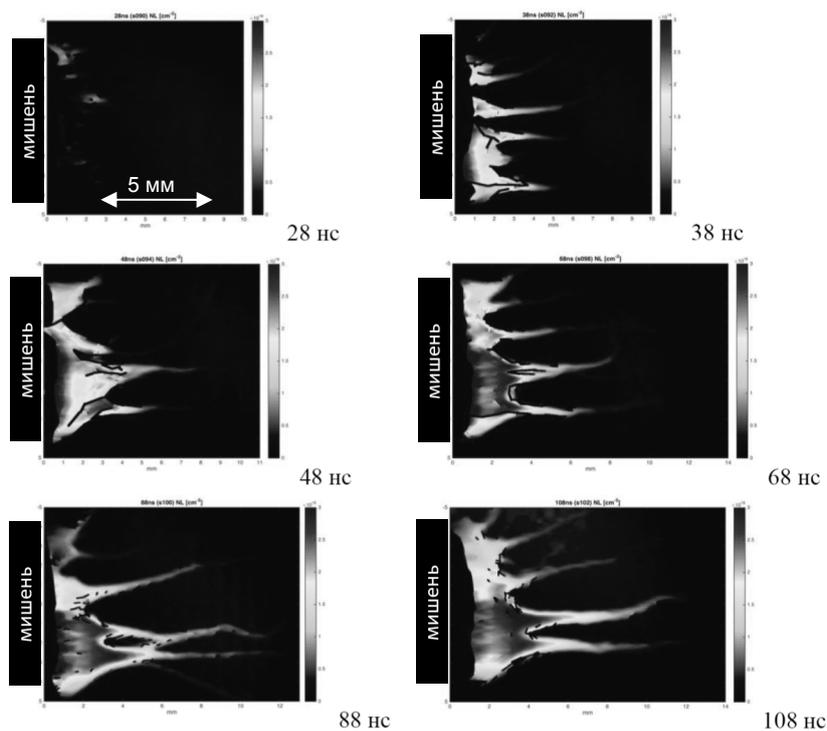


Рис. 7. Результаты интерферометрических измерений динамики взаимодействия плоского плазменного слоя с внешним однородным магнитным полем. Направление магнитного поля перпендикулярно плоскости рисунка. Указаны моменты времени после начала создания плазменного слоя

Таким образом, в лабораторных экспериментах установлено, что динамика плазменных потоков при их взаимодействии с внешним магнитным полем определяется неустойчивостями желобкового типа, приводящими к расщеплению первоначально однородного плазменного потока на узкие плазменные слои, ориентированные вдоль направления внешнего магнитного поля. В результате наблюдается быстрая деградация границы между плазмой и магнитным полем, а плазма стремительно проникает

вглубь магнитного поля между его силовыми линиями. Следует отметить, что подобный режим проникновения плазмы в магнитное поле противоречит распространенной в настоящее время концепции, описывающей процесс магнитосферной аккреции вещества. Действительно, принято считать, что вещество, достигая края аккреционного диска, перетекает на звезду вдоль линий магнитной индукции, образуя так называемую аккреционную шторку или колонку. Однако результаты представленных лабораторных экспериментов позволяют предположить наличие альтернативного механизма аккреции, связанного с проникновением плазмы к поверхности звезды в экваториальной плоскости ее магнитного поля.

Литература

1. *Ng, A.* Reflectivity of intense femtosecond laser pulses from a simple metal / A. Ng [et al.] // *Physical Review Letters*. — 1994. — Vol. 72, № 21. — P. 3351—3354.
2. *Perez, F.* Enhanced isochoric heating from fast electrons produced by high-contrast, relativistic-intensity laser pulses / F. Perez [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2010. — Vol. 104, № 8. — Art. 085001.
3. *Snavely, R. A.* Laser generated proton beam focusing and high temperature isochoric heating of solid matter / R. A. Snavely [et al.] // *Physics of Plasmas*. — 2007. — Vol. 14. — Art. 92703.
4. *Antici, P.* Isochoric heating of matter by laser-accelerated high-energy protons / P. Antici [et al.] // *Journal de Physique IV*. — 2006. — Vol. 133. — P. 1077—1079.
5. *Lévy, A.* The creation of large-volume, gradient-free warm dense matter with an X-ray free-electron laser / A. Lévy [et al.] // *Physics of Plasmas*. — 2015. — Vol. 22. — Art. 30703.
6. *Vinko, S. M.* Creation and diagnosis of a solid-density plasma with an X-ray free-electron laser / S. M. Vinko [et al.] // *Nature*. — 2012. — Vol. 482. — P. 59—62.
7. *Gourdain, P.-A.* The generation of warm dense matter samples using fast magnetic compression // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 2015. — Vol. 43. — P. 2547—2552.
8. *Soloviev, A.* Experimental evidence for short pulse laser heating of solid-density target to high bulk temperatures / A. Soloviev [et al.] // *Sci. Rep.* — 2017. — Vol. 7. — Art. 12144.
9. *Fuchs, J.* Laser-driven proton scaling laws and new paths towards energy increase / J. Fuchs, P. Antici, E. D’Humieres [et al.] // *Nature Physics*. — 2006. — Vol. 2, № 1. — P. 48—54.
10. *Пикуз, С. А.* Формирование плазмы с определяющей ролью радиационных процессов при облучении тонких фольг импульсом субпетаваттного лазера PEARL / С. А. Пикуз, И. Ю. Скобелев, М. А. Алхимова [и др.] // *Письма в ЖЭТФ*. — 2017. — Т. 105, вып. 1. — С. 15—20.
11. *Ghosh, P.* Accretion by rotating magnetic neutron stars. III. Accretion torques and period changes in pulsating X-ray sources / P. Ghosh, F. K. Lamb // *Astrophysical Journal*. — 1979. — Vol. 234. — P. 296—316.
12. *Koide, S.* Relativistic jet formation from black hole magnetized accretion disks : method, tests, and applications of a general relativistic magnetohydrodynamic numerical

- code / S. Koide, K. Shibata, T. Kudoh // *Astrophysical Journal*. — 1999. — Vol. 522. — P. 727—752.
13. *Camenzind, M.* Magnetized disk-winds and the origin of bipolar outflows // *Reviews in Modern Astronomy*. — 1990. — Vol. 3. — P. 234—265.
14. *Arons, J.* Accretion onto magnetized neutron stars : structure and interchange instability of a model magnetosphere / J. Arons, S. M. Lea // *Astrophysical Journal*. — 1976. — Vol. 207. — P. 914—936.
15. *Lubow, S.* Magnetic interchange instability in accretion disks / S. Lubow, H. Spruit // *Astrophysical Journal*. — 1995. — Vol. 445, № 1. — P. 337—347.
16. *Stehle, R.* Stability of accretion discs threaded by a strong magnetic field // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2001. — Vol. 323, № 3. — P. 587—600.
17. *Kulkarni, A. K.* Accretion to magnetized stars through the Rayleigh–Taylor instability: global 3D simulations / A. K. Kulkarni, M. M. Romanova // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2008. — Vol. 386. — P. 673—687.
18. *Tuckfield, R. G.* Dynamics of a laser created plasma expanding in a magnetic field / R. G. Tuckfield, F. Schwirzke // *Plasma Physics*. — 1969. — Vol. 11, № 1. — P. 11—18.
19. *Bondarenko, A. S.* Laboratory study of collisionless coupling between explosive debris plasma and magnetized ambient plasma / A. S. Bondarenko, D. B. Schaeffer, E. T. Everson [et al.] // *Physics of Plasmas*. — 2017. — Vol. 24. — Art. 082110.
20. *Захаров, Ю. П.* Роль желобковой неустойчивости холловского типа при взаимодействии лазерной и космической плазмы с магнитным полем / Ю. П. Захаров, В. М. Антонов, Э. Л. Бояринцев [и др.] // *Физика плазмы*. — 2006. — Т. 32, № 3. — С. 207—229.
21. *Huba, J. D.* Preliminary study of the CRRES magnetospheric barium releases / J. D. Huba, P. A. Bernhardt, J. G. Lyon // *Journal of Geophysical Research*. — 1992. — Vol. 97, № A1. — P. 11—24.
22. *Hassam, A. B.* Structuring of the AMPTE magnetotail barium releases / A. B. Hassam, J. D. Huba // *Geophys. Res. Lett.* — 1987. — Vol. 14, № 1. — P. 60—63.

ЛАЗЕРНЫЕ СИСТЕМЫ ДЛЯ УДАЛЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО МУСОРА С ОКОЛОЗЕМНОЙ ОРБИТЫ

О. В. Палашов

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород

В статье приводятся материалы, подтверждающие актуальность проблемы космического мусора, описана классификация способов его удаления и рассмотрены варианты очистки околоземной орбиты от космического мусора при помощи лазерных систем.

1. Введение

1.1. Намусорили. Где? Как? Чем?

Космический мусор (КМ) — все искусственные объекты и их фрагменты в космосе, которые неисправны, не функционируют и никогда не смогут служить полезным целям. Официальный статус на международном уровне проблема засорения околоземного космического пространства получила еще в прошлом столетии, после доклада Генерального секретаря ООН «Воздействие космической деятельности на окружающую среду» (10.12.1993), где было отмечено, что проблема имеет международный, глобальный характер, поскольку нет засорения национального околоземного космического пространства, есть засорение космического пространства Земли, одинаково негативно влияющее на все страны.

Большинство объектов КМ образовалось при столкновении или разрушении спутников (например, в 1996 г. французский спутник столкнулся с фрагментом третьей ступени французской же ракеты Ariane; в 2006 г. спутник «Экспресс-АМ11» столкнулся с объектом КМ; в 2009 г. коммерческий спутник американской компании Iridium столкнулся с российским спутником «Космос-2251»), что определяет состав (по материалам это металлы, пластики и т. д.) и местоположение КМ (высоты орбит).

КМ занимает огромное пространство вплоть до геостационарной орбиты (почти 36000 км над поверхностью Земли). Однако его плотность сильно неоднородна и максимальное количество находится на так называемых низких околоземных орбитах, имеющих высоты 160...2000 км. Существенное повышение орбит делает спутники экономически малоэффективными (требуются более мощные передающие усилители, большее число спутников в сети и т. п.). Поскольку все космические станции и большая часть искусственных спутников Земли используют (или использовали) низкие орбиты, именно тут сосредоточена большая часть КМ.

По габаритам КМ разделяют обычно на три группы: менее 1 см, от 1 до 10 см и более 10 см. Существующие сегодня технологии позволяют каталогизировать практически все объекты, линейные размеры которых более 10 см (а их десятки тысяч). Объекты КМ размером менее 1 см (частиц размером в диапазоне 0,1...1 см насчитывается более сотни миллионов) относительно безопасны, поскольку от них существуют способы защиты в виде различных механических приспособлений (заслонки, экраны, щиты) в наиболее уязвимых местах космических аппаратов (иллюминаторы, соединительные узлы и т. п.) [1]. Поэтому наибольшую неконтролируемую угрозу представляет КМ размером 1...10 см. Проблема усугубляется высокими (порядка 10 км/с) скоростями КМ, которые даже при незначительной (~10 %) дисперсии обеспечивают разницу скоростей между объектами, превышающую скорость пули (!). На рис. 1 приведены расчетные данные распределения средней плотности КМ размером 1...10 см по высотам [3].

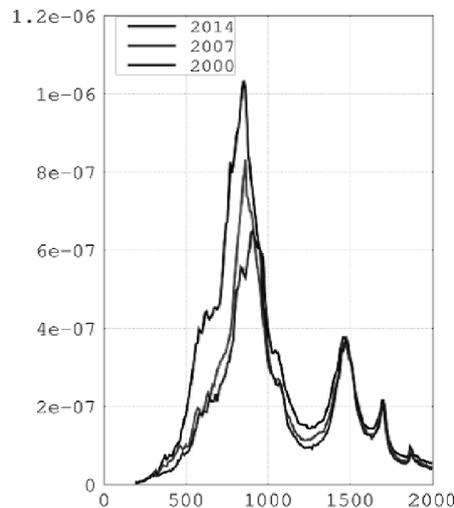


Рис. 1. Расчетные данные распределения средней плотности КМ размером 1...10 см по высотам [3]. По горизонтальной оси отложена высота в километрах, по вертикальной — средняя плотность в $1/\text{км}^3$ в зависимости от года

Проблема КМ усугубляется двумя тенденциями: увеличением количества запускаемых аппаратов и существенным уменьшением их размеров. Из-за последнего их каталогизация усложняется (для наноспутников) или становится совсем невозможной (для пикоспутников). Наноспутники CubeSat — формат малых искусственных спутников, имеющих объем не более

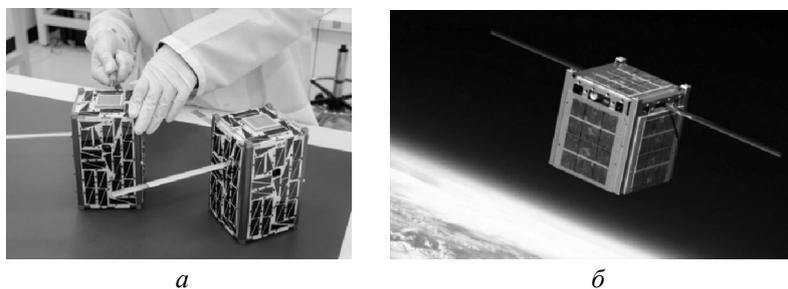


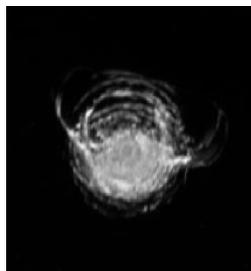
Рис. 2. CubeSat на столе (*а*) и на орбите (реконструкция) (*б*)

нескольких литров и массу в единицы килограммов (рис. 2). Создание CubeSat стало возможным благодаря развитию нанотехнологий и превратилось в массовое явление в XXI веке. В 2012 году типичная стоимость запуска CubeSat оценивалась в 20 тысяч долларов (по заявлению NASA [4]). Столь низкая стоимость и унификация платформ и комплектующих позволяет разрабатывать и запускать наноспутники университетам, школам (!) и небольшим частным компаниям. Большинство CubeSat имеют один или два научных прибора, некоторые оснащены небольшими выдвижными антеннами и поверхностными или распахивающимися солнечными батареями. Недавно появился еще более малый формат — пикоспутники PocketSat (весом в несколько сотен или десятков граммов и размером в несколько сантиметров).

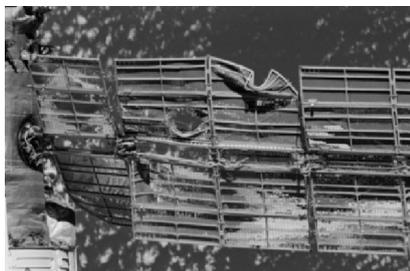
1.2. Реальная угроза?

В последние годы экипажам пилотируемой Международной космической станции (МКС) приходится по несколько раз в год осуществлять корректировку орбиты, чтобы избежать потенциально катастрофических столкновений с крупными объектами КМ. В случаях, когда мусор идентифицируют поздно, космонавты укрываются в специальных капсулах на борту МКС, где пережидают.

В мае 2016 года британский астронавт Тимоти Пик с борта МКС отправил на Землю снимок с повреждением иллюминатора в модуле «Купол», на котором отчетливо заметен скол диаметром около 7 мм (рис. 3, *а*) [5]. По мнению представителей Европейского космического агентства, это повреждение нанес металлический фрагмент или кусочек облупившейся краски размером не более нескольких тысячных (!) миллиметра [6]. На рис. 3, *б* приведена фотография солнечной батареи станции «Мир» (находившейся на орбите в 1986—2001 гг.), демонстрирующая значительные повреждения от КМ.



а



б

Рис. 3. Фотографии с повреждениями от объектов КМ: иллюминатора в модуле «Купол» (*а*), солнечной батареи станции «Мир» (*б*)



Рис. 4. Фрагмент топливного бака второй ступени ракетоносителя, упавший после запуска ракеты «Дельта-2» в Техасе в 1997 году

Падающий КМ является угрозой не только в околоземном пространстве, но и на Земле (рис. 4), и количество потенциально опасных объектов постоянно растет.

2. Различные способы удаления КМ

2.1. Обрато к гарпунам и неводам

Учитывая глобальность проблемы, компании многих стран приступили к разработке методов очистки околоземных орбит. Эти методы условно можно разделить на две категории: активные, которые удаляют объект КМ с орбиты (перемещают либо на более низкую орбиту для сгорания в атмосфере, либо на более высокую — орбиту захоронения, что технически гораздо проще, на ней отслужившие спутники могут находиться тысячи лет), и пассивные, предотвращающие само образование КМ.

Пассивные методы подразумевают разработку дополнительных устройств, которые устанавливаются на космическом объекте и срабатывают по окончании срока службы, чтобы обеспечить его увод с орбиты. Принцип действия устройств заключается в увеличении силы аэродинамического сопротивления за счет создания большей площади путем разворачивания

тормозных конструкций (шарообразные надувные каркасы, призмные мембраны с саморазворачивающимися штангами и т. п.) [7], что позволяет снижать орбиту объекта вплоть до его вхождения в плотные слои атмосферы с последующим разрушением.

Активные методы можно разделить на две части по способу воздействия на КМ: контактные и бесконтактные. Основная идея контактных методов (известная как Electro Dynamic Debris Eliminator [8]) заключается в отправке в космос непилотируемого спутника, вооруженного такими старинными орудиями, как сеть [9], трос [10], гарпун [11], либо роботизированным манипулятором [12] для механического захвата объектов КМ. Детальный обзор механизмов и методов захвата приведен в работе [13]. Разработчики полагают, что таким способом можно убирать объекты весом от 2 кг и более. Проекты подкупают своей простотой и относительной дешевизной. Однако многие считают, что такие способы опасны, поскольку стыковка с неуправляемым объектом на сегодняшний день является сложной технической задачей, поэтому аварии на этом этапе весьма вероятны, а даже незначительный процент аварий может привести к образованию большего количества мелкого КМ.

Для малых объектов КМ (массой менее 1 кг) предлагается торможение в облаке геля [14], вольфрамовой пыли (которая способна передавать тормозящий импульс любому объекту, за который зацепится) и в других мелкодисперсных средах (которые могут выстреливаться в объект КМ под требуемым углом, скоростью и т. п.). Однако такие способы могут иметь катастрофические последствия для функционирующих спутников и чувствительного оборудования (например, солнечных батарей). Следовательно, их можно рассматривать, скорее, как модель «перезагрузки» — полного очищения земной орбиты.

2.2. Бесконтактные способы

Наиболее перспективными сегодня, по мнению многих ученых, выглядят бесконтактные методы благодаря существующим эффективным и малорискованным схемам направленного перемещения объекта КМ от его первоначальной орбиты различными способами: на основе кулоновского взаимодействия [15], воздействия ионным потоком [16], лазерным излучением [17] и т. п.

Один из популярных сегодня проектов LEOSWEEP (improving Low Earth Orbit Security With Enhanced Electric Propulsion) [18], финансируемый Европейским союзом, посвящен развитию технологии IBS (Ion Beam Shepherd): космического аппарата — «пастуха» с ионным лучом для удаления крупного КМ. Концепция метода была предложена группой космической динамики Технического университета Мадрида (SDG-UPM) в 2010 го-

ду [16] и изучалась в рамках исследования Ariadna в Европейском космическом агентстве. Ионные и плазменные двигатели, обычно используемые для маневрирования космических кораблей, предлагается применять для создания коллимированного плазменного луча, наводящегося на орбитальный объект. Высокоскоростные ионы плазмы воздействуют на мишень, передавая свой импульс и таким образом создавая силу и вращающий момент, действующие на объект.

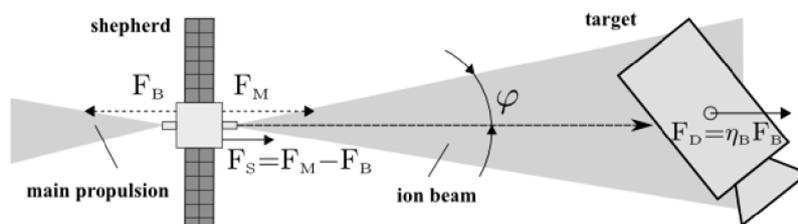


Рис. 5. Принципиальная схема удаления КМ проекта LEOSWEEP [16]

Концепция проиллюстрирована на рис. 5. «Пастух» оснащен двумя силовыми установками. Первичная силовая установка испускает пучок ускоренной квазинейтральной плазмы на мишень (покидающая двигательную систему плазма всегда нейтрализуется, чтобы избежать накопления заряда на космическом корабле), действуя на мишень силой F_D посредством импульса, переносимого ионами плазмы с эффективностью воздействия η_B :

$$F_D = \eta_B F_B,$$

где F_B — противодействующая сила излученного потока плазмы на спутник-«пастух». Величина F_B , в свою очередь, определяется мощностью P_B и скоростью ионов V , испускаемых первичной силовой установкой:

$$F_B \sim P_B V.$$

Согласно многочисленным экспериментам и численным моделям [19—21] ионы с килоэлектронвольтовой энергией внедряются в поверхность металла (например, алюминий) на доли микрометра и передают свою кинетическую энергию мишени. После этого ионы покидают поверхность мишени с ее тепловой скоростью, которая в несколько раз меньше, чем скорости ионов в луче, и поэтому их импульсом можно пренебречь. Если не учитывать импульс, связанный с ионным распылением с поверхности мишени, и полагать, что луч полностью перехватывается мишенью, то $F_D = F_B$ (по модулю).

«Пастуху» требуется вспомогательная (вторичная) силовая установка для создания уравновешивающей силы F_M , необходимой для поддержания на постоянном расстоянии «пастуха» и мишени, а для постоянного кон-

троля положения космического корабля требуется радиолокационная измерительная система.

Таким образом, разрабатывается эффективная и низкорискованная концепция направленного перемещения мишени от ее начальной орбиты с использованием бесконтактного ионного потока, создаваемого на борту расположенного перед ней на небольшом (10...20 м) расстоянии орбитального космического корабля-«пастуха», т. е. без физического контакта с объектом КМ. В результате воздействия объект КМ затормаживается и переходит на более низкую орбиту. Однако из-за сложности фокусировки подразумеваются крупные (порядка 1 м), а значит, в большинстве своем каталогизированные объекты. На объекты КМ размером в несколько сантиметров, которые, как отмечалось выше, и представляют максимальную угрозу, ориентированы проекты, использующие лазерное излучение. Эти проекты можно разделить на две группы по местоположению источника излучения: лазеры наземного базирования и орбитальные лазеры. Их более подробное рассмотрение вынесено в отдельный раздел.

3. Удаление КМ при помощи лазера

3.1. Лазер наземного базирования

Разработки по различного рода воздействию (нагрев, абляция и т. п.) на удаленную мишень излучением лазера наземного базирования ведутся с 1980-х годов. Ключевой проблемой в задаче «наведения лазерного излучения на мишень малых размеров и доставки излучения через турбулентную атмосферу» [22] является искажение его волнового фронта. Процедура обращения фронта волны (ОВФ), как известно, эквивалентна замене комплексной амплитуды волны E на комплексно-сопряженную [23], что может быть достигнуто тремя способами: механически (деформируемым зеркалом); методами линейной оптики (записывание и считывание голограммы) и методами нелинейной оптики (с использованием нелинейной среды).

На рис. 6 изображена схема применения метода ОВФ [22], основанная на идее ОВФ-самонаведения [24]. Предположим, что требуется доставить излучение лазера на удаленную мишень малых размеров M . Для этого предлагается осветить мишень излучением вспомогательного лазера $ВЛ$. Рассеянные мишенью вторичные волны частично перехватываются объективом O , усиливаются в усилителе $УС$ и направляются в устройство ОВФ. Обратная волна на обратном проходе дополнительно усиливается в $УС$ и попадает на мишень. Существенно, что в ОВФ-импульсе автоматически компенсируются фазовые неоднородности усилителя, aberrации оптики, погрешности юстировки и т. п., что позволяет доставить его энергию на мишень без потерь.

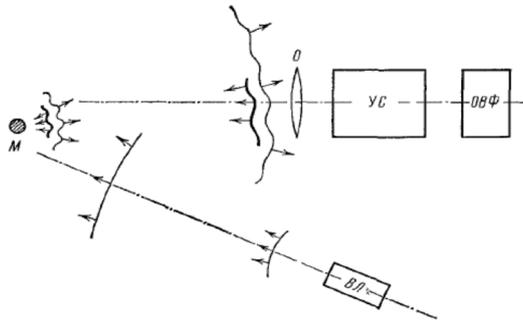


Рис. 6. Схема ОВФ-самонаведения [22]

В основе предложенной схемы самонаведения лежит обращение волнового фронта, которое физически может быть реализовано разными способами. Наиболее простой для понимания метод ОВФ — голографический [25], в котором при помощи голограммы сохраняется информация об объекте в виде интерференционной картины, созданной («записанной») двумя волнами — опорной и объектной [2]. Если в фоточувствительной среде Γ (рис. 7) опорная волна E_1 и объектная волна E_3 записывают интерференционные возмущения диэлектрической проницаемости вида

$$\delta\epsilon \sim E_1^* E_3 + E_1 E_3^*,$$

то на стадии считывания волной E_2 , встречной по отношению к опорной (т. е. $E_2 = E_1^*$), голограмма восстановит обращенную волну:

$$E_4 \sim E_1 E_2 E_3^* = |E_1|^2 E_3^*.$$

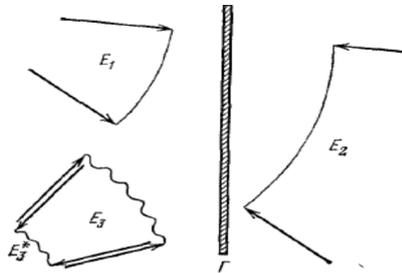


Рис. 7. Схема голографического метода ОВФ [22]

Более интересна возможность записи и считывания голограммы в динамическом режиме, т. е. в реальном масштабе времени. Роль среды Γ (рис. 7) могут выполнять любые среды, у которых комплексная диэлектрическая проницаемость меняется под действием света непосредственно во время экспозиции. К ним относятся среды с кубичной (реже — квадратичной) оптической нелинейностью. В нелинейной среде с кубичным откликом поляризации P две опорные волны $E_{1,2}$ и объектная волна E_3 соз-

дают слагаемое в поляризации $P_i = \chi_i E_1 E_2 E_3^*$. Поскольку в объеме взаимодействия использованы четыре волны, такой метод ОВФ называют методом четырехволнового смешения (ОВФ-4ВС).

Поскольку вышеупомянутые методы для своей реализации требуют плоских или сферических опорных волн высокого (дифракционного) качества и большой мощности, наиболее предпочтителен метод ОВФ при вынужденном рассеянии света (ОВФ-ВР), который свободен от этих недостатков. Для этого необходимо иметь всего две волны — опорную E_L и объектную E_S (рис. 8), но с определенной разностью частот $\Omega = \omega_L - \omega_S$, близкой к собственным колебаниям среды (т. е. частотам так называемых нулевых флуктуаций неоднородностей среды [26]). Тогда интерференционное слагаемое $E_L^* E_S$ в интенсивности суммарного светового поля «раскачивает» эти колебания. В случае наиболее используемого вынужденного рассеяния Мандельштама — Бриллюэна (ВРМБ) «раскачка» колебаний происходит под действием электрострикционной силы. В результате рождается бегущая со скоростью гиперзвука пространственно-временная решетка диэлектрической проницаемости $\delta\epsilon \sim E_L^* E_S$, которая приводит к усилению волны E_S . При выполнении ряда условий (например, фокусировка спеклованного фазовой пластинкой Φ лазерного пучка (рис. 8)) ВРМБ может развиваться от очень низкого уровня спонтанного рассеяния, которое служит источником E_S , реализуя тем самым эффект самообращения [26].

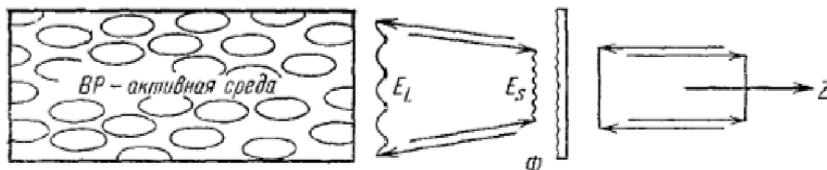


Рис. 8. Схема ОВФ-ВР [22]

К сожалению, лишь малая доля энергии лазера ВЛ поступает на усилитель УС (см. рис. 6), поэтому увеличение чувствительности ОВФ-ВР является актуальной задачей. Достижение предельной (квантового предела) чувствительности при ОВФ-ВР, когда излучение E_L состоит всего из нескольких квантов, можно осуществить в схеме четырехволнового гиперзвукового обращаемого зеркала (ЧГОЗ) [27]. По своей физике ЧГОЗ-ВРМБ представляет собой ВРМБ в поле встречных световых волн, причем все взаимодействующие волны имеют разные частоты. Активная для ВРМБ среда просвечивается двумя встречными опорными волнами накачки $E_{1,2}$ (не взаимодействующие между собой). Подвергаемая ОВФ волна E_3 имеет частоту, сдвинутую по отношению к частоте интерферирующей с ней накачки E_1 на величину Ω , что приводит к их интерференции и,

как результат, резонансному возбуждению бегущей гиперзвуковой волны. Рассеяние на гиперзвуке волны E_2 приводит к возникновению обращенной волны E_3^* (принципиальная схема ЧГОЗ аналогична приведенной на рис. 7, где область Γ соответствует активной среде). Таким образом, эффективное взаимодействие волн осуществляется только для конкретной частоты обрабатываемой волны, что обеспечивает высокую чувствительность и коэффициент отражения. ЧГОЗ-ВРМБ является по существу нелинейно-оптическим усилителем с высоким коэффициентом усиления и чувствительностью, ограничиваемой лишь тепловыми шумами нелинейной среды. Этот сложный метод целесообразнее использовать для ОВФ слабых сигналов и автоматического наведения излучения на мишени малых размеров.

3.2. Орбитальный лазер

Лазер наземного базирования обладает одним неоспоримым преимуществом, которое аккумулировано в самом понятии «наземное базирование»: простота эксплуатации, ремонтпригодность, отсутствие ограничений по массе, габаритам, энергопотреблению и т. п. Тем не менее в последние годы в качестве альтернативы рассматривается возможность базирования лазерной установки непосредственно на околоземной орбите, что связано с двумя факторами.

Во-первых, размещение лазерного источника на орбите позволяет достичь важных преимуществ:

- в сотни раз уменьшить расстояние до объектов КМ, что существенно снижает требования к точности обнаружения и сопровождения цели, а также требования к системе фокусировки;
- избежать оптических искажений излучения при его прохождении через атмосферу Земли (либо случайного отклонения луча из-за быстро флуктуирующей турбулентности);
- использовать лазерное излучение предельно короткой длительности (вплоть до фемтосекундного диапазона), что позволяет значительно уменьшать энергию в импульсе, сохраняя пиковую мощность излучения (необходимую для абляции с поверхности объекта КМ). По этим причинам снижаются требования к параметрам лазерной системы и ее сложность.

Во-вторых, развитие лазерных технологий на сегодняшний день достигло такого уровня, что становится возможным создание высокоэффективных компактных лазеров и их размещение в космическом пространстве. Наиболее реалистичной, на наш взгляд, является схема удаления КМ на основе трех уже выполняемых проектов, предложенная в статье [28]. Первый из них — действующая Международная космическая станция; с ее орбиты (около 400 км) предлагается начать борьбу с КМ, а ее помещения использовать для размещения оборудования. Второй проект —

EUSO (Extreme Universe Space Observatory), применяющий широкополосный детектор для исследования воздействия на атмосферу космических лучей [29]. Ключевой элемент детектора — зеркальный телескоп (планируемый диаметр зеркала 2,5 м) — может быть использован для задач как обнаружения и сопровождения объектов КМ, так и для последующей фокусировки лазерного излучения. От третьего проекта XCAN (Coherent Amplification Network — по созданию лазера для мощных ускорителей нового поколения на основе когерентного суммирования большого числа каналов (X-каналов) волоконных лазеров [30]) предполагается взять сам лазер и разместить его на МКС.

Оценим требуемые характеристики излучения орбитального лазера. Для изменения траектории объекта КМ благодаря возникновению реактивной силы при абляции материала с его поверхности (которая существенно больше светового давления) [31] нужно преодолеть пороговую интенсивность излучения, необходимую для эффекта абляции, и обеспечить большую частоту повторения лазерных импульсов для передачи объекту необходимого импульса. Согласно [32] плотность энергии, требуемая для абляции алюминия, порядка 1 Дж/см^2 и не зависит от длительности импульса, если он менее 100 пс. Необходимая суммарная энергия излучения зависит от массы и высоты орбиты объекта и для самых опасных размеров мусора (1...10 см) на высоте полетов МКС составляет 100 кДж [33]. При дифракционном качестве излучения для фокусировки в мишень размером 1 см^2 линзой диаметром 2,5 м расстояние не может быть больше 10 км. Поэтому если ориентироваться на объекты, находящиеся вблизи МКС с близкими скоростями ($\pm 1 \text{ км/с}$), то необходимо успеть произвести облучение мишени в течение не более десяти секунд. Таким образом, орбитальный лазер должен стрелять в течение десяти секунд 100 пс импульсами с энергией 1—2 Дж и частотой следования 5 кГц.

Для достижения требуемых параметров в проекте XCAN предполагается использование так называемой техники «усиления чирпированных импульсов» CPA (Chirped Pulse Amplification) [47] с когерентным суммированием каналов (до 10 000!) [34]. Идея заключается в растягивании широкополосного импульса (при помощи дифракционных решеток — стретчера) перед процессом усиления и сжатии импульса после усиления (при помощи дифракционных решеток с обратной дисперсией — компрессора). Авторы работы [47] стали лауреатами Нобелевской премии 2018 года за открытия в области лазерной физики, а CPA сегодня является основной техникой получения импульсов наибольшей (петаваттного уровня) мощности.

На рис. 9 изображена принципиальная схема лазера XCAN. После предварительного усиления импульс с максимально допустимой энергией 2 мДж делится на максимально возможное (для эффективного усиления)

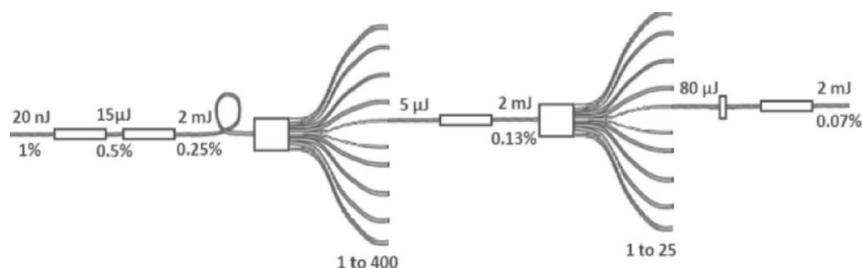


Рис. 9. Схема лазера XCAN [35]

число каналов — до 400. Затем (после повторного усиления до энергии 2 мДж) каждый из них снова делится на 25 каналов (число каналов определяется требуемой энергией выходного импульса). Применение исключительно волоконных технологий имеет ряд неоспоримых преимуществ: стабильность, надежность, слабая чувствительность к внешним условиям (температура, вибрация и др.). Однако фундаментальным ограничением является малая пиковая мощность, ограниченная сечением волокна. В типичных одномодовых волокнах энергия ограничена долями миллиджоуля. В специальных LMA-волокнах [36], которые предлагается использовать в проекте, она может достигать миллиджоулевого уровня, однако такие волокна сложны в изготовлении, требуют дополнительной юстировки и потому частично теряют преимущества традиционных волокон. Есть серьезная проблема и с когерентным сложением каналов. На сегодняшний день удалось экспериментально реализовать суммирование лишь 61 канала в фемтосекундном режиме работы при суммарной энергии 10 мДж [37] и 64 канала в непрерывном режиме [38]. Поэтому новые идеи дизайна орбитального лазера для удаления КМ по-прежнему актуальны.

Сотрудники ИФФ РАН выступили с предложением использовать в качестве оконечных усилителей волоконных каналов так называемые тонкостержневые усилители, что позволит существенно (порядка 100 раз!) уменьшить число суммируемых каналов и отказаться от использования технологии LMA-волокон. Геометрия активного лазерного элемента (АЭ) «тонкий стержень» (single-crystal fiber) предложена французскими учеными [39] и представляет собой нечто среднее между стержневым АЭ с аспектным соотношением (определяется как отношение длины к диаметру) порядка 10 и волоконным (аспектное соотношение более 1000), длиной 3—4 см и диаметром до 1 мм (аспектное соотношение порядка 100). Благодаря большей (чем у волокна) апертуре появляется возможность увеличить энергию в импульсе, сохраняя высокую среднюю мощность за счет эффективного теплоотвода благодаря меньшему (чем у стержня) диаметру. В такой геометрии диодная накачка заводится с торца и распространяется

«волноводно» (многократно отражаясь от боковой грани вследствие полного внутреннего отражения — рис. 10, *а, б*), а лазерное излучение проходит через АЭ, не касаясь его боковых граней (как в стержне). В ИПФ РАН разработана оригинальная технология изготовления АЭ «тонкий стержень», позволяющая делать АЭ из различных материалов, включая стекло и керамику, изменять профиль и контролировать качество боковой поверхности АЭ. Также предложена более эффективная геометрия — «тонкий конический стержень» [40] (нижние половины рис. 10, *а, б*), которая позволила существенно увеличить коэффициент усиления, ослабляя основной недостаток «тонкого стержня» — неравномерное продольное распределение инверсии [41]. На рис. 10, *в* изображен вариант схемы тонкостержневой геометрии для орбитального лазера, разрабатываемый международной группой ученых, включая сотрудников ИПФ РАН [42].

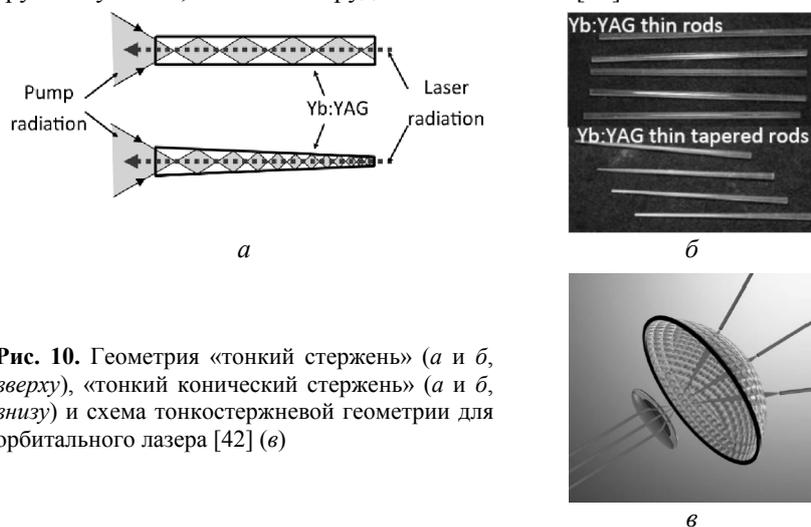


Рис. 10. Геометрия «тонкий стержень» (*а и б, сверху*), «тонкий конический стержень» (*а и б, внизу*) и схема тонкостержневой геометрии для орбитального лазера [42] (*в*)

Предварительная схема орбитального лазера представлена на рис. 11. Излучение волоконного пикосекундного генератора поступает на стретчер и делится на 100 каналов. Излучение в каждом канале после пьезооптического контроллера усиливается последовательно в волоконном усилителе (в 10^3 раз, до энергии в импульсе 0,5 мДж) и в двухкаскадном усилителе. В последнем усилении происходит также последовательно: вначале в АЭ «тонкий конический стержень», обладающем высоким коэффициентом усиления (10^2) лазерного излучения; затем в АЭ «тонкий стержень», обладающем высокой эффективностью (более 50 %) преобразования излучения накачки в лазерное излучение. Далее излучение ста каналов с энергией в импульсе 40 мДж пространственно фазируется (минимизируется разность

фаз между волнами в каналах) контроллером при помощи обратной связи. После компрессора (в нем энергетические потери менее 40 %) излучение с частотой следования импульсов 5 кГц длительностью не более 100 пс и энергией 2...2,5 Дж может фокусироваться на объект КМ.

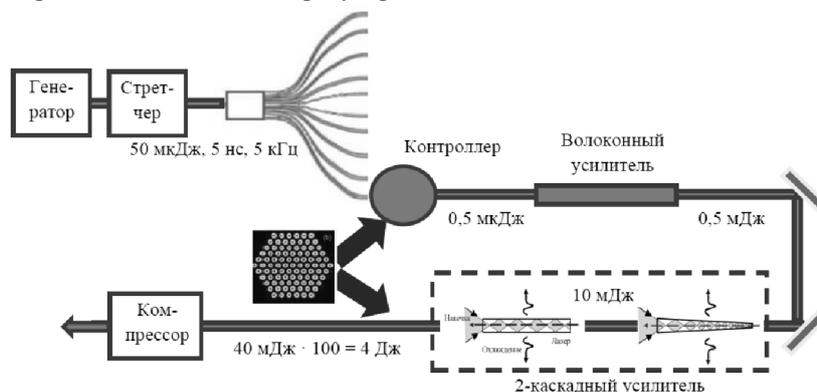


Рис. 11. Предварительная схема орбитального лазера [43]

В ИПФ РАН разрабатываются и другие возможные варианты окончательного усилителя для орбитального лазера. Одним из них является усиление импульсов от волоконного источника твердотельным усилителем с активным элементом дисковой геометрии [43, 44].

4. Заключение. Синдром Кesslera

20 ноября 1998 года Россия вывела на орбиту первый элемент МКС — блок «ЗАРЯ». Несмотря на почтенный возраст МКС, на ней и сегодня ведется активная работа (планируется отстыковать модуль «ПИРС», пристыковать лабораторный модуль «НАУКА», доставить научно-энергетические модули «НЭМ-1» и «НЭМ-2» и т. д.). Однако в 2024 году возможно окончание эксплуатации станции: затопление в Тихом океане, для чего уже производится заполнение баков топливного модуля. Данное обстоятельство обостряет задачу проведения предлагаемого космического эксперимента по удалению мусора [28], но это не единственная проблема.

Синдром Кesslera — гипотетическое развитие событий на околоземной орбите, когда КМ приводит к полной непригодности ближнего космоса для практического использования, впервые детально описанное консультантом NASA Дональдом Кesslerом [45]. Коварство синдрома Кesslera заключается в «эффекте домино»: столкновение двух достаточно крупных объектов приведет к появлению большого количества новых осколков, каждый из которых способен в свою очередь столкнуться с другим

элементом КМ, что вызовет цепную реакцию рождения всё новых обломков. Согласно расчетам NASA, даже при условии полного прекращения космических запусков в среднем каждые пять лет будут происходить крупные столкновения на низкой околоземной орбите, и количество объектов космического мусора будет продолжать расти [46].

Литература

1. Вениаминов, С. С. Космический мусор — угроза человечеству [Электронный ресурс] / С. С. Вениаминов, А. М. Червонов. — М. : ИКИ РАН, 2012. — 192 с. — Режим доступа: <http://www.iki.rssi.ru/books/2012veniaminov.pdf>. — ISSN 2075-6836.
2. Кольер, Р. Оптическая голография / Р. Кольер, К. Беркхарт, Л. Лин : пер. с англ. Ю. И. Островского. — М. : Мир, 1973. — 698 с.
3. Tagawa, M. Image stacking method application for low earth orbit faint objects / M. Tagawa, T. Yanagisawa, H. Matsumoto, H. Kurosaki, H. Oda, Y. Kitazawa, T. Hanada // AMOS Conference Technical Papers [Электронный ресурс]. — 2013. — Режим доступа: https://amostech.com/TechnicalPapers/2013/Faint_Object_Detection/TAGAWA.pdf.
4. Personal space // Economist [Электронный ресурс]. — Sep. 19th 2012. — Режим доступа: <https://www.economist.com/blogs/babbage/2012/09/picosatellites>.
5. Почему на МКС треснуло стекло // National Geographic [Электронный ресурс] : журнал. — 13 мая 2016. — Режим доступа: <http://www.nat-geo.ru/science/862403-rochemu-na-mks-tresnulo-steklo>.
6. Space in images [Электронный ресурс] / ESA/NASA. — 12.05.2016. — Режим доступа: http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2016/05/Impact_chip.
7. Gossamer Orbit Lowering Device (GOLD) for low-risk satellite de-orbit [Электронный ресурс] / Global aerospace corporation. — 2015. — Режим доступа: <http://www.gaerospace.com/aeroassist/gossamer-orbit-lowering-device-gold-for-low-risk-satellite-de-orbit>.
8. Pearson, J. ElectroDynamic Debris Eliminator (EDDE): design, operation, and ground support / J. Pearson, E. Levin, J. Oldson, J. Carroll // AMOS Conference Technical Papers [Электронный ресурс]. — 2010. — Режим доступа: <https://amostech.com/TechnicalPapers/2010/Posters/Levin.pdf>.
9. Zhai, G. Circular orbit target capture using space tether system / Guang Zhai, Jingrui Zhang, Zhang Yao // Mathematical Problems in Engineering. — 2013. — Vol. 2013. — Art. ID 601482.
10. Aslanov, V. Dynamics of large space debris removal using tethered space tug / V. Aslanov, V. Yudinsev // Acta Astronautica. — 2013. — Vol. 91. — P. 149—156.
11. Reed, J. Development of harpoon system for capturing space debris / J. Reed, S. Barraclough // ESA Special Publication. — 2013. — Vol. 723. — 8 p.
12. Kuroda, S. Capturing simulation of space debris with super multi-link space manipulator / S. Kuroda, T. Higuchi, Y. Tsujimoto, S. Ueno // 55th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE). — Tsukuba, 2016. — P. 660—666.
13. Shan, M. Review and comparison of active space debris capturing and removal methods / M. Shan, J. Guo, E. Gill // Progress in Aerospace Sciences. — 2016. — Vol. 80. — P. 18—32.
14. Space debris removal : United States patent Application 20120241562 [Электронный ресурс] ; Kind Code A1 / Dunn; Michael J. — September 27, 2012. — Режим доступа: <http://appft.uspto.gov/netacgi/nph-Parser?Sect1=PTO2&Sect2=HITOFF&p=1&u=/netahtml/PTO/search-bool.html&r=1&f=G&l=50&col=AND&d=PG01&s1=20120241562.PGNR.&OS=DN/20120241562&RS=DN/20120241562>.

15. *Hogan, E. A.* Space debris reorbiting using electrostatic actuation / E. A. Hogan, H. Schaub // *Advances in the Astronautical Sciences.* — 2012. — Vol. 144. — P. 73—92.
16. *Bombardelli, C.* Ion beam shepherd for contactless space debris removal / C. Bombardelli, J. Pelaez // *J. Guidance, Control, and Dynamics.* — 2011. — Vol. 34, № 3. — P. 916—920.
17. Using lasers in space: laser orbital debris removal and asteroid deflection [Электронный ресурс] / Jonathan W. Campbell, Colonel, USAFR. — December 2000. — Occasional Paper No. 20 / Center for Strategy and Technology, Air War College. — Air University Maxwell Air Force Base, 2000. — Режим доступа: <http://www.nss.org/resources/library/planetarydefense/2000-LaserOrbitalDebrisRemovalAndAsteroidDeflection-Campbell.pdf>.
18. Final report summary – LEOSWEEP (Improving Low Earth Orbit Security With Enhanced Electric Propulsion) [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://www.cordis.europa.eu/result/rcn/212531_en.html.
19. *Alpatov, A.* Determination of the force transmitted by an ion thruster plasma plume to an orbital object / A. Alpatov, F. Cichocki, A. Fokov, S. Khoroshylov, M. Merino, A. Zakrzhevskii // *Acta Astronautica.* — 2016. — Vol. 119. — P. 241—251.
20. *Nadiradze, A. B.* Modeling of the ion beam force impact and erosive action on a large-sized object of technogenic space debris / A. B. Nadiradze, V. A. Obukhov, A. I. Pokryshkin, G. A. Popov, V. V. Svochina // *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering.* — 2016. — № 2. — P. 146—157.
21. *Aslanov, V. S.* Attitude motion of cylindrical space debris during its removal by ion beam / V. S. Aslanov, A. S. Ledkov // *Mathematical Problems in Engineering.* — 2017. — Vol. 2017. — Art. ID 1986374.
22. *Зельдович, Б. Я.* Обращение волнового фронта при вынужденном рассеянии света / Б. Я. Зельдович, Н. Ф. Пилипецкий, В. В. Шкунов // *УФН.* — 1982. — Т. 138, вып. 10. — С. 249—288.
23. *Gabor, D.* A new microscopic principle / D. Gabor // *Nature.* — 1948. — Vol. 161. — P. 777—778.
24. *Kogelnik, H. W.* Patent No. 3.449.577 (USA). — Application October 23, 1965.
25. *Bragg, W. L.* Microscopy by reconstructed wave-fronts / W. L. Bragg // *Nature.* — 1950. — Vol. 166. — P. 399—400.
26. *Зельдович, Б. Я.* О связи между волновыми фронтами отраженного и возбуждающего света при ВРМБ / Б. Я. Зельдович, В. И. Поповичев, В. В. Рагульский, Ф. С. Файзуллов // *Письма в ЖЭТФ.* — 1972. — Т. 15. — С. 160.
27. *Кулагин, О. В.* Усиление и обращение волнового фронта слабых сигналов / О. В. Кулагин, Г. А. Пасманик, А. А. Шилов // *УФН.* — 1992. — Т. 162, вып. 6. — С. 129—157.
28. *Ebisuzaki, T.* Demonstration designs for the remediation of space debris from the International Space Station / T. Ebisuzaki [et al.] // *Acta Astronautica.* — 2015. — Vol. 112. — P. 102—113.
29. *Takahashi, Y.* The JEM-EUSO mission / Y. Takahashi [et al.] // *New Journal of Physics.* — 2009. — Vol. 11. — Art. 065009.
30. *Mourou, G.* The future is fibre accelerators / G. Mourou [et al.] // *Nature Photonics.* — 2013. — Vol. 7. — P. 258—261.
31. *Phipps, C.* ORION: clearing near-Earth space debris using a 20-kW, 530-nm Earth-based, repetitively pulsed laser / C. Phipps and H. Friedman // *Laser Particle Beams.* — 1996. — Vol. 14. — P. 1—44.
32. *Phipps, C.* Laser impulse coupling at 130fs / C. Phipps, J. Luke, D. Funk, D. Moore, J. Glowina, T. Lippert // *Appl. Surf. Sci.* — 2006. — Vol. 252. — P. 4838—4844.

33. *Anselmo, L.* Long-term dynamical evolution of high area-to-mass ratio debris released into high earth orbits / L. Anselmo, C. Pardini // *Acta Astronautica*. — 2010. — Vol. 67. — P. 204–216.
34. *Daniault, L.* XCAN – A coherent amplification network of femtosecond fiber chirped-pulse amplifiers / L. Daniault [et al.] // *Eur. Phys. J. Special Topics*. — 2015. — Vol. 224. — P. 2609–2613.
35. *Soulard, R.* Design and properties of a coherent amplifying network laser / R. Soulard, M. Quinn and G. Mourou // *Applied Optics*. — 2015. — Vol. 54, № 15.
36. *Samson, B.* High efficiency, monolithic LMA fiber lasers and amplifiers operating at 1 μm and 2 μm wavelengths / B. Samson [et al.] // *SPIE, DS&S Conference*. — 2007. — Vol. 6552.
37. *Chanteloup, J.-C.* XCAN – A coherent beam combination laser project / J.-C. Chanteloup [et al.] // *IZEST Fall meeting*, 1 Dec. 2017.
38. *Bourderionnet, J.* Collective coherent phase combining of 64 fibres / J. Bourderionnet [et al.] // *Opt. Express*. — 2011. — Vol. 19. — P. 18.
39. *Zaouter, Y.* Direct amplification of ultrashort pulses in μ -pulling-down Yb:YAG single crystal fibers / Y. Zaouter, I. Martial, N. Aubry, J. Didierjean, C. Hönninger, E. Mottay, F. Druon, P. Georges, and F. Balembos // *Opt. Lett.* — 2011. — Vol. 36. — P. 748.
40. *Kuznetsov, I.* Thin-tapered-rod Yb:YAG laser amplifier / I. Kuznetsov, I. Mukhin, O. Palashov and K.-I. Ueda // *Opt. Lett.* — 2016. — Vol. 41. — P. 5361–5364.
41. *Кузнецов, И. И.* Усилитель на тонком стержне из Yb : YAG с высокой энергией в импульсе для волоконного задающего лазера / И. И. Кузнецов, И. Б. Мухин, О. В. Палашов // *Квантовая электроника*. — 2016. — Т. 46, № 4. — С. 375–378.
42. *Mourou, G.* Space debris problem and possible methods for its solution. Sputnik: 60 years along the path of discoveries, Moscow, Oct. 3–4, 2017 [Электронный ресурс] / G. Mourou, T. Ebisuzaki, M. Casolino and A. Sergeev. — Режим доступа: <http://www.iki.rssi.ru/conf/2017/mourou.pdf>.
43. *Mukhin, I. B.* Prospective laser system architectures for space debris removal / I. B. Mukhin, I. I. Kuznetsov, O. V. Palashov, A. M. Sergeev [Invited in *Laser Solutions for Space and the Earth, Japan, 2018*].
44. *Kuznetsov, I. I.* Improvement of thermal management in the composite Yb:YAG/YAG thin-disk laser / I. I. Kuznetsov, I. B. Mukhin and O. V. Palashov // *Laser Physics*. — 2016. — Vol. 26. — Art. 045004.
45. *Kessler, D. J.* Collision frequency of artificial satellites: the creation of a debris belt / D. J. Kessler, B. G. Cour-Palais // *J. Geophysical Research*. — 1978. — Vol. 83, iss. A6. — P. 2637–2646.
46. An assessment of the current LEO debris environment and the need for active debris removal [Электронный ресурс] / J.-C. Liou, NASA. — 2010. — Режим доступа: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20100017146.pdf>.
47. *Strickland, D.* Compression of amplified chirped optical pulses / D. Strickland and G. Mourou // *Optics Communications*. — 1985. — Vol. 56, iss. 3. — P. 219–221.

РАДИОСВЕТ: КОНЦЕПЦИЯ И ТЕХНОЛОГИЯ

А. С. Дмитриев^{1,2}, *Е. В. Ефремова*^{1,2}, *А. И. Рыжов*¹

¹ Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, г. Москва

² Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный

Рассматривается задача освещения предметов и поверхностей искусственными некогерентными источниками микроволнового излучения с целью их последующего наблюдения с помощью специальной приемной аппаратуры. В качестве приборов некогерентного широкополосного микроволнового излучения используются лампы радиосвета на основе генераторов динамического хаоса. Далее изучается вопрос создания приемника радиосвета с пространственным разрешением. Предложенный чувствительный элемент для такого приемника сочетает в себе свойства приемника огибающей и радиометра. Разработана схема и реализован экспериментальный макет приемника с пространственным разрешением для визуализации части окружающего пространства в искусственном радиосвете. Получены изображения помещения в радиосвете. Показана возможность фиксации на этих изображениях изменений, связанных с появлением новых предметов.

Введение

Мы обычно не задумываемся над тем, что основным каналом получения информации для нас является электромагнитное излучение. Но это так.

После Большого взрыва, произошедшего 13,8 млрд. лет назад, Вселенная расширялась. С каждым мгновением она становилась чуть-чуть больше, чуть-чуть холоднее и чуть-чуть темнее. Между тем вещество и энергия вместе составляли своего рода мутный бульон. Спустя около 380 000 лет температура «бульона» упала до 3000 градусов, электроны замедлились настолько, что объединились с ядрами водорода и образовали атомы, в то время как радиация отделилась от материи и продолжила практически беспрепятственно двигаться через пространство. Эту радиацию принято называть реликтовым (фоновым) излучением, и она является древнейшим источником *света* во Вселенной. Первоначально пик спектральной плотности реликтового излучения приходился на ту часть электромагнитного спектра, которая сейчас относится к видимой глазом человека. По мере дальнейшего расширения Вселенной температура реликтового излучения пропорционально падала. Спустя почти 14 млрд. лет Вселенная расширилась в 1000 раз, температура излучения упала во столько же раз и составляет около 3 К. Спектральный пик этого «света» находится в микроволновом диапазоне, отсюда и взялось современное выражение «реликтовое микроволновое излучение» (излучение, открытое в 1964 году).

Исторически слово «свет» долгое время означало исключительно видимый свет (помимо своего второго значения «мир»). Однако в 1800 году английский астроном Уильям Гершель заметил тепло, которое мог вызвать лишь свет, не видимый человеческим глазом. На основании этого Гершель сделал вывод о существовании в солнечном излучении компонент «незримого света». Так был открыт новый диапазон света — инфракрасный свет.

В 1801 году Иоганн Вильгельм Риттер обнаружил еще один диапазон невидимого света — ультрафиолетовый.

Если заполнить весь электромагнитный спектр — от низкой энергии и низкой частоты до высокой энергии и высокой частоты, получится, что у нас есть радиоволны, микроволновое излучение, инфракрасное излучение, излучение в диапазоне видимого света, ультрафиолетовое, рентгеновское и гамма-излучение.

Даже после открытия ультрафиолетового и инфракрасного излучения способы изучать окружающий мир, и в частности небо, изменились не сразу. Первый телескоп для наблюдения невидимой части электромагнитного спектра (радиотелескоп) построили лишь через 130 лет. К тому времени уже открыли и радиоволны, и рентгеновское излучение, и гамма-излучение, а немецкий физик Генрих Герц давно показал, что разные виды света отличаются на самом деле лишь частотой волны в каждой из полос спектра [1].

Ниже будет рассматриваться свет в радиодиапазоне, или «радиосвет». Близкую терминологию в отношении излучения радиодиапазона использовал С. И. Вавилов. Так, он писал: «...Те электрические волны, которые излучаются радиостанциями, также распространяются со скоростью 300 000 км/с и обладают периодичностью; стало быть, и они должны рассматриваться как световые волны...» [2]. «Световая» терминология встречается по отношению к электромагнитному излучению микроволнового и радиодиапазона и у других авторов [3, 4]. В контексте данной работы особенно интересны исследования [4], где теория белого света используется для изучения широкополосных приложений некогерентных электромагнитных волн в диапазоне гигагерц, представленных шумом, и теоретические подходы на основе поля белого света подтверждаются различными экспериментами с шумовыми полями, применяемыми в диапазоне гигагерц. Авторы приходят к выводу, что в ряде ситуаций эксперименты показывают явные преимущества измерений, выполненных с помощью шумовых полей, важнейшей особенностью которых является отсутствие интерференционных эффектов.

Под радиоосвещением будем понимать локальное, искусственно созданное, шумовое (шумоподобное) поле широкополосного (сверхширокополосного) некогерентного в пространстве и во времени излучения в радио- или микроволновом диапазоне длин волн. Радиоосвещение реализуется

при помощи одного или нескольких устройств некогерентного излучения. Попадая на близлежащие поверхности и предметы, микроволновое излучение частично поглощается в них, частично проходит через них и частично отражается. Распространяясь далее, оно несет в себе информацию о среде, с которой взаимодействует.

В этом отношении ситуация аналогична ситуации с обычным (видимым) светом [4]. В обоих случаях речь идет о некогерентном излучении с широким спектром, что исключает эффекты интерференции и сводит вопросы наблюдения к оценке мощностных (и, возможно, спектральных, как в случае цветового зрения) характеристик принимаемого сигнала.

Разница в том, что это другой частотный диапазон (частоты у радиосвета примерно на 4—5 порядков ниже частот видимого света) и другие законы взаимодействия со средой, в которой происходит процесс. Радиосвету свойственна существенно более низкая потенциальная разрешающая способность, чем видимому свету. Однако существует достаточно много ситуаций, когда это либо приемлемо, либо не имеет принципиального значения.

1. Источники радиоосвещения

Наблюдение объектов с помощью некогерентного микроволнового излучения и других некогерентных сигналов в диапазонах частот, отличных от частот видимого света, давно и плодотворно применяется в радиоастрономии, при наблюдении Земли из космоса [5—7] и в медицинской диагностике [8, 9]. При этом используется некогерентное микроволновое излучение, порождаемое естественными процессами, такими как собственное тепловое излучение физических тел в микроволновом диапазоне или рассеяние микроволнового излучения, создаваемого мощными естественными источниками (например, Солнцем). Таким образом, имеется большой массив информации, который может дать ответы как минимум на ряд исходных вопросов, связанных с радиоосвещением и присущими ему свойствами. Однако сама, достаточно очевидная, идея радиоосвещения с помощью локальных искусственных источников, подобных осветительным приборам в видимом диапазоне электромагнитного спектра, упоминается в литературе как некая экзотика (см., например, [4]).

Одной из причин такого положения является отсутствие эффективных искусственных источников некогерентного микроволнового излучения, которые можно использовать для радиоосвещения. Действительно, это должны быть устройства, которые излучают достаточно мощные по сравнению с тепловым излучением шумовые или шумоподобные широкополосные некогерентные сигналы. Устройства должны быть простыми в эксплуатации, похожими в этом отношении на источники обычного света типа ламп накаливания, люминесцентных ламп, светодиодных ламп и т. п.

В противном случае речь о радиоосветительных приборах может идти только применительно к специальной исследовательской аппаратуре.

В микроволновой технике используются два типа источников шума: газоразрядные трубки и полупроводниковые р-п-диоды в режиме лавинного пробоя. Их основным параметром является коэффициент избыточности шума (excess noise ratio — ENR), который определяется как отношение сгенерированной мощности шума к мощности шума резистора, согласованного с конкретной линией передачи, при температуре окружающей среды и измеряется в децибелах. Газоразрядные трубки имеют типичный ENR ~ 15 дБ, что примерно в 30 раз больше мощности теплового шума, создаваемого согласованным резистором при температуре окружающей среды 290 К. Таким образом, трубка генерирует шум, соответствующий температуре примерно 9 103 К. Значение ENR для диодных источников шума достигает ~ 30 дБ (см., например, [10]), и их шумовая температура имеет величину около 3 105 К, что соответствует спектральной плотности мощности $\approx 4 \cdot 10^{-9}$ мВт/МГц (-84 дБм/МГц). Интегральная мощность устройства в полосе 1000 МГц составляет $4 \cdot 10^{-6}$ мВт. Дальнейшее повышение ENR может быть достигнуто за счет применения усилителей. Однако при существенном повышении выходной мощности требуется достаточно сложная и не дешевая конструкция [11].

В последующих разделах будет показано, что приемлемая мощность для отдельного искусственного источника радиоизлучения, позволяющая осветить площадь до 100 м², лежит в диапазоне 0,1—1,0 мВт. Таким образом, ни один из упомянутых типов источников шума не может рассматриваться как подходящее решение для приборов радиоосвещения.

2. Передатчик микроволнового динамического хаоса как искусственный источник радиоосвещения

В работах [12, 13] для радиоосвещения предлагается использовать передатчики микроволнового динамического хаоса, представляющие собой генераторы динамического хаоса с излучающими антеннами. При этом генераторы динамического хаоса создают шумоподобные аналоговые электрические сигналы в соответствующем диапазоне частот, а антенны преобразуют эти сигналы в хаотическое электромагнитное излучение.

Генераторы микроволнового динамического хаоса прошли долгий путь эволюции от вакуумных приборов, использующих естественное запаздывание в распределенных системах [14—16], к полупроводниковым устройствам с распределенными колебательными системами на основе микрополосков и далее к полупроводниковым устройствам с колебательными системами на элементах с сосредоточенными параметрами [17]. При этом речь идет об устройствах, генерирующих хаотические сигналы в заданном диапазоне радио- или микроволновых частот.

С начала 2000-х годов в ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН проводились исследования и разработки по созданию миниатюрных генераторов хаоса микроволнового диапазона (рис. 1). До этих исследований микроволновые генераторы хаоса на основе полупроводниковых активных элементов существовали только в виде микрополосковых приборов. К 2008 году удалось добиться значительного прогресса в создании устройств в виде генераторов хаоса на сосредоточенных параметрах. Это привело к упрощению конструкции, уменьшению размеров, повышению технологичности и снижению стоимости. Кроме того, появилась возможность тиражирования таких устройств с объемами партий в сотни и тысячи штук.

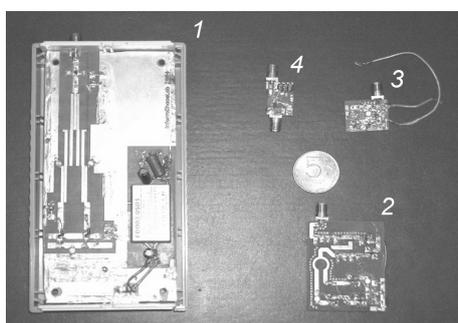


Рис. 1. Эволюция генераторов микроволнового хаоса: 1 — генератор на микрополосковой технологии 2003 г.; 2 — генератор на трех усилительных микросборках с элементами микрополосков 2005 г.; 3 — генератор с сосредоточенными элементами на трех усилительных микросборках 2008 г.; 4 — генератор с сосредоточенными элементами на одном биполярном транзисторе 2007 г.

Типичный генератор хаоса микроволнового диапазона с сосредоточенными элементами реализуется на основе автоколебательной системы с 2,5 степени свободы, активным элементом которой является биполярный транзистор.

На основе разработанных генераторов микроволнового хаоса создавались сверхширокополосные приемопередатчики для беспроводной связи и беспроводных сенсорных систем [18].

Следующим шагом в миниатюризации и повышении технологичности генераторов хаоса стало создание генераторов хаоса в виде интегральных микросхем. Работы в этом направлении начались несколько лет назад [19, 20]. При разработке микросхем за основу была взята автоколебательная система с 2,5 степени свободы. Вывод сигнала из системы осуществлялся через фильтрующую цепь (рис. 2). К настоящему времени в ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН совместно с ООО «Нанохаос» получены экспериментальные образцы микрогенераторов хаоса с интегральной мощно-

стью излучения в полосе частот 3—7 ГГц около 300 мкВт (рис. 3). В приборах используется кремний-германиевая технология 0,25 мкм. Площадь кристалла — 1,6 мм².

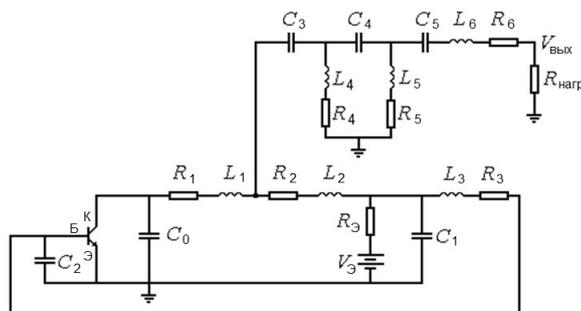


Рис. 2. Принципиальная электрическая схема генератора хаоса на кремний-германиевом кристалле

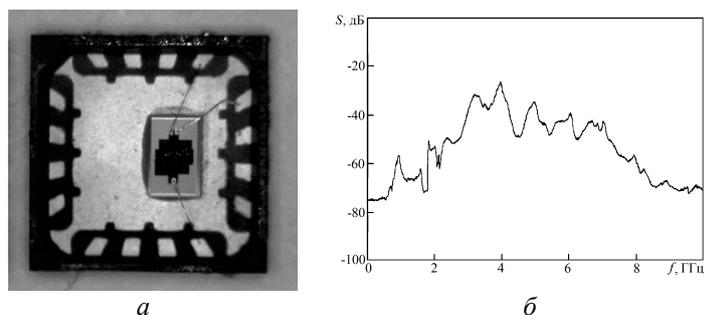


Рис. 3. Микрогенератор сверхширокополосных хаотических колебаний: *а* — кремний-германиевый кристалл в корпусе; *б* — спектр мощности генерируемого сигнала

Источники с такой выходной мощностью достаточно эффективно могут быть использованы в радиоосветительных приборах.

Создание генераторов динамического хаоса в микросхем принципиально меняет ситуацию в области производства: теперь достаточно мощные источники некогерентных сверхширокополосных шумоподобных сигналов микроволнового диапазона можно изготавливать массово и дешево. Поэтому появляется возможность расширить область их применения на новые задачи, и радиоосвещение одна из таких задач.

Спектр мощности сигнала генератора (рис. 4, *а*), реализация процесса (рис. 4, *б*), быстро спадающая автокорреляционная функция (рис. 4, *в*) и близкое к гауссовскому статистическое распределение мгновенных значе-

ний сигнала (рис. 4, ε) также показывают, что хаотический сигнал обладает характеристиками, обеспечивающими создание некогерентного освещения в микроволновом диапазоне частот.

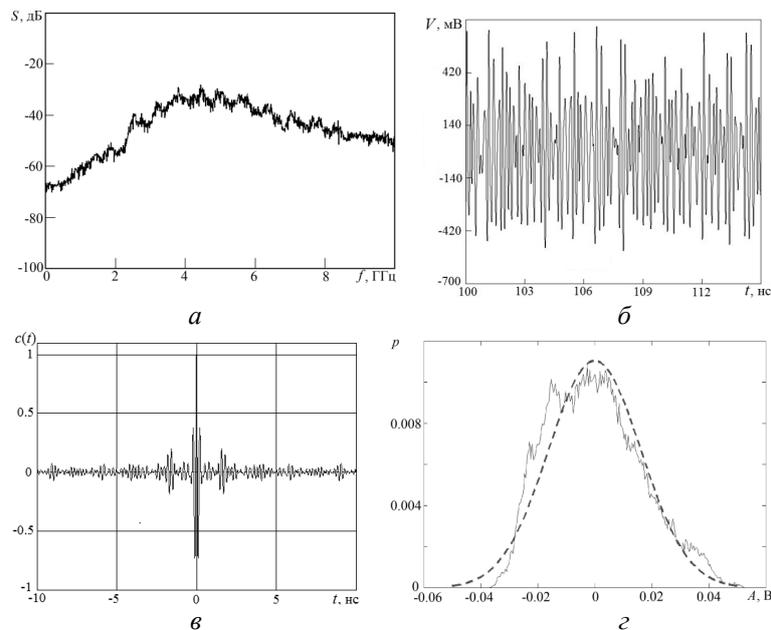


Рис. 4. Расчетные характеристики сигнала на выходе микрогенератора хаоса: a — спектр мощности; b — фрагмент временной реализации; c — автокорреляционная функция; ε — распределение мгновенных значений амплитуды A сигнала на выходе антенны (сплошная линия — моделирование, штриховая линия — гауссовское распределение)

Важное общее свойство микрогенераторов динамического хаоса и светодиодов — некогерентность генерируемого сигнала. Это свойство принципиально для применения микрогенераторов хаоса в качестве источников освещения, поскольку обеспечивает равномерную, без интерференции, засветку окружающей среды при использовании как одиночного, так и множественных источников. Еще одной важной общей чертой светодиодов и микросхем генераторов хаоса (chaos emitted chip — СЕС) является сходство в электрических характеристиках: оба устройства низковольтные и могут применяться как поодиночке, так и в виде последовательных и параллельных сборок, в том числе для увеличения мощности или распределения излучения по пространству.

Из сказанного следует, что подобно тому, как светодиоды с белым свечением являются эффективными источниками широкополосного некогерентного излучения в видимом диапазоне частот, микрогенераторы динамического хаоса являются эффективными источниками широкополосного некогерентного излучения в микроволновом диапазоне частот.

3. Модели освещения в радиодиапазоне

Наличие локальных компактных источников радиоосвещения на основе сверхширокополосных генераторов динамического хаоса дает возможность целенаправленно рассмотреть вопрос о принципах использования этих источников. Ситуация здесь существенно отлична от освещения в видимом диапазоне частот, что связано как с физическими характеристиками излучения, так и с масштабными вопросами.

Если глаза человека или животных в основном предназначены для наблюдения окружающей обстановки в зоне Фраунгофера (дальней зоне), то приборы для наблюдения в радиосвете в силу разницы частот могут быть интересны и для работы в зоне Френеля.

Действительно, рассмотрим типичные геометрические конфигурации расположения источников, объектов освещения или участка окружающей среды и наблюдательного прибора (системы). На рис. 5, *a* показан пример сцены с расположенными на ней источниками радиосвета 1, 2, 3, объектом, рассеивающим и пропускающим радиоизлучение, 4, и наблюдательным прибором 5. В этом примере в наблюдательный прибор поступает излучение непосредственно от источников 1 и 2, их же излучение, рассеянное на объекте 4, и излучение от источника 3, прошедшее через объект.

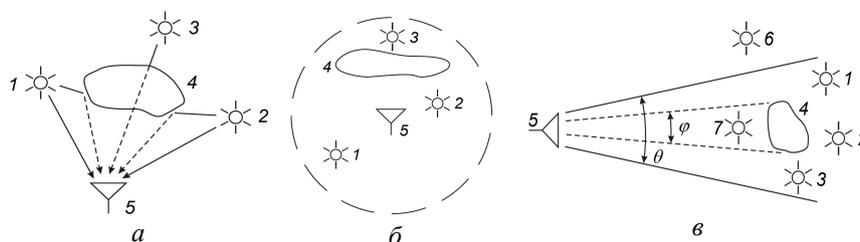


Рис. 5. Типичные геометрические конфигурации расположения источников, объектов освещения или участка окружающей среды и наблюдательного прибора: *a* — освещаемая сцена с расположенными на ней источниками радиосвета; *б* — вторая базовая модель освещения; *в* — третья базовая модель освещения; 1, 2, 3, 6, 7 — источники радиосвета, 4 — объект, рассеивающий и пропускающий излучение, 5 — наблюдательный прибор; θ — ширина диаграммы направленности антенны измерительного прибора; φ — угол, под которым видна радиоосвещаемая сцена из точки измерения

В зависимости от взаимного расположения источников радиосвета, объекта, наблюдательного прибора, средней длины волны излучения λ и электрических размеров антенн источников радиосвета и наблюдательного прибора можно выделить ряд типичных случаев «сцен».

Введем следующие предположения, не сказывающиеся на общности постановки задачи, но существенно сужающие круг рассматриваемых моделей. А именно: 1) будем рассматривать только источники радиосвета с изотропным излучением в пространстве (одинаковым по всем направлениям) и 2) будем считать задачу скалярной, не принимая во внимание поляризацию излучения.

Весь интервал расстояний R от антенны наблюдательного прибора до сцены (фрагмента наблюдаемой среды) разделим на две зоны, мерами разделения которых являются средняя длина волны излучения λ и характерный линейный размер приемной антенны L [21]:

- 1) ближняя зона и промежуточная зона (зона Френеля),

$$R \leq \frac{2L^2}{\lambda}; \quad (1)$$

- 2) дальняя или волновая зона (зона Фраунгофера),

$$R > \frac{2L^2}{\lambda}. \quad (2)$$

Заметим, что для изотропного излучателя связь между коэффициентом направленного действия $D = 1$ и эффективной излучающей площадью S определяется соотношениями

$$D = \frac{4\pi S}{\lambda^2} = 1 \Rightarrow S = \frac{\lambda^2}{4\pi}. \quad (3)$$

В дальнейших оценках принимается, что раскрыв антенны наблюдательного прибора имеет круглую форму. В этом случае $S = \pi L^2 / 4$, и из (3) следует, что $L = \lambda / \pi$.

Для наблюдательного прибора, обладающего антенной с изотропной диаграммой направленности, практический интерес представляет только дальняя зона — зона Фраунгофера:

$$R > \frac{2\lambda}{\pi^2} \approx \frac{\lambda}{5}. \quad (4)$$

При использовании ненаправленных антенн в измерительном приборе мы всегда имеем дело с суммой прямого излучения от источников радиосвета, поля, прошедшего через объект, и поля, рассеянного объектами сцены (рис. 5, а). В типичных случаях все эти источники находятся в дальней зоне (4) антенны наблюдательного прибора, а их излучение, поступающее

на антенну наблюдательного прибора, складывается в нем по мощности. Фактически здесь идет речь о передаче по схеме «точка — точка» при приеме излучения наблюдательным прибором от некоторого усредненного источника. При этом за оценку излучаемой мощности усредненного источника можно принять суммарную мощность источников (считая их точечными и находящимися примерно на одинаковом расстоянии от измерительного прибора). Если же расстояния до источников излучения существенно различаются, мощности поступающего в измерительный прибор излучения от разных источников должны быть взвешены с учетом расстояния. В любом из этих случаев существенно, что поступающее от всех источников излучение некогерентно и складывается по мощности.

За базовую модель освещения в рассмотренном случае (первую базовую модель) можно принять модель с одним источником радиосвета (без рассеивающего или преломляющего объекта), излучение от которого непосредственно поступает на антенну измерительного прибора. Если мощность источника известна, то по ее доле, поступающей в наблюдательный прибор, можно оценивать расстояние до источника.

Пусть теперь антенна наблюдательного прибора имеет характерный размер L . Тогда ширина ее диаграммы направленности в дальней зоне $\theta \sim \lambda/L$, а размер разрешаемого элемента $\Delta \sim \frac{\lambda}{L} R$. Из условия (2) следует, что рас-

стояние, на котором реализуется условие дальней зоны, быстро растет с увеличением размера антенны. Внутри зоны Френеля разрешение будет улучшаться с уменьшением расстояния, вплоть до ближней зоны, достигая на расстоянии порядка размера антенны предельного значения $\sim \lambda$. Рассмотренная ситуация приводит ко второй базовой модели радиоосвещения, согласно которой освещенная сцена состоит с точки зрения измерительного прибора из поверхностей (отражающих, пропускающих), размеры которых значительно превышают элемент разрешения антенны наблюдательного прибора. Кроме того, на сцене могут присутствовать сами источники радиосвета, излучение которых напрямую попадает на антенну наблюдательного прибора (рис. 5, б).

Третья модель освещения отвечает промежуточному случаю между 1-й и 2-й моделями. При этих условиях вся освещенная сцена вместе с источниками радиоосвещения имеет угловые размеры относительно точки измерения, не превышающие ширину диаграммы направленности. Ситуацию иллюстрирует рис. 5, в, где θ — ширина диаграммы направленности антенны измерительного прибора; φ — угол, под которым видна радиоосвещаемая сцена из точки измерения. Заметим, что источники радиосвета в этой конфигурации могут находиться как в пределах сектора, соответствующего диаграмме направленности антенны наблюдательного прибора, так и вне его.

4. «Радиоосветительная» лампа

По аналогии со светодиодной лампой может быть создана лампа для радиоосвещения с активным элементом в виде микросхемы. Идея такой лампы заключается в следующем.

Микрогенератор динамического хаоса вместе с антенной образуют источник шумоподобного сверхширокополосного излучения микроволнового излучения (рис. 6, *а*). Такой источник можно рассматривать как прототип лампы радиоосвещения. Далее этот прототип конструктивно трансформируется как по форме, так и по режиму эксплуатации в «лампочку» обычного формата, рассчитанную на напряжение питания 220 В.

Экспериментальный образец лампы радиосвета ЛРС-2 был разработан на основе микросхемы генератора динамического хаоса, формирующей сигнал в диапазоне частот 3—7 ГГц. Излучаемая мощность лампы примерно 300 мкВт. Конструктивно лампа включает в себя плату с электронными компонентами и антенной (рис. 6, *б*) и источник вторичного питания, обеспечивающий преобразование сетевого переменного напряжения 220 В в напряжение постоянного тока 5 В. Верхняя металлизированная сторона платы вместе с конусным элементом образует дискоконусную излучающую антенну. Кроме того, на верхней стороне платы расположен индикаторный светодиод, отображающий состояние устройства (включено или выключено). Электронная часть лампы размещена в стандартном покупном корпусе с цоколем типа E27 для светодиодных ламп (рис. 6, *в*). Вторичный источник питания размещен в цоколе лампы.

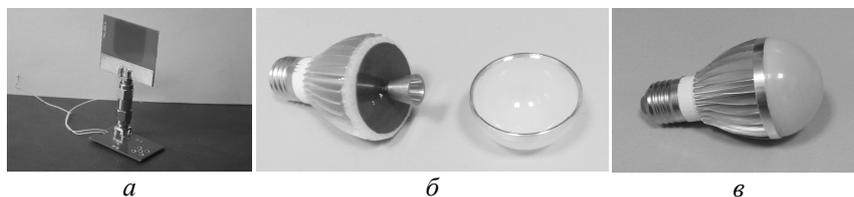


Рис. 6. Лампочка «радиоосвещения»: *а* — прототип лампочки в виде генератора хаоса с подключенной антенной; *б* — излучающее устройство с антенной (слева) и колба (справа); *в* — устройство в сборе в виде стандартной осветительной лампочки

Создание радиоосвещения в помещении или на открытой площадке сводится к ввинчиванию лампы радиоосвещения в патрон стандартного светильника, подключенного к обычной электросети, и нажатию кнопки выключателя.

Другими вариантами источников радиосвета могут быть приборы, использующие в качестве источников питания различные низковольтные источники постоянного тока, например от 12-вольтовой автомобильной сети, от 5-вольтовых USB-разъемов ноутбуков и планшетов и т. д.

5. Экспериментальная ячейка приемника радиосвета

Выше предложены малогабаритные источники радиоосвещения в микроволновом диапазоне частот, использующие для создания шумоподобного сверхширокополосного (СШП) излучения — аналога света в видимом диапазоне — генераторы хаотических колебаний. Наличие одного или нескольких источников, конструктивно выполненных в виде, сходном с обычными световыми приборами (лампа накаливания, светодиодная лампа), позволяет «освещать» в микроволновом диапазоне частот отдельные помещения, комплекс помещений или часть открытого пространства.

При этом возникает вопрос: как применить это излучение для наблюдения за окружающим миром?

Очевидно, что мы не можем создавать приемные устройства для радиосвета, сопоставимые по числу чувствительных элементов и компактности с глазом человека или высших животных, поскольку размеры чувствительных устройств определяются длиной волны используемого электромагнитного излучения, а она у видимого света и радиосвета различается примерно на пять порядков.

А какие возможности все-таки имеются?

В природе «глаза» у живых существ на самом деле бывают очень разные по структуре и по сложности, причем простейшие из них содержат буквально единицы чувствительных элементов [22]. Элементарный глаз — светочувствительное пятно, или «глазок», — встречается у простейших беспозвоночных животных, например у эвглены, и способен воспринимать наличие света и его интенсивность, но не формировать изображение. Добавление к чувствительному элементу сканирующей линзы уже позволяет маленькому веслоногому рачку *Coriia* формировать изображение. Наличие линеек чувствительных элементов, включающих небольшое число элементов в сочетании со сканирующими линзами, обеспечивает дальнейшее расширение возможностей светочувствительных систем беспозвоночных животных. Еще одним примером использования природой систем «зрения» с относительно небольшим числом элементов являются инфракрасные детекторы некоторых видов змей — лицевые и губные ямки. Активация рецепторов ямок требует изменения потока инфракрасного излучения. Это может достигаться либо в результате движения излучающего тепло объекта в «поле зрения» относительно более холодного окружения, либо при сканирующем движении головы змеи. В работе [23] показано, что при наличии поля сенсорных клеток примерно 40×40 элементов на ямке змее удается восстанавливать входной сигнал с угловым разрешением $2,5^\circ$.

По аналогии с описанными примерами использования малоэлементных светочувствительных систем в живой природе можно ожидать, что создание даже простейших приемников радиосвета, состоящих из не-

скольких или даже одного элемента (аналогов палочек, колбочек), позволит конструктивно использовать радиоосвещение для наблюдения за окружающим миром.

Ниже рассматривается задача создания простого приемника ячейки радиосвета, формулируются требования к нему, предлагается структура и схемотехническое решение, реализуется и исследуется экспериментальный макет устройства.

Приемник радиосвета должен уметь измерять полную мощность входящего СШП шумоподобного излучения. При этом от него требуется достаточно высокая чувствительность и большой динамический диапазон измеряемой интенсивности сигнала. Существенным параметром является также степень инерционности приемника или время накопления сигнала. Этот параметр тесно связан с чувствительностью приемника: чем больше накопление, тем меньший по мощности входящий сигнал может быть зафиксирован. С другой стороны, степень инерционности приемника напрямую связана с возможностью его применения в мобильных условиях и лимитирует максимальную возможную скорость передвижения наблюдаемого объекта.

Исходя из этого, сформулируем требования к приемнику радиосвета:

— полоса частот принимаемого сигнала должна соответствовать полосе частот излучаемого сигнала;

— время накопления сигнала 0,001—0,1 с, что позволит использовать приемник в ситуациях с относительными скоростями движения объектов от 1000 до 10 м/с;

— динамический диапазон по мощности принимаемого сигнала — не менее 40 дБ, что позволит обеспечить работоспособность при изменении диапазона расстояний в свободном пространстве между приемником и источником сигнала не менее чем в 100 раз.

Ближайшими по своим свойствам устройствами, которые можно использовать в качестве прототипов приемников радиосвета, являются радиометрические приемники [5, 6, 24, 25] и энергетические приемники, применяемые в прямохаотических системах связи [26].

Радиометрические приемники, как правило, имеют очень хорошие (с точки зрения требований к приемникам радиосвета) характеристики по чувствительности, но им свойственны узкий динамический диапазон и значительная инерционность.

Энергетические приемники применяются для цифровой передачи данных. Они регистрируют быстро изменяющиеся поступающие сигналы (т. е. малоинерционные) и имеют большой динамический диапазон, но значительно уступают радиометрам по чувствительности.

Предлагаемая ячейка приемника радиосвета сочетает в себе полезные свойства радиометрических и энергетических приемников. Структура

ячейки приемника представлена на рис. 7, а ее внешний вид на рис. 8, *а*. Печатная антенна А встроена в плату устройства, ее размеры и форма согласованы с полосой излучаемого источником радиосвета сигнала. По существу, антенна представляет собой несимметричный сверхширокополосный диполь, одной частью которого является лепесток в форме части (сегмента) круга, а второй — остальная часть металлизированной платы. Лепесток через микрополоску соединен с переключателем S, который в свою очередь через фильтр F соединен со входом малошумящего усилителя LNA. Диаграмма направленности антенны имеет вид тора с провалом вдоль продольной оси антенны (рис. 8, *б*). В плоскости, перпендикулярной плоскости приемника, диаграмма всенаправленна с неравномерностью < 2 дБ.

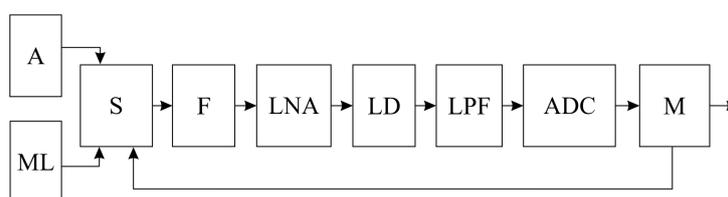


Рис. 7. Структура ячейки приемника радиосвета: А — антенна, ML — согласованная нагрузка, S — переключатель, F — фильтр, LNA — малошумящий усилитель, LD — логарифмический детектор, LPF — фильтр нижних частот, ADC — аналого-цифровой преобразователь, М — микроконтроллер

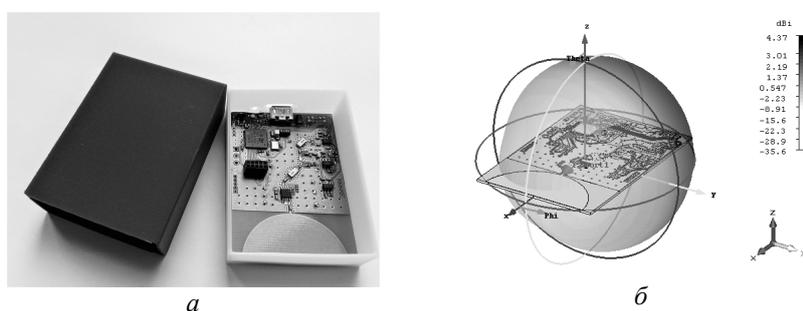


Рис. 8. Ячейка приемника радиосвета: *а* — внешний вид устройства (размер печатной платы 50×35 мм, масса < 10 г); *б* — диаграмма направленности антенны устройства

Для увеличения динамического диапазона в ячейке вместо типичного для радиометрических приемников квадратичного детектора используется логарифмический детектор с малошумящим полосовым усилителем на входе. Сигнал с выхода фильтра нижних частот детектора подается на

вход аналого-цифрового преобразователя (ADC) и обрабатывается микроконтроллером. Использование ADC вместо порогового устройства — основное аппаратное отличие рассматриваемой приемной ячейки от приемников сверхширокополосных радиоимпульсов в средствах прямохаотической связи [26].

Микроконтроллер осуществляет накопление сигнала для увеличения отношения сигнал / шум (SNR). С этой целью сигнал с выхода фильтра нижних частот (LPF) оцифровывается через интервалы времени Δt , превышающие время корреляции T_{cor} шумов на входе фильтра ($T_{cor} \sim 1/\Delta f$, где Δf — ширина частотного спектра радиоосвещения), и полученные отсчеты суммируются в цикле от 1 до N . После этого цикл накопления завершается, выводится результат, обрабатывается полученное значение суммарного сигнала и цикл повторяется. Таким образом, выдача значения сигнала на отображающее устройство производится через каждые $N \cdot \Delta t$ с. При этом уровень сигнала на выходе ячейки повышается по отношению к уровню сигнала на выходе LPF-фильтра (что соответствует однократному измерению — отсчету) в N раз, теоретически чувствительность приемника увеличивается в $N^{1/2}$ раз, а дальность приема в свободном пространстве увеличивается в $N^{1/4}$ раз. Однако растет и время наблюдения (в N раз). Отсюда при выборе параметров функционирования устройства необходимо выбирать между повышением чувствительности приемной ячейки за счет накопления и возрастанием при этом ее инерционности. Использование микроконтроллера позволяет выбрать разумный компромисс при решении каждой конкретной задачи. Например, при визуальном наблюдении за силой сигнала время накопления может быть того же порядка, что и при смене последовательных кадров в телевизионном изображении (25—100 кадров в секунду), а для фиксации достаточно медленных изменений принимаемого излучения оно может достигать одной или нескольких секунд.

В экспериментальной ячейке используется LNA с усилением ~ 20 дБ в полосе частот 8 ГГц (от 3 до 11 ГГц), что при совместном применении с логарифмическим детектором AD8317 (чувствительность ~ -60 дБ в полосе частот 0,1—10 ГГц, динамический диапазон 55 дБ, полоса частот на выходе LPF детектора 10 МГц) позволяет на выходе LPF получить чувствительность -70 дБм при динамическом диапазоне приема 45 дБ. Максимальная частота дискретизации отсчетов по времени с дальнейшей обработкой в микроконтроллере определяется возможностями ADC. В приемнике используется собственный 12-разрядный ADC микроконтроллера STM32L, производящего обработку сигнала. Максимальная частота дискретизации отсчетов у него составляет 10^6 отсчетов в секунду. Таким образом, минимально возможное время между отсчетами 1 мкс, что в 10 раз больше, чем характерное время автокорреляции шумовой компоненты на выходе фильтра детектора. В устройстве используется однократная ком-

пенсация мощности собственных шумов и фонового излучения. С этой целью перед началом измерений сигнала производится оценка значения напряжения на выходе детектора при выключенном источнике, которая вычитается в микроконтроллере из значения сигнала, получаемого в процессе измерений. Для этого ко входу переключателя вместо антенны подключается согласованная нагрузка.

В проведенных с ячейкой экспериментах по оценке влияния накопления на реальную чувствительность приемника использовалась частота дискретизации 100 тыс. отсчетов в секунду. В качестве источника бралась лампа радиосвета с полосой частот 3—5 ГГц и излучаемой мощностью 2 мВт [27].

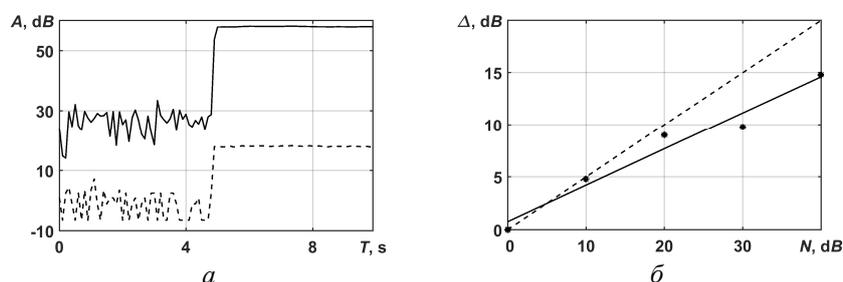


Рис. 9. Влияние накопления на характер работы приемника: *a* — сигнал на выходе без использования накопления (пунктирная кривая) и с накоплением $N = 10^4$ (сплошная кривая); *б* — зависимость выигрыша для отношения сигнал / шум от накопления N (пунктирная линия — теоретическая прямая; точки — экспериментальные данные; сплошная прямая — результат среднеквадратичного усреднения по экспериментальным точкам)

В безэховой камере сначала находилось фоновое значение сигнала (уровень собственных шумов) при заданном накоплении N . Затем при этом же накоплении измерялся суммарный уровень определенного сигнала от источника радиосвета и фона. Путем фиксирования чувствительности приемника при изменении N были получены данные по реальному выигрышу в чувствительности при накоплении. На рис. 9, *a* представлены результаты сравнения уровня сигнала в относительных единицах и логарифмическом масштабе для случая без накопления (пунктирная кривая) и с накоплением $N = 10^4$ (сплошная кривая), время накопления 0,1 с. В левой части графиков показан уровень сигналов на выходе ячейки, соответствующий фону. В правой части графиков показан уровень сигналов после включения источника радиосвета. Превышение уровня накопленного сигнала над уровнем сигнала без накопления составляет 40 дБ, что точно соответствует $10 \lg N$ при $N = 10^4$. Превышение сигнала над шумом (SNR) составляет 18 дБ без накопления сигнала и 32 дБ в случае с накоплением. Разница в

выигрывает по SNR за счет накопления 14 дБ, что на 6 дБ меньше, чем теоретическая при таком накоплении. Недобор по чувствительности связан с неполной компенсацией фонового шума и наблюдается также при других уровнях накопления (рис. 9, б). Тем не менее даже такое «неидеальное» накопление позволяет значительно увеличить дальность работы приемника. Это было подтверждено в экспериментах по определению максимальной дальности, при которой виден источник. При отсутствии накопления эта дальность в условиях измерений составляла около 25 м. Применение накопления с $N = 10^4$ позволило увеличить ее до более чем 120 м.

Таким образом, предложенная ячейка обладает значительно большей чувствительностью, чем высокоскоростные энергетические приемники. При этом в пересчете на яркостную температуру чувствительность составляет ~ 12 К, что значительно ниже, чем чувствительность типичных микроволновых радиометров (0,1—1 К). Однако как расчеты, так и эксперименты показывают, что при радиоосвещении достаточно типичной является ситуация, при которой динамического диапазона и чувствительности предложенной ячейки вполне достаточно для наблюдения локально освещенных в микроволновом диапазоне объектов и части пространства при мощности источников излучения в единицы милливатт.

6. Изображения объектов в радиосвете

Описанное выше устройство решает проблему приема, однако вопрос о получении изображений в радиосвете остается открытым. Для его решения необходимо обеспечить пространственное разрешение освещенных радиосветом участков.

Для демонстрации возможности конструктивного решения этой задачи было предложено использовать разработанный и описанный выше чувствительный элемент, с которым вместо ненаправленной антенны используется узконаправленная параболическая антенна со сверхширокополосным излучателем. Пространственная картина освещенной радиосветом области создается в результате сканирования лучом антенны в горизонтальной и вертикальной плоскости.

Для этого измеряются значения мощности приходящего сигнала на приемник в зависимости от угла поворота антенны в азимутальной плоскости (угол φ) и угла места θ . Измерения производятся для пар углов (φ_i, θ_j) с шагом $\Delta\varphi$ в азимутальной плоскости и с шагом $\Delta\theta$ по углу места. Изображение строится на основе значений принятой мощности сигнала для всех пар углов (φ_i, θ_j) из заданной прямоугольной области.

Цель проводимых экспериментов состояла в получении изображения в микроволновом радиодиапазоне исследуемого помещения при использовании для этого лампы радиосвета и соответствующего приемника.

В экспериментах использовалось следующее оборудование: лампа радиосвета на основе динамического хаоса с диапазоном излучения 3—5 ГГц и мощностью излучения 2 мВт, чувствительный элемент приемника радиосвета [28], параболическая антенна с рупорным СШП-облучателем Н-образного типа (2—7 ГГц) [29], анализатор спектра, СВЧ-кабели и аттенюаторы, персональный компьютер с программным обеспечением для приемника радиосвета.

Эксперименты проводились в конференц-зале ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН с площадью $10,5 \times 18,0$ м и высотой потолка около 4,0 м.

Предварительно были измерены характеристики параболической антенны с рупорным сверхширокополосным излучателем. Ширина диаграммы направленности антенны по уровню -3 дБ на частоте 3 ГГц как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскости оказалась равной примерно 10° . Измеренная ширина диаграммы направленности антенны по мощности в горизонтальной плоскости на частоте 5 ГГц по уровню -3 дБ равна 8° .

Кроме того, были измерены диаграммы направленности в горизонтальной и вертикальной плоскости для шумоподобного СШП-сигнала, когда в качестве источника излучения использовалась лампа радиосвета с полосой излучения 2 ГГц. Ширина диаграммы направленности по мощности и уровню -3 дБ для такого СШП-сигнала составляет около 10° как в горизонтальной, так и в вертикальной плоскости.

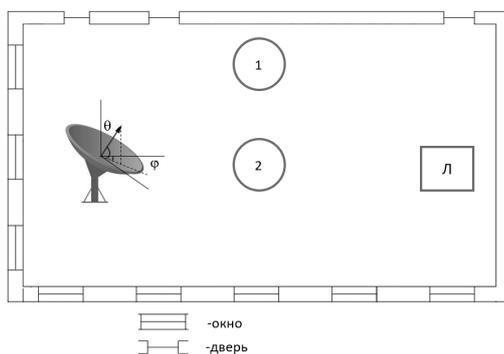


Рис. 10. Схема экспериментов. Цифрами 1 и 2 обозначены два варианта расположения дополнительного объекта (человека)

На рис. 10 приведена схема экспериментов по получению изображения помещения в радиосвете. Лампа радиосвета Л размещалась в одном конце зала, над сценой. Высота расположения лампы относительно пола составляла примерно полтора метра. Приемное устройство включало в себя параболическую антенну со сверхширокополосным излучателем, чувстви-

тельный элемент и персональный компьютер. Оно размещалось в противоположном конце зала так, что расстояние между лампой радиосвета и антенной приемника составляло 10 м. Чувствительный элемент приемного устройства, использующийся в экспериментах, отличается от описанной выше ячейки радиосвета тем, что в нем встроенная ненаправленная антенна заменена на разъем, связывающий элемент с разъемом внешней параболической антенны. Принимаемый чувствительным элементом сигнал обрабатывается и через USB-разъем передается на компьютер, где осуществляется его дальнейшая обработка. В компьютере также находится разработанная программа для построения изображений по результатам измерений.

В ходе экспериментов значение принимаемой мощности сигнала измерялось приемником радиосвета при последовательном повороте антенны на углы $\Delta\phi = 2^\circ$ от -50° до $+50^\circ$, затем антенна поворачивалась на $\Delta\theta = 2,5^\circ$ в вертикальной плоскости и снова осуществлялись повороты в секторе углов $(-50^\circ, +50^\circ)$ в горизонтальной плоскости. Процедура повторялась в секторе углов по θ от -5° до $+20^\circ$. Здесь и далее значение углов определяется относительно направления на максимум принимаемой мощности излучения. Панорамное изображение зала в видимом свете в этом диапазоне углов представлено на рис. 11, а.

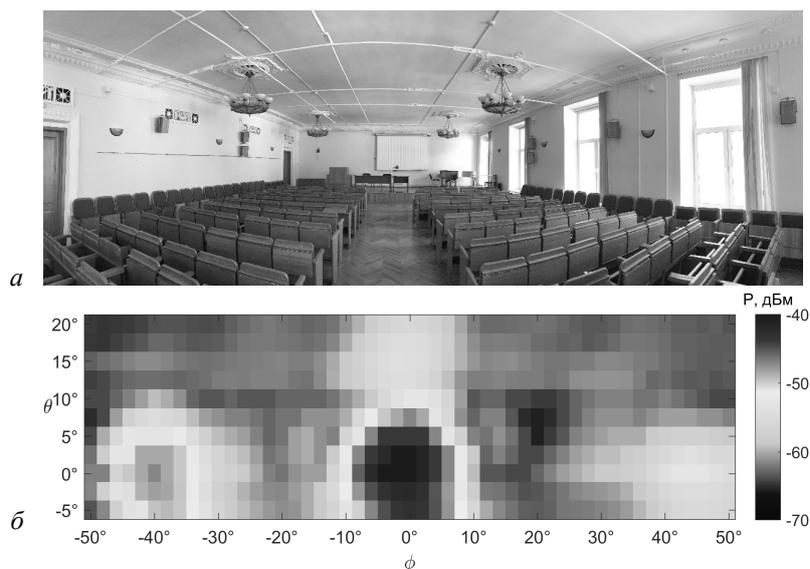


Рис. 11. Конференц-зал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН: а — панорамная фотография конференц-зала; б — полученное изображение конференц-зала в радиосвете

Первоначально измерялась принимаемая мощность излучения с выключенной лампой радиосвета. Приемник регистрировал значения мощности на среднем уровне -75 дБм, которые незначительно флуктуировали относительно этого уровня при изменении углов φ и θ . Затем была включена лампа радиосвета и проведены измерения в соответствии с вышеуказанной методикой.

На изображении, представленном на рис. 11, б, можно наблюдать освещение помещения на уровне $-60 \dots -65$ дБм в областях, не попадающих в прямой или отраженный от стен луч лампы радиосвета. Это говорит о том, что мощность излучения используемой лампы повысила уровень мощности поля освещения конференц-зала примерно на 10 дБ над фоновым уровнем. По центру полученного изображения можно наблюдать характерное пятно от прямого луча между лампой и приемником радиосвета с интенсивностью (мощностью) в максимуме до -40 дБм. По обе стороны от него видны также области с повышенной освещенностью при $\varphi = -40^\circ$ с интенсивностью до -48 дБм и при $\varphi = +44^\circ$ с интенсивностью до -53 дБм. Они соответствуют «зеркальному» отражению радиосвета лампы. Интенсивность правого пятна ниже левого, поскольку на правой стороне зала располагаются большие окна.

Для определения возможности выявления вновь попавших в зону просмотра объектов были проведены эксперименты по обнаружению вошедшего в зону человека. В этих экспериментах испытуемый занимал одну из двух заранее определенных позиций в зале (они показаны на рис. 10).

Для каждой позиции расположения человека было построено по два изображения: при наличии человека и при его отсутствии.

Так, для эксперимента в случае расположения человека в точке 1 (см. рис. 10) эти изображения были построены в диапазоне углов от -60° до -30° по углу φ и от -5° до $+12,5^\circ$ по углу θ . На месте присутствия человека в точке 1 у стены происходило дополнительное ослабление сигнала на приемнике радиосвета, достигающее 10 дБ. Аналогичные результаты были получены при расположении объекта в точке 2 (см. рис. 10) в центре конференц-зала (рис. 12). В обоих случаях на месте в направлении присутствия человека наблюдается дополнительное ослабление сигнала до 10 дБ. В первом случае объект находился на пути отраженного «зеркального» луча от лампы радиосвета к приемнику, во втором случае — на пути прямого луча.

Расстояние от антенны до человека и в том и в другом случае составляло $5\text{—}6$ м. При пересчете угловых размеров разностных пятен в линейные их размер соответствует примерно 1 м вдоль горизонтали и $1,5$ м вдоль вертикали.

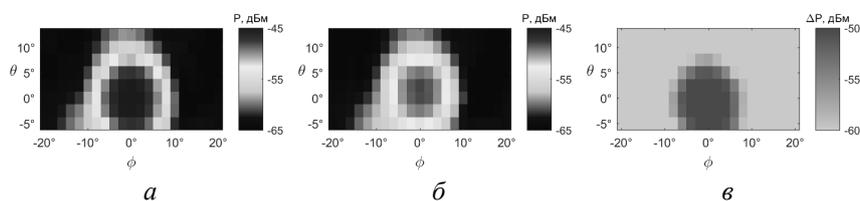


Рис. 12. Изображение фрагмента зала при радиоосвещении для случая расположения человека в центре зала: *а* — человек отсутствует, *б* — человек присутствует, *в* — разностное изображение

Таким образом, измерения показывают возможность применения искусственного радиоосвещения для обнаружения появления новых объектов в помещении, а также, потенциально, для оценки их размеров в пределах разрешающей способности аппаратуры. В рассматриваемом примере угловое разрешение составляет приблизительно два пикселя, т. е. 4° вдоль горизонтальной оси и 5° вдоль вертикальной оси. При расстоянии до объектов 5—6 м точность оценки их линейных размеров составляет около 40 см.

Разработка высокоэффективных миниатюрных источников широкополосного некогерентного микроволнового излучения на основе динамического хаоса дает возможность создавать искусственное радиоосвещение. Вместе с использованием современных методов приема сверхширокополосных сигналов это позволит создать новый класс аппаратуры для инфокоммуникационной инфраструктуры, чтобы обеспечивать наблюдение за окружающим пространством в условиях тумана, снегопада, задымления, песчаной бури, темноты.

Такая аппаратура будет всепогодной и сможет применяться в условиях полярной ночи на Крайнем Севере, при швартовке судов, для ориентирования самолетов при посадке и т. д.

Литература

1. *Тайсон, Н. Д.* Астрофизика с космической скоростью / Н. Д. Тайсон. — М. : АСТ, 2018. — 235 с.
2. *Вавилов, С. И.* Глаз и солнце / С. И. Вавилов. — СПб. : Амфора, 2006. — 334 с.
3. *Спиридонов, О. П.* Свет. Физика. Информация. Жизнь / О. П. Спиридонов. — М. : Ленанд, 2015. — 218 с.
4. *Polivka, J.* Microwave Noise Field Behaves Like White Light / J. Polivka, P. Fiala, J. Machac // Progress in Electromagnetics Research. — 2011. — Vol. 111. — P. 311—330.
5. *Шутко, А. М.* СВЧ-радиометрия водной поверхности и почвогрунтов / А. М. Шутко. — М. : Наука, 1986.
6. *Armand, N. A.* Radio Propagation and Remote Sensing of the Environment / N. A. Armand, V. M. Polyakov. — Boca Raton : CRC Press, 2005.

7. Шарков, Е. А. Радиотепловое дистанционное зондирование Земли: физические основы / Е. А. Шарков. — Т. 1. — М. : ИКИ РАН, 2014.
8. Гуляев, Ю. В. Физические поля биологических объектов / Ю. В. Гуляев, Э. Э. Годик // Вестн. АН СССР. — 1983. — № 8. — С. 118.
9. Гуляев, Ю. В. Физические поля и излучения человека. Новые неинвазивные методы медицинской диагностики / Ю. В. Гуляев. — М. : «Знание» им. С. И. Вавилова, 2009.
10. Серия шумовых диодов Noisecom NC100/200/300/400 / ООО «ЭВИТЕК». — Режим доступа: [http:// evitek.ru/catalog/noisecom/istochniki-shuma/shumovye-diody/seriya-shumovyh-diodov-noisecom_16294.html](http://evitek.ru/catalog/noisecom/istochniki-shuma/shumovye-diody/seriya-shumovyh-diodov-noisecom_16294.html). — Загл. с экрана.
11. Безруков, В. А. Двухуровневые генераторы шума серии TGN // Современная электроника. — 2011. — № 7. — С. 28.
12. Дмитриев, А. С. Радиоосвещение на основе сверхширокополосных генераторов динамического хаоса / А. С. Дмитриев, Е. В. Ефремова, М. Ю. Герасимов, В. В. Ицков // РЭ. — 2016. — Т. 61, № 11. — С. 1—11.
13. Дмитриев, А. С. Источники радиоосвещения на основе сверхширокополосных микрогенераторов хаотических колебаний / А. С. Дмитриев, Е. В. Ефремова // Письма в ЖТФ. — 2016. — Т. 42, № 24. — С. 49—57.
14. Кислов, В. Я. Исследование стохастических автоколебательных режимов в автогенераторах с запаздыванием / В. Я. Кислов, Н. Н. Залогин, Е. А. Мясин // РЭ. — 1979. — Т. 24, № 6. — С. 1118.
15. Безручко, Б. П. Экспериментальное наблюдение стохастических автоколебаний в динамической системе «пучок — обратная электромагнитная волна» / Б. П. Безручко, С. П. Кузнецов, Д. И. Трубецков // Письма в ЖЭТФ. — 1979. — Т. 29, № 3. — С. 180.
16. Анисимова, Ю. В. Об одном механизме перехода к хаосу в системе «электронный пучок — электромагнитная волна» / Ю. В. Анисимова, А. С. Дмитриев, Н. Н. Залогин [и др.] // Письма в ЖЭТФ. — 1983. — Т. 37, № 8. — С. 387.
17. Дмитриев, А. С. Генерация хаоса / А. С. Дмитриев, Е. В. Ефремова, Н. А. Максимов, А. И. Панас. — М. : Техносфера, 2012.
18. Дмитриев, А. С. Сверхширокополосная беспроводная связь на основе динамического хаоса / А. С. Дмитриев, А. В. Клецов, А. М. Лактюшкин [и др.] // РЭ. — 2006. — Т. 51, № 10. — С. 1193.
19. Дмитриев, А. С. Генерация динамического хаоса микроволнового диапазона в автоколебательной структуре на основе SiGe / А. С. Дмитриев, Е. В. Ефремова, А. Ю. Никишов // Письма в ЖТФ. — 2009. — Т. 35, № 23. — С. 40.
20. Дмитриев, А. С. Генерация микроволнового динамического хаоса в кольцевой автоколебательной системе на комплементарной металл-окисел-полупроводниковой структуре / А. С. Дмитриев, Е. В. Ефремова, А. Ю. Никишов // Письма в ЖТФ. — 2010. — Т. 36, № 9. — С. 82.
21. Панченко, Б. А. Антенны / Б. А. Панченко. — М. : Горячая линия — Телеком, 2015. — 122 с.
22. Смит, К. Ю. М. Биология сенсорных систем / К. Ю. М. Смит. — М. : БИНОМ, 2013. — 583 с. (*Smith C.U.M. Biology of Sensory Systems. Wiley, 2009. 554 p.*)
23. Sichert, A. B. Snake's Perspective on Heat : Reconstruction of Input Using an Imperfect Detection System / A. B. Sichert, P. Friedel, J. Leo van Hemmen // PRL. — 2006. — Vol. 97. — Art. 068105.

24. *Кутуза, Б. Г.* Спутниковый мониторинг Земли : микроволновая радиометрия атмосферы и поверхности / Б. Г. Кутуза, М. В. Данилычев, О. И. Яковлев. — М. : URSS, 2015.
25. *Волосюк, В. К.* Статистическая теория сверхширокополосных радиометрических устройств и систем / В. К. Волосюк, В. Ф. Кравченко, Б. Г. Кутуза, В. В. Павликов, В. И. Пустовойт // ФОРМ. — 2014. — Т. 3, № 3. — С. 5—65.
26. *Гуляев, Ю. В.* Взаимодействие и навигация роботов на основе сверхширокополосной прямохаотической связи / Ю. В. Гуляев, А. С. Дмитриев, В. А. Лазарев, Т. И. Мохсени, М. Г. Попов // РЭ. — 2016. — Т. 61, № 8. — С. 765—772.
27. Радиосвет: посмотрим на мир в другом свете / Анамезон. — Инновац. центр Сколково, 2017. — Режим доступа: <http://anamezon.ru/radiosviet>. — Загл. с экрана.
28. *Гуляев, Ю. В.* Ячейка приемника радиосвета / Ю. В. Гуляев, А. С. Дмитриев, В. В. Ицков [и др.] // РЭ. — 2018. — Т. 63, № 9. — С. 947.
29. *Калиничев, В. И.* Сверхширокополосная зеркальная антенна с рупорным облучателем Н-образного сечения / В. И. Калиничев, В. А. Калошин, Л. И. Пангонис // III Всерос. конференция «Радиолокация и радиосвязь». — М. : ИРЭ РАН, 2009. — Т. 1. — С. 101—104.

Нелинейные процессы в структурированных средах

САМОКОМПРЕССИЯ И ТРАНСПОРТИРОВКА ИНТЕНСИВНЫХ ЛАЗЕРНЫХ ИМПУЛЬСОВ В СИСТЕМЕ СЛАБОСВЯЗАННЫХ СВЕТОВОДОВ

А. А. Балакин

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород

Представлен обзор изучения динамики самовоздействия волнового поля в массиве слабосвязанных пассивных и активных световодов. Показаны возможности и исследованы ограничения по захвату излучения в один световод. Продемонстрирована возможность управления локализацией излучения в нужный световод с помощью изменения угла инжекции волнового поля в рассматриваемую систему. Определены зависимости характерных параметров волнового поля от параметров массива световодов.

Значительный технологический прогресс в создании систем микроструктурированных волноводных структур с целью управления световыми потоками привел к активному развитию раздела нелинейной науки, посвященного исследованиям нелинейных волновых процессов в пространственно-периодических средах [1—4]. Оно сопровождается постоянно возрастающим интересом не только с теоретической, но и с экспериментальной точки зрения. Важно отметить, что исследование нелинейной волновой динамики в дискретных системах является, по сути, междисциплинарной областью.

Использование пространственных волноводных массивов, состоящих из одинаковых эквидистантно расположенных слабосвязанных световодов, стало перспективным средством для изучения многих интересных фундаментальных явлений, таких как дискретная дифракция [4—6], дискретные солитоны [1, 4, 5] и фотонные блоховские колебания [4, 7, 8]. Это обусловлено возможностью создания многосердцевинных световодов с нужными дифракционными и дисперсионными свойствами. Помимо чисто фундаментального интереса, в проводимых исследованиях просматривается и практическая направленность: изучение возможностей генерации суперконтинуума [9] и укорочения длительностей лазерных импульсов [10, 11], управление структурой волнового поля [5, 12], формирование световых пучков [9, 13].

Существование одномерных дискретных солитонов, по-видимому, впервые было показано в работе [5], а в [14] их наблюдали экспериментально. Наряду с этим, в работе [15] было экспериментально продемонстри-

рировано отличие динамики самовоздействия волнового поля в одномерной решетке параллельных слабосвязанных световодов от континуального случая. Отличие состоит в том, что при превышении мощности критического значения первоначально широкое начальное распределение волнового поля в результате развития дискретного коллапса локализуется на масштабе, сравнимом с периодом решетки эквидистантно расположенных световодов. Другими словами, поле из первоначально большого числа волноводов локализуется в одном или малом числе световодов. В работе [16] на основе развитого вариационного подхода было исследовано явление самофокусировки волнового поля в одномерной дискретной системе и определена мощность излучения, при которой сначала широкое (на масштабе размера ячейки) распределение локализуется в одном световоде.

В последние десятилетия проделана интенсивная работа, связанная с изучением нелинейной волновой динамики в дискретных активных системах в рамках дискретного уравнения Гинзбурга — Ландау, которое широко используется для описания неравновесных нелинейных систем [17, 18]. Важным фактором, объединяющим консервативные и неконсервативные системы, является возможность существования решений солитонного типа. В активных системах конкурирующее воздействие диссипации и усиления приводит к формированию вполне определенных локализованных структур, в отличие от однопараметрического семейства солитонов в консервативном случае. Как правило, в активной среде они оказываются и более устойчивыми. Были исследованы одномерные [18] и двумерные [19] дискретные солитоны в консервативном случае.

В данной работе представлен краткий обзор нелинейной динамики волновых пучков в одномерной системе слабосвязанных световодов. Вначале сформулированы основные уравнения (раздел 1) и развито вариационное приближение на случай активных дискретных систем (раздел 2). В разделе 3 рассмотрена динамика волновых полей в консервативном случае и найдена пороговая мощность захвата излучения в один световод. Раздел 4 посвящен обобщению этого эффекта на случай активных систем. Возможности управления захватом излучения в заданный световод обсуждаются в разделе 5. В разделе 6 исследованы ограничения по захвату излучения в один световод.

1. Дискретное НУШ

Рассмотрим самовоздействие волнового поля, инжектируемого в пространственно неоднородную среду, состоящую из одномерного набора эквидистантно расположенных световодов, с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon \approx \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \sum s(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{l}n). \quad (1)$$

Здесь \mathbf{l} — шаг решетки световодов, $s(\mathbf{r}) = \text{step}(|\mathbf{r}| - R)$ — узко локализованная функция с характерным масштабом $R < |\mathbf{l}|$, \mathbf{r}_\perp — координата в плоскости, перпендикулярной световоду.

Будем полагать, что каждый световод является одномодовым. В этом случае распространение волнового поля E в рассматриваемой системе может быть приближенно описано как суперпозиция мод, локализованных в каждом световоде:

$$E(\mathbf{r}_\perp, z) = \sum \psi_n(z) f(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{l}n), \quad (2)$$

где $f(\mathbf{r})$ — фиксированная структура низшей моды световода, ψ_n — комплексная амплитуда поля в n -м световоде. Анализ данной задачи проведем на базе стандартной теоретической модели [1, 4, 20], в рамках которой предполагается, что фундаментальные направляемые моды ориентированных параллельно оси z оптических волноводов слабо связаны между собой. Будем полагать, что эволюция огибающей поля ψ_n в n -м световоде определяется в процессе распространения волнового поля вдоль оси z следующими факторами: керровской нелинейностью одиночного световода, усилением в активной среде и взаимодействием с ближайшими соседями, возникающим из-за слабого перекрытия направляемых ими мод.

В среде из неограниченного числа эквидистантно расположенных световодов приходим в безразмерных переменных к дискретному нелинейному уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial \psi_n}{\partial z} + \psi_{n+1} + \psi_{n-1} + |\psi_n|^2 \psi_n = i\gamma \psi_n. \quad (3)$$

Здесь параметр γ характеризует линейное усиление в активной среде. В консервативном случае ($\gamma = 0$) уравнение (3) сохраняет полную мощность P излучения во всех световодах и гамильтониан H :

$$P = \sum |\psi_n|^2, \quad H = \sum \left(\frac{|\psi_n|^4}{2} + \psi_{n+1} \psi_n^* + \psi_{n+1}^* \psi_n \right). \quad (4)$$

Уравнение (3) должно быть дополнено граничными условиями, соответствующими отсутствию световодов на краях: $\psi_{-N} = \psi_N = 0$. Для построения теоретической модели будем считать $N \gg 1$.

2. Вариационное приближение

Для исследования особенностей когерентного суммирования излучения в одном световоде воспользуемся вариационным приближением, которое дает возможность классифицировать характерные режимы самовоздействия и определить соответствующие критические параметры. Приближение состоит в минимизации функционала действия при использова-

нии пробной функции ψ , которая зависит от небольшого количества параметров (например, ширины волнового пакета, кривизны его фазового фронта и т. д.), являющихся функциями эволюционной координаты z . Технически метод основан на переходе к укороченному лагранжиану \bar{L} , равному интегралу по поперечным координатам от исходного лагранжиана L с подставленными пробными функциями. Несмотря на усложнение ситуации в активной среде, связанное с отсутствием гамильтоновости, вариационную задачу удастся сформировать и для уравнения (3). При этом, наряду с лагранжианом консервативной части системы, необходимо определить и диссипативную функцию системы.

Отвечающая уравнению (3) функция Лагранжа в консервативном случае ($\gamma = 0$) имеет следующий вид [16, 20—22]:

$$L = \sum \left[\frac{i}{2} \left(\psi_n^* \frac{\partial \psi_n}{\partial z} - \psi_n \frac{\partial \psi_n^*}{\partial z} \right) + \frac{|\psi_n|^4}{2} + \psi_{n+1} \psi_n^* + \psi_{n+1}^* \psi_n \right]. \quad (5)$$

Используя формулу суммирования Пуассона для функции непрерывного аргумента $F(x)$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(2\pi n x) dx,$$

перепишем лагранжиан (5) в виде

$$L = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i n x} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{i}{2} \left(\psi^*(z, x) \frac{\partial \psi(z, x)}{\partial z} - \psi(z, x) \frac{\partial \psi^*(z, x)}{\partial z} \right) + \psi(z, x+1) \psi^*(z, x) + \psi(z, x) \psi^*(z, x+1) + \frac{1}{2} |\psi|^4(z, x) \right] dx. \quad (6)$$

Это позволяет вместо бесконечного упорядоченного набора комплексных амплитуд $\psi_n(z)$ поля в каждом из волноводов работать с одной-единственной функцией $\psi(z, x)$, зависящей от непрерывной переменной x .

Для того чтобы приближенно описать распространение локализованного волнового поля, инжектируемого в одномерную периодическую систему световодов, в качестве пробной функции $\psi(z, x)$ выберем распределение гауссовой формы

$$\psi = \sqrt{\frac{P}{\sqrt{\pi} a}} \exp \left[-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2} + i\beta(x-x_0)^2 + i\sigma(x-x_0) + i\theta \right], \quad (7)$$

где P — мощность волнового поля, параметры $a(z)$, $\beta(z)$, $\theta(z)$ характеризуют ширину волнового пучка, кривизну фазового фронта и фазу поля на оси системы. Здесь $x_0(z)$ — координата центра интенсивности волнового пучка, σ — поперечное волновое число. Подставляя (7) в (6) и интегрируя по

непрерывной переменной x , приходим к функциональному ряду. Для широких пучков с $a \gg 1/\pi$ коэффициенты данного ряда экспоненциально быстро спадают с ростом n (см., например, [16, 21]). Таким образом, даже для волновых полей с характерным поперечным размером $a(z)$, сравнимым с масштабом пространственной неоднородности среды, при описании процессов самовоздействия позволительно ограничиться в (6) лишь слагаемыми с $n = 0$. В итоге для укороченной функции Лагранжа L консервативной части ($\gamma = 0$) рассматриваемой системы (3) получим следующее выражение:

$$\bar{L} = \frac{Pa^2}{2} \frac{d\beta}{dz} + P \cos \sigma \frac{d\theta}{dz} - \frac{P^2}{\sqrt{8\pi a}} - 2P e^{-1/4a^2 - \beta^2 a^2} \cos \sigma - P \sigma \frac{dx_0}{dz}. \quad (8)$$

Изменение параметров $a_j = \{P, a, \beta, \sigma, \theta, x_0\}$ на трассе распространения волнового пучка определяется уравнениями Эйлера

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{a}_j} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial a_j} = 0, \quad \dot{a}_j = \frac{da_j}{dz}. \quad (9)$$

Обобщение уравнения Эйлера для определения параметров варьируемой функции (7) в неконсервативном случае состоит в учете вклада неконсервативной части в системе. Для уравнения (3) вариация диссипативной функции δQ равна

$$\delta Q = i\gamma \int (\psi \delta \psi^* - \psi^* \delta \psi) dx. \quad (10)$$

Соответственно, уравнения Эйлера для параметров волнового пакета (7) в рассматриваемом неконсервативном случае имеют вид [3]

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{a}_j} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial a_j} = i\gamma \int \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial a_j} - \text{c. c.} \right) dx. \quad (11)$$

Выполняя соответствующие вычисления для волнового пучка (7), получаем сохранение величины $\sigma = \sigma_0$. Остальные уравнения, определяющие изменения параметров волнового пучка на трассе распространения, имеют вид

$$\frac{dP}{dz} = 2\gamma P, \quad (12a)$$

$$\frac{da}{dz} = 4\beta a d \cos \sigma_0, \quad (12б)$$

$$\frac{d\beta}{dz} = \frac{\cos \sigma_0}{a^2} \left(\frac{1}{a^2} - 4\beta^2 a^2 \right) d - \frac{P}{\sqrt{8\pi a^3}}, \quad (12в)$$

$$\frac{dx_0}{dz} = 2d \sin \sigma_0. \quad (12г)$$

Здесь фактор

$$d = \exp\left(-\frac{1}{4a^2} - \beta^2 a^2\right) \quad (13)$$

отражает специфику дискретной задачи. В континуальном случае ($a \gg 1$, $\beta a \ll 1$) он близок к 1. В обратном предельном случае множитель d экспоненциально мал, т. е. дискретность среды приводит к ослаблению линейной дифракции волнового поля.

Наличие усиления в среде ($\gamma > 0$) приводит к экспоненциальному росту мощности волнового пучка (12а):

$$P = P_0 e^{2\gamma z}, \quad (14)$$

где P_0 — начальное значение мощности.

В рамках используемого подхода видно, что структурные изменения волнового поля, описываемые уравнениями (12а)—(12в), происходят независимо от поведения центра интенсивности x_0 волнового пучка. Траектория движения центра интенсивности определяется отщепленным уравнением (12г). Важно отметить, что отклонение траектории от прямолинейной в сплошной среде отражает специфику пространственно неоднородной задачи. В процессе нелинейной динамики сохраняется поперечное волновое число $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$, характеризующее первоначальный угол между направлением распространения излучения и осью системы. В связи с этим сначала проанализируем особенность самовоздействия волнового пучка, инжектируемого на вход одномерной решетки слабосвязанных активных световодов, в случае $\sigma_0 = 0$, когда центр интенсивности волнового пучка не смещается. Как следует из уравнения (12г), центр интенсивности волнового пучка не будет смещаться: $x_0 = 0$.

3. Световоды без усиления ($\gamma = 0$)

В консервативном случае возможность существования одномерных дискретных солитонов (однородные волновые структуры), по-видимому, впервые была показана в работе [5], а в [14] их наблюдали экспериментально. Используя полученную систему уравнений (12), можно установить связь между мощностью пространственного солитона и его характерным размером. Полагая в уравнениях (12б), (12в) $\beta = 0$ и $d\beta/dz = 0$, находим соотношение

$$P = P_{sol}(a) \equiv \frac{\sqrt{8\pi}}{a} \exp\left(-\frac{1}{4a^2}\right). \quad (15)$$

Анализируя (15), можно видеть, что максимальная мощность таких солитонов достигается при $a = 1/\sqrt{2}$ и составляет $P_m = 4\sqrt{\pi}/e$. При $P < P_m$ существуют два солитона с шириной порядка размера ячейки: узкий

($a < 1/\sqrt{2}$) и широкий ($a > 1/\sqrt{2}$). Они достаточно хорошо изучены в дискретной задаче.

Основное отличие самовоздействия волнового поля в одномерной решетке слабосвязанных световодов от континуального случая связано с «коллапсом» излучения (захватом в один световод). Дискретность среды приводит к ослаблению дифракции узких (в масштабе периода решетки) волновых пучков. Как следствие, возможен коллапс одномерного распределения волнового поля с мощностью выше критической мощности самофокусировки в дискретной среде [15, 16, 23].

Для исследования роли дискретности в нелинейной динамике волнового поля обратимся сначала к уравнению (12в). Оно представляет собой уравнение эйконала в случае волновых пучков с параболическим фазовым фронтом. Первое слагаемое в правой части (12в) описывает «дифракционное» искажение фазового фронта, а второе — нелинейное искажение фазового фронта. Видно, что в дискретной системе дифракционное слагаемое экспоненциально уменьшается и, следовательно, роль нелинейности возрастает.

Для изучения особенностей пространственной эволюции первоначально достаточно широких волновых пучков рассмотрим систему уравнений (12а), (12б). Она имеет интеграл

$$\exp\left(-\frac{1}{4a^2} - \beta^2 a^2\right) = C - \frac{P}{4\sqrt{2\pi}a}, \quad (16)$$

где C — константа интегрирования. Исключая β в (12б) с помощью интеграла (16), приходим к уравнению

$$\frac{da}{dz} = \pm 4 \left(C - \frac{P}{4\sqrt{2\pi}a} \right) \sqrt{-\ln\left(C - \frac{P}{4\sqrt{2\pi}a} \right) - \frac{1}{4a^2}}. \quad (17)$$

Правая часть (17) содержит два сомножителя. Первый из них отражает специфические особенности дискретной задачи. Определяемая этим сомножителем стационарная точка

$$a_1 = \frac{P}{4\sqrt{2}C} \quad (18)$$

соответствует предельной ширине волнового пучка в режиме самозахвата излучения в дискретных системах.

Уравнение (17) описывает периодическое колебание ширины между начальным значением a_0 и минимальным $a_2 \approx \sqrt{2}C/P - P/(8\sqrt{2\pi}C)$, как и в континуальной задаче. Однако величина a_2 уменьшается с ростом P и сравнивается со значением ширины пучка (18), определяемым первым сомножителем в (17). Это означает, что при

$$P_{cr} = \sqrt{\frac{48\pi}{11}}C \approx 3,7C \quad (19)$$

колебательный режим сменяется монотонным уменьшением a от a_0 до a_1 . И трасса самозахвата излучения в пределе $a_2 \gg a_1$ легко оценивается [16]:

$$z_0 \approx \frac{\pi}{2} \frac{a_0}{C \sqrt{\ln C}} \approx \frac{\pi \sqrt[4]{2\pi} a_0^{3/2}}{\sqrt{P}}. \quad (20)$$

Выражение (19) для локальной критической мощности зависит, как и в сплошных средах, от параметров пучка через коэффициент C . Однако дискретный случай имеет ключевое отличие — ширина пучка должна быть больше одной ячейки, $a \geq 1$. Это обеспечивает конечное максимальное значение P_c , которое легко найти с использованием выражения (16) для C :

$$P_c^{\max} \approx 4,6. \quad (21)$$

Данная мощность уже не зависит от параметров пучка и является «истинной» критической мощностью в том смысле, что волновой пучок с произвольными параметрами будет захватываться в световод, если его мощность превышает P_c^{\max} .

Следует отметить, что рассмотренный режим самовоздействия содержит в асимптотическом пределе «однородную» волновую структуру, сильно отличающуюся от (15). Фаза у этой структуры не является плоской. Более того, из (12а) видно, что кривизна фазового фронта растет на трассе распространения волнового пучка по закону

$$\beta = -\frac{P}{2a_1^3 \sqrt{2}} z. \quad (22)$$

Рисунок 1 показывает эволюцию ширины волнового пучка вдоль пути распространения при разных значениях мощности P . При $P < P_c$ поведение аналогично таковому в континуальной среде: «широкие» волновые пучки становятся более узкими на начальном этапе периодического процесса (рис. 1, а), а узкие пучки становятся более широкими (рис. 1, б). При $P > P_c$ динамика изменяется качественно — происходит захват излучения в один световод.

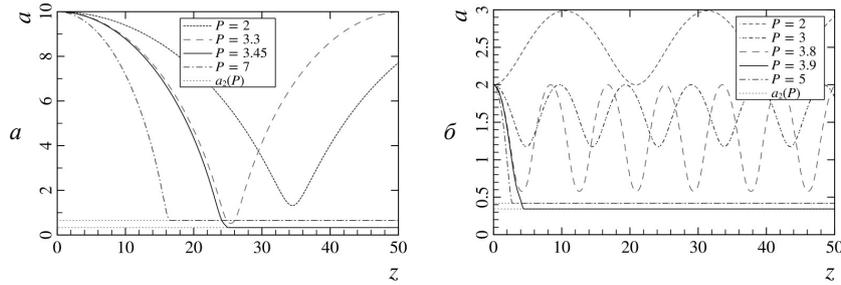


Рис. 1. Зависимость ширины волнового пучка a от координаты z для начальных ширин при различных мощностях P : а — $a_0 = 10$, б — $a_0 = 2$

Результаты численного исследования уравнения (3) представлены на рис. 2. Рисунки 2, *a–в* показывают, что эволюция гладких распределений волнового поля (на периоде решетки световодов) аналогична эволюции в континуальной задаче. Однако по мере увеличения мощности (рис. 2, *б, в*) режим самовоздействия существенно различается — происходит необратимый захват (коллапс) волнового пучка в один световод (ширина приблизительно равна периоду решетки). Численные расчеты показывают, что критическая мощность самофокусировки не зависит ни от ширины начального распределения поля a_0 , ни от вида граничных условий, так как волновое поле локализуется далеко от границ. Отметим, что процесс захвата сопровождается заметным сбросом излучения.

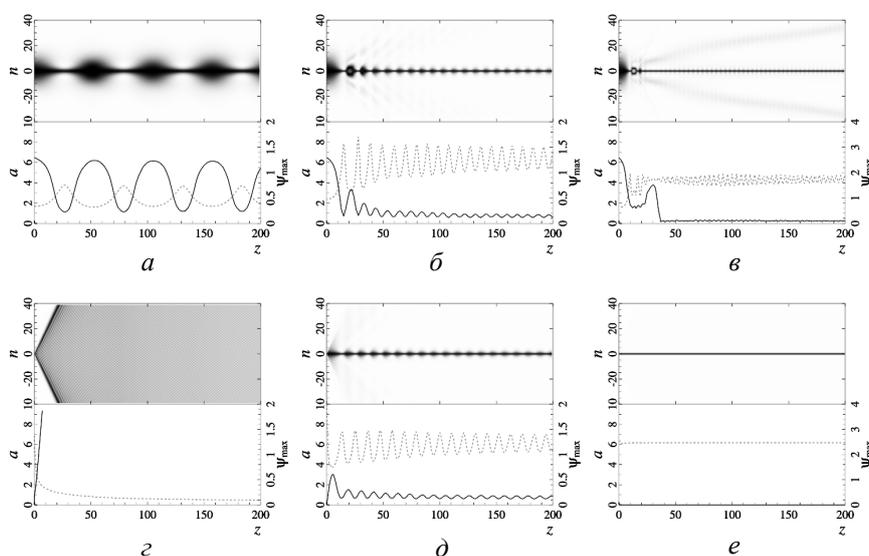


Рис. 2. Динамика амплитуды волнового пучка $|\psi(z, n)|$, а также зависимости от z размеров пучка a (сплошные линии) и максимальной амплитуды (пунктир) при $P_0 = 2$ (*a, з*); $P_0 = 4$ (*б, д*); $P_0 = 7$ (*в, е*); $a_0 = 25$ (*a–в*) и $a_0 = 1$ (*з–е*); $\beta_0 = 0$, $\sigma_0 = 0$

Случай изначально узких волновых пучков с шириной порядка периода решетки ($a_0 \sim 1$) также демонстрирует наличие порога по мощности. Для малых амплитуд (рис. 2, *з*) волновой пучок расплывается в поперечном направлении. Однако при превышении пороговой амплитуды $\sqrt{P_c}$ происходит захват поля в нелинейную структуру с размером, соизмеримым с периодом решетки (рис. 2, *д, е*), что соответствует дискретному со-

литу [5]. При этом превышение начальной амплитудой значения порядка $\sqrt{2\pi} \approx 2,5$ делает начальное распределение устойчивым (см. раздел 6).

Наличие ненулевого поперечного волнового числа $\sigma_0 \neq 0$ приводит к смещению центра интенсивности в поперечном направлении. Оценка смещения легко получается из (12г) для коллапса широких пучков. Действительно, на начальной стадии при $a \gg 1$ можно считать экспоненциальный фактор $d \approx 1$ постоянным. Далее, вследствие взрывного характера коллапса фактор d экспоненциально быстро становится равным 0. Это дает оценку максимального смещения

$$\Delta x_0 \approx 2z_0 \sin \sigma_0 \approx \pi^4 \sqrt{2\pi} \frac{a_0^{3/2} \sin \sigma_0}{\sqrt{P \cos \sigma_0}}, \quad (23)$$

хорошо согласующуюся с точным выражением, полученным в [23]. Следует отметить, что значительный сброс излучения в момент коллапса приводит к нарушению условий применимости вариационного приближения. В результате на конечной стадии появляются случайные отскоки максимума волнового поля на 1—2 световода в поперечном направлении.

4. Световоды с усилением

В отличие от дискретной консервативной среды захват излучения в один световод в активной среде происходит *плавно* в результате адиабатической перестройки солитонного распределения при усилении поля. Солитонному распределению волнового поля соответствует стационарная точка уравнений (12б) и (12в). В стационарной точке кривизна $\beta = 0$ (т. е. волновой пучок имеет плоский фазовый фронт), а ширина a определяется из уравнения (15).

Предполагая сохранение солитонной формы волновых пучков, получим выполнение связи (15) между характерной шириной распределения поля a и мощностью волнового пучка P по всей трассе распространения. В случае широких пространственных солитонов ($a \gg 1$) условием сохранения солитонной формы будет медленность изменения мощности пучка (14) на масштабе дифракционной длины z_d :

$$z_d \approx a^2 \approx \frac{8\pi}{P^2} \ll \frac{1}{\gamma}. \quad (24)$$

Экспоненциальный рост (14) мощности излучения P будет приводить к адиабатическому уменьшению размера пространственного солитона. Из (15) находим для уменьшения ширины пучка следующий закон:

$$a \approx \frac{\sqrt{8\pi}}{P} - \frac{P}{8\sqrt{2\pi}} \approx a_0 e^{-2\gamma z} \quad \text{при} \quad P \ll \sqrt{8\pi}, \quad (25)$$

где $a_0 \approx \sqrt{8\pi}/P_0$ — начальная ширина солитона. Следует отметить, что аналогичная возможность адиабатического уменьшения длительности солитона в активных оптических средах по экспоненциальному закону обсуждалась в работе [24].

Процесс уменьшения ширины волнового пучка ограничивается дискретностью среды, когда ширина распределения волнового поля становится порядка периода решетки $a \sim 1$. Тогда длина захвата L_h волнового поля в центральный световод легко находится из (15) подстановкой $a_{\text{fin}} = 1$ и составляет

$$L_h \approx \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{P_{cr}}{P_0}, \quad P_{cr} = \sqrt{8\pi} e^{-1/4} \approx 3,9. \quad (26)$$

Отметим, что определенная величина пороговой мощности P_{cr} захвата излучения в активных системах близка к критической мощности P_c коллапса волнового пучка в одномерной дискретной системе (19), найденной для консервативного случая [16, 23].

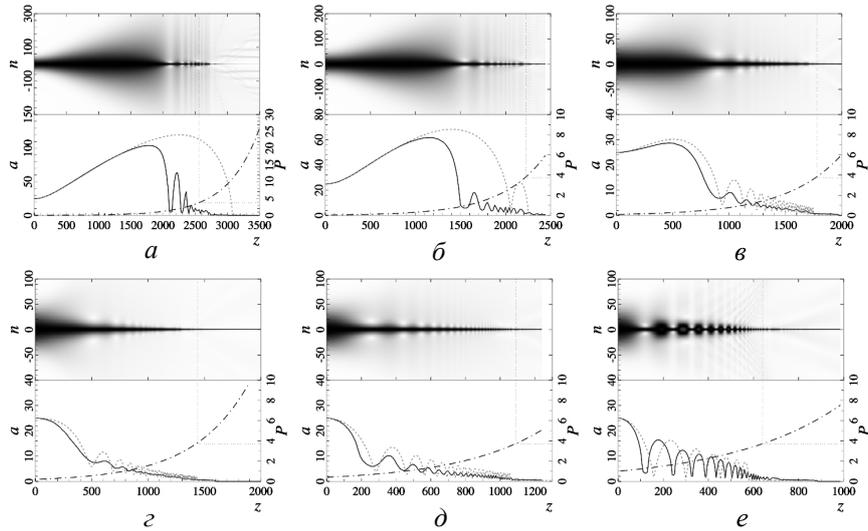


Рис. 3. Динамика амплитуды волнового пучка $|\psi(z, n)|$, а также зависимости от z мощности P (штрихпунктирные кривые), размеров пучка a (пунктирные кривые) и $\langle a \rangle$ (сплошные кривые) при начальных мощностях P_0 , равных $0,1P_{sol}$ (а), $0,2P_{sol}$ (б), $0,5P_{sol}$ (в), P_{sol} (г), $2P_{sol}$ (д), $5P_{sol}$ (е); $\gamma = 10^{-3}$, $a_0 = 25$, $\beta_0 = 0$, $\sigma_0 = 0$. Тонкими вертикальными и горизонтальными линиями показано положение, при котором мощность излучения достигает порогового значения $P_{cr} \approx 3,9$

На рисунке 3 представлена динамика амплитуды волнового пучка $\psi(z, n)$ в одномерном массиве эквидистантно расположенных связанных

активных световодов с коэффициентом усиления $\gamma = 10^{-3}$ при разных начальных значениях мощности волнового пучка P_0 . Штрихпунктирной линией показана зависимость мощности излучения P от эволюционной переменной z , сплошной линией изображена эволюция среднеквадратичного размера пучка

$$\langle a \rangle = \frac{1}{\sqrt{P(z)}} \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |\psi(z, n)|^2} \quad (27)$$

в рамках уравнения (3), серой штриховой линией — динамика ширины пучка, вычисленная на основе системы уравнений (10). Тонкими вертикальными и горизонтальными пунктирными прямыми отмечено положение, когда мощность излучения достигает порогового значения для одномерного коллапса волнового пучка с начальным плоским фазовым фронтом ($P = P_{cr} \approx 3,9$). Как указывалось выше, в случае задания пространственного солитона на входе среды размер волновой структуры будет адиабатически уменьшаться до тех пор, пока мощность излучения не превысит пороговое значение ($P(z) > P_{cr}$). После этого излучение локализуется в центральном световоде благодаря дискретному коллапсу [16, 23]. Данный случай приведен на рис. 3, *г*. Из рисунка видно, что, когда мощность достигает P_{cr} (при $z = 1350$), пучок захватывается в один канал.

При начальных мощностях, больше солитонного значения (P_{sol} на рис. 3, *г*; $2P_{sol}$ на рис. 3, *д*; $5P_{sol}$ на рис. 3, *е*), нелинейное слагаемое является доминирующим. Это приводит к уменьшению длины захвата излучения L_h в один световод. При этом в динамике ширины амплитудного распределения наблюдаются биения амплитуды и ширины волнового поля.

Следует отметить, что в процессе самозахвата излучения в центральный световод радиационные потери в значительной степени ослаблены, в отличие от коллапса излучения в консервативном случае, где высвечивание части излучения из основной области локализации поля более значительно [16]. По-видимому, это связано с адиабатичностью уменьшения размера пучка и плавностью входа излучения в один световод. Соответственно, введение слабого усиления позволяет эффективно захватить *все* излучение в один световод.

5. Управление излучением

Наличие ненулевого поперечного волнового числа $\sigma_0 \neq 0$ приводит к отклонению траектории центра интенсивности от прямолинейной для волновых пучков с мощностью меньшей, чем критическое значение. Именно такое поведение показывает численное моделирование. На рисунке 4 представлена динамика огибающей амплитуды волнового пучка $|\psi(z, n)|$ в одномерном массиве слабосвязанных активных световодов с коэффициентом

усиления $\gamma = 10^{-3}$ при разных значениях начальной мощности P_0 и поперечного волнового числа σ_0 . На вход нелинейной среды инжектировался пучок гауссовой формы (7) с начальным размером $a_0 = 25$, с плоским фазовым фронтом $\beta_0 = 0$. На рисунке сплошной линией показана зависимость среднеквадратичного размера волнового пучка (27) от эволюционной переменной z , а штрихпунктирной линией — зависимость центра интенсивности

$$\langle x \rangle = \frac{1}{P(z)} \sum n |\psi(z, n)|^2. \quad (28)$$

Случаи, представленные на рис. 4, \bar{b} , \bar{d} , соответствуют инжекции волнового пучка солитонной формы в массив световодов. Из рисунка следует, что поведение размера волнового пучка $a(z)$, как и ранее (см. рис. 3), не зависит от величины начального поперечного волнового числа σ_0 , а определяется лишь отношением P_0/P_{sol} начальной мощности P_0 к мощности солитона P_{sol} той же ширины.

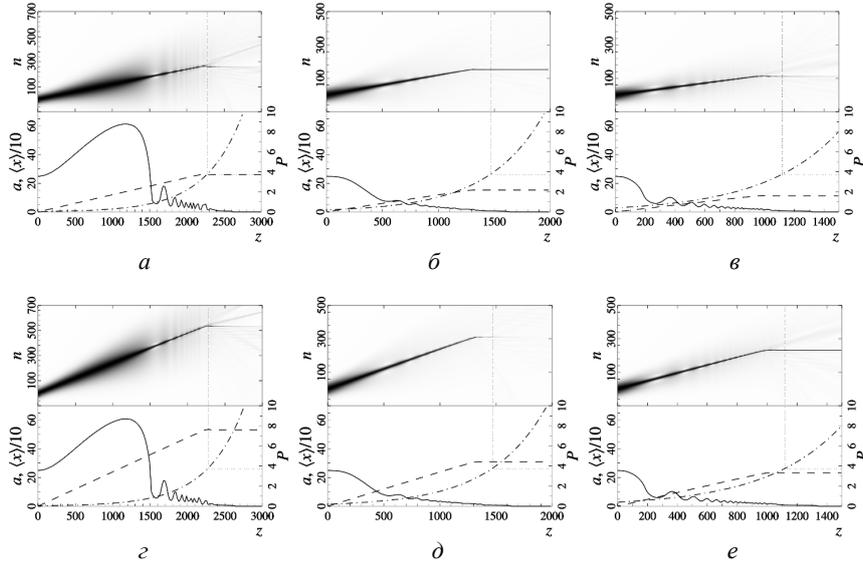


Рис. 4. Динамика амплитуды волнового пучка $|\psi(z, n)|$, а также зависимости от z мощности P (штрихпунктирные кривые), размеров пучка $\langle a \rangle$ (сплошные кривые) и координаты центра тяжести $\langle x \rangle$ при $\gamma = 10^{-3}$, $a_0 = 25$, $\beta_0 = 0$ и $0,2P_{sol}$ (a, \bar{e}); P_{sol} (\bar{b}, \bar{v}); $2P_{sol}$ (\bar{e}, \bar{e}); $\sigma_0 = 0,06$ ($a-\bar{v}$); $\sigma_0 = 0,12$ ($\bar{e}-\bar{e}$)

По мере уменьшения ширины волнового поля дискретность исследуемой системы начинает играть ключевую роль, что существенно сказывается на динамике основных параметров волнового пучка, когда в процессе

усиления мощность излучения превышает пороговое значение P_{cr} . Волновое поле в результате развития дискретного коллапса локализуется на масштабе, сравнимом с периодом решетки эквидистантно расположенных световодов, что оказывает значительное влияние на смещение пучка поперек рассматриваемой решетки. В отличие от сплошной среды «надкритические» пучки отклоняются от первоначального направления прямолинейного распространения и локализуются в структурном элементе, который смещен относительно световода, являющегося исходно центральным для симметричного амплитудного распределения.

Как следует из рис. 4, конечное смещение центра интенсивности волнового поля Δx_0 зависит от отношения P_0/P_{sol} . При этом максимальное смещение Δx_0 достигается при $P_0/P_{sol} < 1$, что связано с увеличением размера волнового пучка на начальном этапе. Наряду с этим, смещение пучка также увеличивается с ростом значения начального поперечного волнового числа σ_0 .

Получим оценку поперечного смещения центра интенсивности волнового пакета солитонной формы. На участке с мощностью меньше порогового значения ($P < P_{cr}$) дискретность среды не сказывается ($d \approx 1$) и в соответствии с формулой (12г) центр интенсивности движется по прямой

$$x_0 = 2\sigma_0 z. \quad (29)$$

При этом ширина пучка уменьшается по закону (25) до достижения пороговой мощности. В результате максимальное поперечное отклонение центра интенсивности волнового пучка составляет

$$\Delta x_0 \approx 2\sigma_0 L_h = \frac{\sigma_0}{\gamma} \ln \frac{P_{cr}}{P_0}. \quad (30)$$

На втором этапе, когда мощность излучения превысит пороговую, влияние дискретности среды станет определяющим. В результате волновое поле в процессе дискретного коллапса локализуется в ячейке на трассе значительно меньшей, чем L_h . Легко показать, что смещение центра интенсивности при этом будет также пренебрежимо мало.

На рисунке 5 приведено сравнение полученной оценки смещения центра интенсивности волнового поля (30) с результатами численного моделирования в рамках исходного уравнения (3). Кружками показаны конечные смещения волнового поля в поперечном направлении в зависимости от начального поперечного волнового числа σ_0 , полученные после обработки данных численного моделирования. Данный случай соответствует инъекции волнового поля солитонной формы ($P_0 = P_{sol}$) в одномерный массив слабосвязанных активных световодов. На рисунке пунктирной линией обозначена полученная оценка (30). Видно хорошее согласие результатов численного моделирования и качественного анализа.

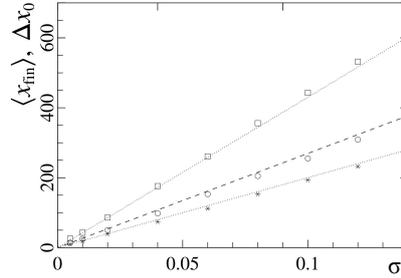


Рис. 5. Конечное смещение Δx_0 центра тяжести интенсивности волнового пучка поперек рассматриваемой решетки в зависимости от начального поперечного волнового числа σ_0 при $P_0/P_{sol} = 2$ (звездочки), 1 (кружки) и 0,2 (квадраты), $\gamma = 10^{-3}$, $a_0 = 25$, $\beta_0 = 0$. Кривые — расчет по формуле (30)

Наряду с этим, на рис. 5 приведены зависимости и для случаев, когда на входе задавалось не солитонное распределение. В частности, звездочки соответствуют $P_0/P_{sol} = 2$, а квадраты — $P_0/P_{sol} = 0,2$. Как видно из рисунка, и при этих условиях имеется хорошее согласие результатов численного моделирования и оценки (30).

6. Случай большой мощности

Дальнейший рост начальной мощности волнового пучка до уровня, много больше пороговой мощности $P > 10P_{cr}$, приводит к расслоению пучка и увеличению эффективной области самолокализации поля (рис. 6, а). Причем наличие усиления в среде ($\gamma > 0$) не стабилизирует данную неустойчивость (рис. 6, б). Расслоение волнового пучка является дискретным аналогом хорошо известной филаментационной неустойчивости. Ее инкремент Γ

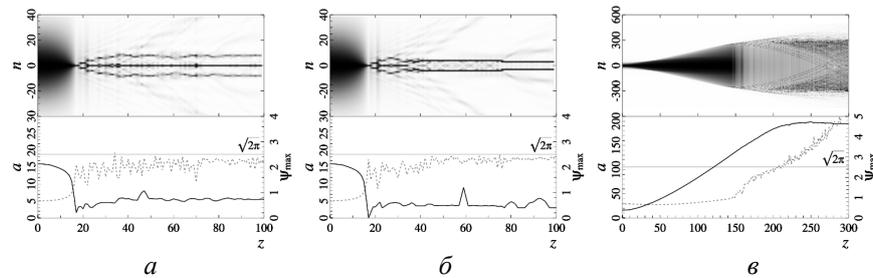


Рис. 6. Динамика амплитуды волнового пучка $|\psi(z, n)|$, а также зависимости от z размеров пучка a (сплошные) и максимальной амплитуды (пунктир) при $P_0 = 20$, $a_0 = 25$, $\beta_0 = 0$, $\sigma_0 = 0$ и $\gamma = 0$ (а), $\gamma = 10^{-3}$ (б), $\gamma = 10^{-2}$ (в). Случай (в) рассчитан в рамках уравнения (35) с дефокусирующей нелинейностью

для возмущений вида $\sim \exp(ikl)$ на фоне плоской волны с амплитудой ψ_0 легко находится [25]:

$$\Gamma^2 = 4 \sin^2 \frac{\kappa}{2} \left(2\psi_0^2 - 4 \sin^2 \frac{\kappa}{2} \right). \quad (31)$$

Отсюда следует, что скорость роста неустойчивости при $\psi_0 > \sqrt{2}$ максимальна для возмущений с периодом решетки световодов:

$$L_{\perp} \equiv \pi / \kappa = 1. \quad (32)$$

Численное моделирование демонстрирует на нелинейной стадии расщепление волнового пучка при амплитуде поля $\psi_0 \gg \sqrt{2}$ в набор волновых структур, локализованных в отдельных оптических волокнах. Такие множества распределений солитонного типа исследовались в работе [26]. Поля в каждом волокне будут иметь собственный нелинейный сдвиг волнового числа $h \approx |\psi_n|^2$, согласно (3). Взаимодействие между световодами будет экспоненциально слабым, если разность фаз $L_d(h - h')$ для характерной длины «дифракции» каждого пика $L_d \sim 1/2$ много больше π . На нелинейной стадии это ограничивает рост амплитуды поля величиной порядка ψ_{\max} :

$$L_d \left(\psi_{\max}^2 - |\psi_n|^2 \right) \approx \pi \Rightarrow \psi_{\max} \geq \sqrt{2\pi + \psi_0^2} \Big|_{\psi_0 \ll 1} \approx \sqrt{2\pi} \approx 2,5, \quad (33)$$

где ψ_0 — фоновая (начальная) амплитуда. Численное моделирование дает выходную амплитуду в диапазоне 2,5...4 при изменении мощности P более чем на порядок по величине (рис. 7, а). При этих амплитудах влияние нелинейности на эволюцию поля становится сильнее, чем туннелирование волнового поля в соседние волокна, а самоканалирование происходит в небольшом числе близко расположенных волокон. Схожий эффект проявляется и для двумерных решеток световодов [26].

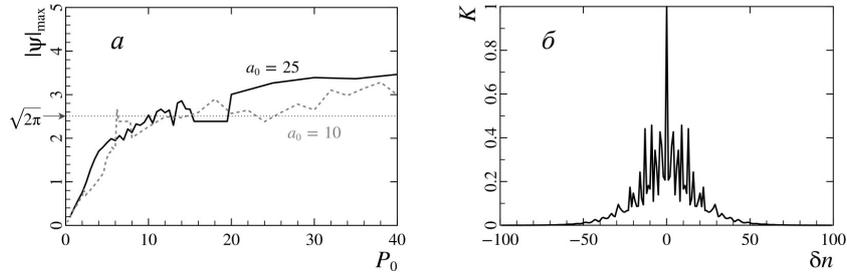


Рис. 7. Максимальная амплитуда волнового поля в зависимости от начальной мощности (а) и типичная автокорреляционная функция (б)

Наряду с филаментацией в центральной части, фокусировка продолжается на периферии волнового пучка. Это обуславливает некоторое расширение области, занятой интенсивным полем сразу после точки коллап-

са. Более того, наличие неустойчивости только в локализованной области приводит к возникновению сложной стохастической динамики поля для мощностей, значительно превышающих критическую. Для демонстрации этого вычислим автокорреляционную функцию

$$K(\delta n) = \sum (\psi_n \psi_{n+\delta n}^* + \psi_n^* \psi_{n+\delta n}), \quad (34)$$

которая характеризует пространственную когерентность волнового пучка. Рисунок 7, б показывает сильно локализованный максимум при $\delta n = 0$, что является очевидным признаком стохастической динамики.

Более того, данный эффект не зависит от вида нелинейности (фокусирующей или дефокусирующей) и проявляется всегда при превышении амплитудой широких волновых пучков амплитуды порядка $\sqrt{2\pi}$. В качестве примера на рис. 6, в приведена эволюция волнового пучка в среде с дефокусирующей нелинейностью:

$$i \frac{\partial \psi_n}{\partial z} + \psi_{n+1} + \psi_{n-1} - |\psi_n|^2 \psi_n = i\gamma \psi_n. \quad (35)$$

Видно, что при относительно малой амплитуде поля происходит распыление волнового пучка из-за дефокусирующей нелинейности. Одновременно с этим амплитуда поля нарастает экспоненциально при $\gamma > 0$. В результате при превышении амплитудой волнового поля значения, примерно равного $\sqrt{2\pi}$, происходит расслоение волнового пучка и появление стохастической динамики волнового поля.

Таким образом, массив световодов не подходит для сбора мощного волнового пучка в один световод. Проблема заключается в ограничении максимальной амплитуды (33), которая эффективно нарушает взаимодействие между соседними световодами при высоких амплитудах волнового поля и, соответственно, мощностях существенно больших, чем пороговая мощность P_{cr} .

Заключение

В работе рассмотрена нелинейная динамика волнового поля в одномерном массиве слабосвязанных пассивных и активных световодов. Показан режим самозахвата излучения в один из световодов системы при превышении пороговой мощности. В пассивных системах такой захват сопровождается заметным сбросом излучения. Наоборот, в активных системах с малым коэффициентом усиления сброс в значительной степени подавлен из-за плавности перестройки волновой структуры с ростом мощности излучения. Использование линейной фазовой модуляции в поперечном направлении (изменение угла инжекции) позволяет управлять положением захваченного излучения в решетке световодов. Наиболее эффективно данный способ работает для системы слабосвязанных *активных* световодов из-за плавности

входа в режим захвата. Определены зависимости характерных параметров (критической мощности, длины захвата и др.) от параметров задачи.

К сожалению, система эквидистантно расположенных слабосвязанных световодов оказалась плохо приспособленной к когерентной транспортировке широких волновых пучков с мощностью много больше пороговой мощности самозахвата излучения. Причина заключается в дискретности системы, когда излишне большая разница интенсивностей (больше 2π) в соседних световодах приводит к нелинейному сбою фазы и препятствует эффективному взаимодействию волновых полей между световодами. В результате амплитуда волнового поля становится ограниченной величиной порядка $\sqrt{2\pi}$, а динамика излишне интенсивного волнового поля — стохастической.

Работа выполнена в рамках госзадания (темы 0035-2014-0027, 0035-2018-0006).

Автор благодарен С. А. Скобелеву, А. Г. Литваку и В. А. Миронову за полезные замечания.

Литература

1. *Кившарь, Ю. С.* Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам / Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал. — М. : Физматлит, 2005. — 648 с.
2. *Nonlinearities in Periodic Structures and Metamaterials* / editors: C. Denz, S. Flach, Y. Kivshar. — Berlin ; Heidelberg : Springer, 2010. — 292 с.
3. *Скотт, Э.* Нелинейная наука. Рождение и развитие когерентных структур / Э. Скотт. — М. : Физматлит, 2007. — 560 с.
4. *Christodoulides, D. N.* Discretizing light behaviour in linear and nonlinear waveguide lattices / D. N. Christodoulides, F. Lederer, Y. Silberberg // *Nature*. — 2003. — Vol. 424. — P. 817—823.
5. *Christodoulides, D. N.* Discrete self-focusing in nonlinear arrays of coupled waveguides / D. N. Christodoulides, R. I. Joseph // *Opt. Lett.* — 1988. — Vol. 13. — P. 794—796.
6. *Jones, A. L.* Coupling of optical fibers and scattering in fibers / A. L. Jones // *J. Opt. Soc. Am.* — 1965. — Vol. 55. — P. 261—271.
7. *Lederer, F.* Discrete solitons in optics / F. Lederer, G. I. Stegeman, D. N. Christodoulides, G. Assanto, M. Segev, Y. Silberberg // *Phys. Reports*. — 2008. — Vol. 463. — P. 1—126.
8. *Lenz, G.* Bloch oscillations in an array of curved optical waveguides / G. Lenz, I. Talanina, C. M. de Sterke // *Phys. Rev. Lett.* — 1999. — Vol. 83. — P. 963.
9. *Truong, T. X.* Supercontinuum generation in both frequency and wavenumber domains in nonlinear waveguide arrays / T. X. Tran, D. C. Duong, F. Biancalana // *Phys. Rev. A*. — 2014. — Vol. 89. — Art. 013826.
10. *Aceves, A. B.* Energy localization in nonlinear fiber arrays: collapse-effect compressor / A. B. Aceves, G. G. Luther, C. de Angelis, A. M. Rubenchik, S. K. Turitsyn // *Phys. Rev. Lett.* — 1995. — Vol. 75. — P. 73.
11. *Rubenchik, A. M.* Nonlinear pulse combining and pulse compression in multi-core fibers / A. M. Rubenchik, I. S. Chekhovskoy, M. P. Fedoruk, O. V. Shtyrina, S. K. Turitsyn // *Optics Letters*. — 2015. — Vol. 40. — P. 721—724.

12. Маломед, Б. А. Контроль солитонов в периодических системах / Б. А. Маломед. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.
13. Minardi, S. Three-dimensional light bullets in arrays of waveguides / S. Minardi, F. Eilenberger, Y. V. Kartashov, A. Szameit, U. Röpke, J. Kobelke, K. Schuster, H. Bartelt, S. Nolte, L. Torner, F. Lederer, A. Tünnermann, T. Pertsch // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Vol. 105. — Art. 263901.
14. Eisenberg, H. S. Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays / H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, A. R. Boyd, J. S. Aitchison // Phys. Rev. Lett. — 1998. — Vol. 81. — Art. 3383.
15. Cheskis, D. Strong spatiotemporal localization in a silica nonlinear waveguide array / D. Cheskis, S. Bar-Ad, R. Morandotti, J. S. Aitchison, H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, D. Ross // Phys. Rev. Lett. — 2003. — Vol. 91. — Art. 223901.
16. Balakin, A. A. Collapse of the wave field in a one-dimensional system of weakly coupled light guides / A. A. Balakin, A. G. Litvak, V. A. Mironov, S. A. Skobelev // Phys. Rev. A. — 2016. — Vol. 94. — Art. 063806.
17. Maruno, K. Exact localized and periodic solutions of the discrete complex Ginzburg–Landau equation / K. Maruno, A. Ankiewicz, N. Akhmediev // Opt. Comm. — 2003. — Vol. 221. — P. 199—209.
18. Efremidis, N. K. Two-dimensional discrete Ginzburg–Landau solitons / N. K. Efremidis, D. N. Christodoulides, K. Hizanidis // Phys. Rev. A. — 2007. — Vol. 76. — Art. 043839.
19. Laedke, E. W. Instability of two-dimensional solitons in discrete systems / E. W. Laedke, K. H. Spatschek, V. K. Mezentsev, S. L. Musher, I. V. Ryshenkova, S. K. Turitsyn // JETP Lett. — 1995. — Vol. 62. — P. 677—684.
20. Kevrekidis, P. G. The discrete nonlinear schrödinger equation: mathematical analysis, numerical computations and physical perspectives / P. G. Kevrekidis. — Berlin : Springer, 2009. — 416 с.
21. Балакин, А. А. Самовоздействие бesselевых волновых пакетов в системе связанных световодов и формирование световых пульс / А. А. Балакин, В. А. Миронов, С. А. Скобелев // ЖЭТФ. — 2017. — Т. 151. — С. 59—66.
22. Kaup, D. J. Variational solutions for the discrete nonlinear Schrödinger equation / D. J. Kaup // Mathematics and Computer in Simulation. — 2005. — Vol. 69. — P. 322—333.
23. Литвак, А. Г. Особенности самовоздействия волновых пучков при наклонном падении на дискретную систему световодов / А. Г. Литвак, В. А. Миронов, С. А. Скобелев, Л. А. Смирнов // ЖЭТФ. — 2018. — Т. 153. — С. 28—44.
24. Quiroga-Teixeiro, M. L. Efficient soliton compression by fast adiabatic amplification / M. L. Quiroga-Teixeiro, D. Anderson, P. A. Andrekson, A. Berntson, M. Lisak // Opt. Soc. Am. B. — 1996. — Vol. 13. — P. 687—692.
25. Браун, О. М. Модель Френкеля — Конторовой. Концепции, методы, приложения / О. М. Браун, Ю. С. Кившарь. — М. : Физматлит, 2008. — 536 с.
26. Balakin, A. A. Self-compression of spatially limited laser pulses in a system of coupled light-guides / A. A. Balakin, A. G. Litvak, V. A. Mironov, S. A. Skobelev // Laser Phys. — 2018. — Vol. 28. — Art. 045401.

**РЕЗОНАНСНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ
КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ВОЛН
С ОПТИЧЕСКИМИ СОЛИТОНАМИ
И ГЕНЕРАЦИЯ СУПЕРКОНТИНУУМА
В НЕЛИНЕЙНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКНАХ
С ДИСПЕРСИЕЙ**

А. В. Юлин

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики, г. Санкт-Петербург

В настоящей работе рассмотрены локализованные волны в нелинейных оптических системах, где возможно их взаимодействие как между собой, так и с квазилинейными волнами малой интенсивности. Наличие дисперсии высших порядков делает возможным резонансное излучение и рассеяние линейных волн оптическими солитонами. Эти процессы приводят к генерации новых частот в спектре выходного излучения и к адиабатическому изменению интенсивности и частоты солитоноподобных оптических импульсов, распространяющихся в нелинейных световодах с дисперсией высших порядков. С практической точки зрения эффекты резонансного взаимодействия солитонов и линейных волн оказываются принципиально важными для понимания процесса генерации оптического суперконтинуума.

1. Введение

Формирование и динамика локализованных волн — предмет активного исследования на протяжении многих десятилетий. Одним из наиболее интересных и важных примеров локализованных волн являются распространяющиеся в нелинейных диэлектрических волноводах мощные оптические импульсы, дисперсионное расплывание которых полностью компенсируется их временной самофокусировкой (самомодуляцией), возникающей вследствие зависимости эффективного показателя преломления среды от интенсивности волны. В настоящей статье рассмотрены особенности динамики уединенных волн в системах с дисперсией высших порядков. Одной из причин интереса к таким оптическим солитонам стала роль, которую локализованные волны играют в генерации оптического суперконтинуума — когерентного оптического излучения с шириной спектра, превышающей одну октаву [1, 2].

Для анализа эволюции импульсов используется обобщенное нелинейное уравнение Шрёдингера

$$\partial_z A = i\bar{D}(i\partial_t)A + i[1 - \theta]|A|^2 A + i\theta A \int_0^\infty R(t - t')A(t', z)dt', \quad (1)$$

записанное для медленно меняющейся комплексной амплитуды поля. Такое приближение справедливо, когда нелинейность слабая и может быть учтена как малое возмущение [3]. Зависимость электрического поля в волне в точке Z выражается через ее амплитуду A как

$$\left| E = \operatorname{Re} A \left(\frac{\left[T - \frac{Z}{v_g} \right]}{\tau_0} \right) \exp(-i\omega_0 T + ik_0 Z) \right|,$$

где T — физическое время, Z — физическая пространственная координата, ω_0 — частота, близкая к частоте импульса, $k_0 = \beta(\omega_0)$ — волновой вектор и $v_g = [\partial_k \beta(\omega_0)]^{-1}$ — групповая скорость линейной волны с частотой ω_0 . Мы используем уравнение, записанное в безразмерных единицах, нормируя время на характерную длительность импульса τ_0 и длину распространения на $\xi = \frac{\tau_0^2}{|\beta_2(\omega_0)|}$, где $\beta_2(\omega) = \partial_\omega^2 \beta(\omega)$ — дисперсия групповых скоростей волн в волноводе.

Время t связано с физическим временем T формулой $t = \frac{\left[T - \frac{Z}{v_g} \right]}{\tau_0}$, где v_g — групповая скорость волны с частотой ω_0 . Оператор $\hat{D}(i\partial_t)$ описывает дисперсию линейных волн в волноводе и для широкого класса задач может быть аппроксимирован дифференциальным оператором $\hat{D}(i\partial_t) = \sum_{m=-2}^M \frac{\tau_0^{2-m} \partial_\omega^{m-2} \beta_2|_{\omega=\omega_0}}{m! |\beta_2(\omega_0)|} [i\partial_t]^m$, где параметр M задает порядок аппроксимации дисперсии.

Влияние кубической нелинейности учитывается вторым слагаемым в правой части (1). Знак перед нелинейностью выбран положительным, что соответствует росту эффективного показателя преломления оптоволокна с увеличением интенсивности света. Амплитуда поля нормирована на нелинейный параметр оптоволокна γ , показывающий величину нелинейного вклада в изменение фазы волны единичной мощности при распространении на единицу длины.

Для адекватного описания импульсов с характерной длительностью порядка ста фемтосекунд необходимо также учитывать рамановский сдвиг частоты, с хорошей точностью описываемый интегральным членом в уравнении (1), где $R(t) = \frac{[\tau_1 + \tau_2^2] \exp(-t/\tau_2) \sin(t/\tau_1)}{(\tau_1 \tau_2^2)}$. Для стеклянных волноводов типичные значения констант $\theta = 0,18$, $\tau_1 = 12,2 \text{ фс}/\tau_0$, $\tau_2 = 32 \text{ фс}/\tau_0$. Заметим, что здесь и далее используются круглые скобки только для обозначения аргумента функции, во всех других случаях используются квадратные скобки.

Для удобства изложения в дальнейшем будем употреблять для обозначения локализованной волны термин «солитон» в широком смысле, понимая под этим не только локализованное решение интегрируемой задачи, но и любую локализованную волну (волновую группу), описываемую в нашем случае обобщенным нелинейным уравнением Шрёдингера.

2. Черенковское излучение волн оптическими солитонами

В этой части рассмотрим излучение линейных волн солитонами в оптических волокнах с дисперсией высших порядков, приводящей к черенковскому синхронизму. В контексте оптических солитонов такой эффект был рассмотрен в работах [4—6]. Здесь мы кратко обсудим суть данного явления, пренебрегая влиянием рамановского сдвига частоты солитонов, и поэтому положим $\theta = 0$ в уравнении (1).

Рассмотрим задачу, когда дисперсия высших порядков мала и ее влияние можно учесть с помощью метода возмущений. Будем искать решение в виде односолитонного решения $A_s(z, t)$ невозмущенного нелинейного уравнения Шрёдингера и малой поправки $\varphi(z, t)$, $A(z, t) = A_s + \varphi$. Поскольку в качестве частоты ω_0 всегда может быть выбрана частота солитона, то без ограничения общности солитонное решение записывается в виде $A_s = F \exp(iqz)$, где $F = \sqrt{2q} \operatorname{sech}(\sqrt{2q}t) \exp(i\chi)$, $q > 0$ — параметр, определяющий амплитуду и длительность солитона, χ — фаза солитона. В выбранной системе отсчета частота решения A_s равна нулю. Уравнение для φ имеет вид

$$\partial_z \varphi - i\bar{D}(i\partial_t)\varphi - 2i|F|^2\varphi - iF^2 e^{2iqz}\varphi^* = P_1, \quad (2)$$

где $P_1 = i \left[\bar{D}(i\partial_t) - \frac{1}{2}\partial_t^2 \right] F e^{iqz}$.

Равенство (2) имеет нелокализованное решение в случае, если правая часть этого уравнения находится в резонансе с одной из нелокализованных собственных мод соответствующего однородного уравнения. Поскольку функция F локализована, то асимптотики нелокализованных собственных мод — это плоские волны, которые удобно характеризовать частотой δ и постоянной распространения \bar{D} . Очевидно, что зависимость $\bar{D}(\delta)$ совпадает с дисперсией линейных волн $D(\delta)$ в отсутствие солитона.

Заметим, что правая часть уравнения (2) локализована и может быть представлена в виде интеграла Фурье $P_1 = \int_{-\infty}^{\infty} p_\omega e^{-i\omega t} d\omega \cdot e^{iqz}$. Все гармоники в данном разложении имеют постоянную распространения, равную q . Из этого следует, что правая часть будет в резонансе с нелокализованной собственной модой, если выполнено резонансное условие

$$D(\delta_r) = q, \quad (3)$$

где δ_r — частота резонансной волны.

В случае если в выбранной системе координат солитон имеет ненулевую частоту δ_s , резонансное условие (3) должно быть переписано в виде

$$D(\delta_r) = q + D(\delta_s) + v_s[\delta_r - \delta_s], \quad (4)$$

где δ_s — частота солитона, а $v_s = \partial_\delta D|_{\delta=\delta_s}$. Физический смысл данного резонансного условия — это фазовый синхронизм между линейной модой

волновода и одной из пространственных гармоник солитона. Заметим, что путем соответствующей замены переменных условие (4) может быть преобразовано к виду, в котором оно формально совпадает с условием черенковского излучения, суть которого состоит в равенстве фазовой скорости резонансной волны скорости источника.

В качестве примера рассмотрим распространение мощных импульсов для случая, когда дисперсия может быть аппроксимирована кубическим полиномом $D(\delta) = -\frac{1}{2}\delta^2 + \varepsilon\delta^3$. На рисунке 1 приведены результаты численного моделирования уравнения (1) при $\varepsilon = -0,012$ и без учета вклада эффекта Рамана $\theta = 0$. В качестве начального условия был выбран импульс в форме точного солитонного решения с $q = 32$ и $\delta_s = 0$.

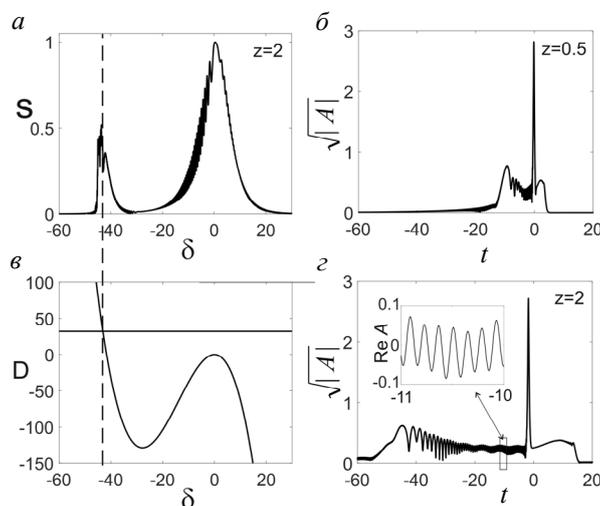


Рис. 1. Нормированный амплитудный спектр излучения при распространении на расстояние $z = 2$ (а). Зависимости поля A от времени для длин распространения $z = 0,5$ (б) и $z = 2$ (г). Чтобы сделать поле излучения более заметным на фоне мощного импульса, по вертикальной оси отложен квадратный корень модуля комплексной амплитуды A и графическое решение резонансного условия (4) (в)

Спектр исходного импульса имеет один симметричный максимум на нулевой частоте. После распространения на длину $z = 2$ спектр поля приобретает вид, показанный на рис. 1, а. Основная часть энергии сосредоточена в солитонном максимуме с частотами $\delta \approx 0$. В то же время видно формирование узкой спектральной линии с частотой $\delta \approx -42$, близкой к резонансной частоте, определяемой формулой (4). Графическое решение уравнения (4) для резонансной частоты приведено на рис. 1, в, где гори-

горизонтальная прямая линия соответствует правой, а сплошная кривая — левой части резонансного условия (4). Видно, что положение спектральной линии хорошо описывается резонансным условием (4).

Распределение поля для дистанций распространения $z = 0,5$ и $z = 2$ показано на рис. 1, б и г. Видно, что слева от солитона возникает излучение и при увеличении дистанции распространения длительность излученного волнового пакета увеличивается. Чтобы сделать излучение более заметным на фоне солитона, на рис. 1, б, г по вертикальной оси отложен квадратный корень амплитуды поля. Заметим, что к наблюдателю черенковское излучение приходит раньше солитона, т. е. фактически излучение возникает перед солитоном.

Интересно отметить, что с ростом длины распространения интенсивность черенковского излучения уменьшается и изменяется его частота. Данный эффект связан с тем, что излучение приводит к уменьшению энергии солитона и к изменению его частоты [7]. Можно показать [7], что интенсивность излучения пропорциональна интенсивности спектральной гармоники солитона, находящейся в резонансе с линейными волнами. Изменение частоты солитона приводит к увеличению разницы между частотой солитона и частотой резонансной волны. Кроме этого, поскольку длительность солитона обратно пропорциональна его интенсивности, то уменьшение энергии солитона приводит к сужению его спектра. И увеличение разности частот, и уменьшение спектральной ширины солитона приводят к уменьшению интенсивности излучения.

3. Резонансное рассеяние дисперсионных волн на солитонах

3.1. Теория

Рассмотрим процесс рассеяния волн малой интенсивности на солитонах, пренебрегая, как и в предыдущем разделе, эффектом Рамана и полагая $\theta = 0$. Для этого сначала рассмотрим взаимодействие солитонов с гармоническим излучением с частотой δ_{cw} [8]. Волновое число этого излучения, соответственно, равно $D_{cw} = D(\delta_{cw})$. Будем искать решение в виде $A = [F + a \exp(i[D_{cw} - q]z - i\delta_{cw}t) + \varphi] \exp(iqz)$, где $F \exp(iqz)$ — солитонная часть решения, $a \cdot \exp(iD_{cw}z - i\delta_{cw}t)$ — линейная волна накачки с амплитудой a , и φ — малая поправка, учитывающая поле, возникшее в результате взаимодействия солитона с линейной волной. Уравнение для малой поправки имеет вид

$$\partial_z \varphi - i\widehat{D}(i\partial_t)\varphi - 2i|F|^2\varphi - iF^2 e^{2iqz}\varphi^* = P_1 + P_2 + P_3, \quad (5)$$

где $P_2 = 2i|F|^2 a e^{iD_{cw}z - i\delta_{cw}t}$ и $P_3 = iF^2 a^* e^{-i(D_{cw} - 2q)z + i\delta_{cw}t}$. При выводе этого уравнения было использовано предположение о малости a и, соответственно, учтены только члены, линейные по амплитуде дисперсионной волны.

Первый член в правой части (5), как и раньше, описывает процесс черенковского излучения волн. Два же других члена отвечают за четырехволновое смешение солитона с квазилинейной волной, возникающее из-за кубической нелинейности. Важной особенностью является то, что P_2 не зависит от фазы солитона, и поэтому излучение, связанное с этим членом, тоже не зависит от фазы солитона. В дальнейшем будем называть это излучение фазово-независимым. В то же время излучение, возникающее из-за члена P_3 , зависит от фазы солитона, и мы будем называть его фазово-зависимым.

Как и при анализе черенковского излучения, разложим правую часть в интеграл Фурье по времени. Все временные гармоники члена P_2 имеют постоянную распространения D_{cw} , а гармоники члена P_3 , соответственно, $2q - D_{cw}$. Отсюда следует резонансное условие, которое можно записать в виде

$$D(\delta_r) = q + J[D_{cw} - q], \quad (6)$$

где $J = 0$ для черенковского резонанса, $J = 1$ для фазово-независимого и $J = -1$ для фазово-зависимого четырехволнового смешения. Резонансное условие (6) может быть переписано для случая ненулевой частоты солитона в такой форме:

$$D(\delta_r) = q + D(\delta_s) + v_s[\delta_r - \delta_s] + J[D_{cw} + v_s[\delta_{cw} - \delta_s] - D(\delta_s) - q]. \quad (7)$$

На рисунке 2 представлены результаты численного моделирования солитона, взаимодействующего с гармонической волной накачки [6]. В данном примере дисперсия аппроксимирована полиномом третьей степени: $D(\delta) = -\frac{1}{2}\delta^2 + \varepsilon\delta^3$, $\varepsilon = -0,015$. Графическое решение уравнения (7) для резонансного рассеяния показано на рис. 2, а для параметров $\delta_s = 0$, $q = 4$, $\delta_{cw} = -15$, $a = 0,1$. На рисунке 2, б показан спектр поля после распространения на дистанцию $z = 0,63$ при амплитуде волны накачки $a = 0,1$. Видно, что кроме очень слабого черенковского излучения происходит также значительно более сильное излучение волн, возникающих из-за нелинейного смешения гармоник солитона с волной накачки.

В рассмотренном примере для волны накачки существует три канала резонансного рассеяния: один фазово-зависимый и два фазово-независимых. Однако при данных параметрах эффективным является только один фазово-независимый канал рассеяния. Именно такое фазово-независимое рассеяние и показано на рис. 2, а, в. Случай, когда доминирует фазово-зависимый резонанс, показан на рис. 2, б, г для параметров $\delta_s = -4$, $\delta_{cw} = -15$, $a = 0,3$ и длины распространения $z = 3,6$.

В случае коротких импульсов наличие рамановского сдвига частоты солитона влияет на процесс рассеяния, приводя к уширению спектральной линии рассеянного излучения и к изменению ее интенсивности. Результа-

ты расчета для типичных параметров с учетом рамановской нелинейности показаны на рис. 2, в, г штриховыми линиями.

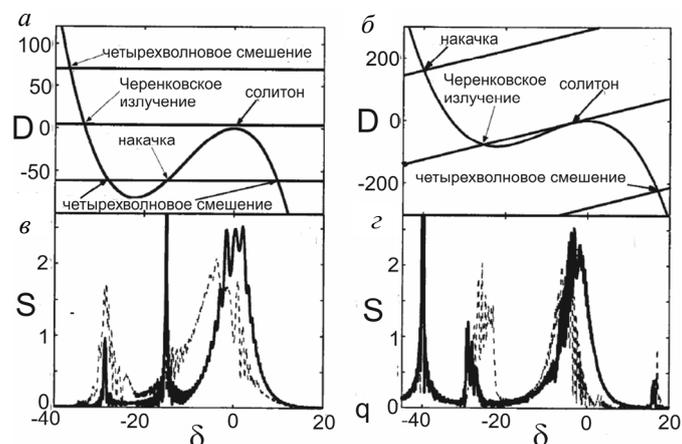


Рис. 2. Графические решения резонансного условия для резонансного рассеяния линейных волн на солитонах (а, б) и нормированный спектр излучения после распространения в нелинейном оптоволокне (в, г). Сплошными линиями показаны спектры, полученные без учета рамановского сдвига частоты солитонов. Штриховыми линиями показаны результаты расчетов при учете эффекта Рамана для реальных волокон. Для моделирования были взяты следующие параметры волокна: $\beta_2 = -47$ пс²/км, $\partial_\omega\beta_2 = -0,7$ пс³/км и нелинейный параметр $\gamma = 0,05$ Вт⁻¹ · м⁻¹ на частоте $\omega_0 = 2\pi \cdot 240$ ТГц. Пиковая мощность солитона $W_s = 225$ Вт, мощность непрерывной накачки $W_{cw} = 0,12$ Вт для (а), (в) и $W_{cw} = 1,2$ Вт для (б), (г). Длины распространения равны соответственно $z = 2,8$ м и $z = 16$ м. Время нормировано на $\tau_0 = 170$ фс

Имеет смысл кратко обсудить, почему рассеяние, как правило, идет практически полностью только в один канал. Без ограничения общности анализ можно провести для покоящегося солитона с $\delta_s = 0$. Как говорилось выше, фазово-независимое рассеяние генерируется членом P_2 , стоящим в правой части уравнения (5), для малой поправки ϕ . Из выражения для P_2 следует, что рассеянное излучение возникает благодаря смещению падающего излучения и наведенного солитоном поля поляризации, которое пропорционально $|F|^2$. Частота резонансной гармоники этого поля поляризации может быть легко найдена из условия фазового синхронизма и равна $\delta_m = \delta_r - \delta_{cw}$. Естественно, что эффективность рассеяния пропорциональна спектральной интенсивности резонансной гармоники, поэтому для получения оценки эффективности рассеяния надо оценить интенсивность резонансной гармоники.

Для достаточно больших частот спектр солитона спадает экспоненциально, и если δ_m много больше спектральной ширины солитона, то интенсивность резонансной гармоники может быть оценена как $\sim \exp\left(-\frac{|\delta_m|}{\sqrt{q}}\right) = \exp\left(-\frac{|\delta_r - \delta_{cw}|}{\sqrt{q}}\right)$. Это означает, что интенсивность рассеяния экспоненциально быстро спадает при увеличении разности частот падающей и резонансно рассеянной волны. Аналогично можно показать, что эффективность фазово-зависимого рассеяния может быть оценена как $\sim \exp\left(-\frac{|\delta_r + \delta_{cw}|}{\sqrt{q}}\right)$. Из этого легко видеть, что хотя в рассеянии волн принимают участие все резонансы, но эффективное рассеяние может идти только в один канал. Детальное рассмотрение этого вопроса можно найти в работе [9].

3.2. Эксперимент

Результаты экспериментального наблюдения [10] такого рассеяния представлены на рис. 3 в виде XFROG-диаграмм (cross-correlated frequency resolved optical gating). Суть этого метода состоит в том, что исследуемое излучение смешивается с коротким опорным сигналом в кристалле с квадратичной нелинейностью. Далее измеряется спектр сигнала на суммарной частоте и строится зависимость этого спектра от времени задержки опорного импульса. Для удобства частота сигнального импульса может вычитаться из полученных спектров. Такая методика фактически является инструментальным аналогом оконного преобразования Фурье и позволяет получить информацию о распределении в импульсе излучения с различными длинами волн. Разрешение по частоте и времени определяется длительностью опорного импульса, и, естественно, чем лучше разрешение по частоте, тем хуже разрешение по времени. Для сравнения эксперимента с численным моделированием XFROG-диаграммы могут быть посчитаны по зависимости $A(t)$ следующим образом:

$$U(\delta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t)g(t - \tau)\exp(i\delta t)dt,$$

где $g(t)$ — опорный сигнал. В обсуждаемых ниже XFROG-диаграммах длительность опорного сигнала была взята близкой к длительности солитонов. Для удобства сравнения с экспериментом данные численного моделирования переведены в физические переменные и для спектральной характеристики сигнала вместо частот использованы длины волн.

Экспериментальные измерения [10] проводились с использованием фотонно-кристаллического волокна длиной 90 см. Волокно имело дисперсию $\beta_2 = -72$ пс²/км и $\beta_3 = \partial_{\omega}^3 \beta(\omega) = -0,65$ пс³/км на длине волны 1425 нм, значение нелинейного параметра волокна $\gamma = 0,1$ Вт⁻¹ · м⁻¹. В качестве источника импульсного излучения использовался оптический параметри-

ческий генератор с рабочей длиной волны 1425 нм и длительностью импульсов 100 фс. Источником постоянного света был лазер с длиной волны 1546 нм и мощностью 0,1 Вт.

XFROG-диаграммы, полученные путем численного моделирования, на рис. 3, *a—в* показаны для пиковых мощностей оптических импульсов 1,7; 4,4 и 7 КВт. Исходный импульс не является точным солитоном и в процессе распространения распадается на солитон и остаточное излучение. При малой мощности 1,7 КВт наблюдается формирование солитона, но его взаимодействие с излучением слабо. При более высокой мощности импульсов (4,4 КВт) солитон становится более интенсивным и, соответственно, его длительность сокращается, а спектральная ширина увеличивается. При таких мощностях появляется генерация нового излучения и одновременно происходит локальное обеднение волны непрерывной накачки (см. подписи на рис. 3, *д*). Таким образом, можно утверждать, что взаимодействие с солитоном приводит к преобразованию исходного излучения в излучение с другой длиной волны. Заметим, что время τ на XFROG-диаграммах — это время относительной задержки прихода излучения в точку наблюдения.

С помощью резонансного условия (7) были вычислены длины волн, в которые должно идти фазово-независимое рассеяние волны накачки. Поскольку частота солитонного импульса меняется при распространении в волокне из-за эффекта Рамана, то и рассеяние исходной волны на разных длинах распространения идет в разные частоты. Поэтому рассеянное излучение должно заполнять определенный диапазон длин волн. Зная исходную и конечную частоты солитонного импульса, с помощью резонансного условия (7) можно определить границы диапазона, в который может идти рассеяние. Этот диапазон показан на рис. 3, *б* вертикальными линиями. Видно, что рассеяние действительно происходит именно в этот диапазон частот.

При дальнейшем увеличении мощности импульса начинается черенковское излучение. Из-за сдвига частоты солитона черенковское излучение тоже происходит в некоторый интервал частот; границы этого интервала, определенные с помощью резонансного условия (4), обозначены на рис. 3, *в* вертикальными линиями. Для данного волокна диапазон частот, в котором происходит черенковское излучение, перекрывается диапазоном частот, в который идет рассеяние волны непрерывной накачки. Поэтому при больших мощностях импульсной накачки рассеянное излучение не видно на фоне существенно более мощного черенковского излучения.

Экспериментальные XFROG-диаграммы для тех же мощностей импульсного излучения показаны на рис. 3, *г—е*. Видно, что экспериментальные результаты прекрасно совпадают с численными. Для того чтобы убедиться, что излучение, показанное на рис. 3, *д*, действительно возника-

ет из-за смещения исходной волны с солитоном, были проведены эксперименты по распространению солитонов в отсутствие непрерывного излучения. Соответствующие XFROG-диаграммы приведены на рис. 3, *жс—и*. На рис. 3, *з* видно, что рассеянное излучение в этом случае отсутствует. В то же время черенковское излучение по-прежнему происходит при больших мощностях солитонов (рис. 3, *и*).

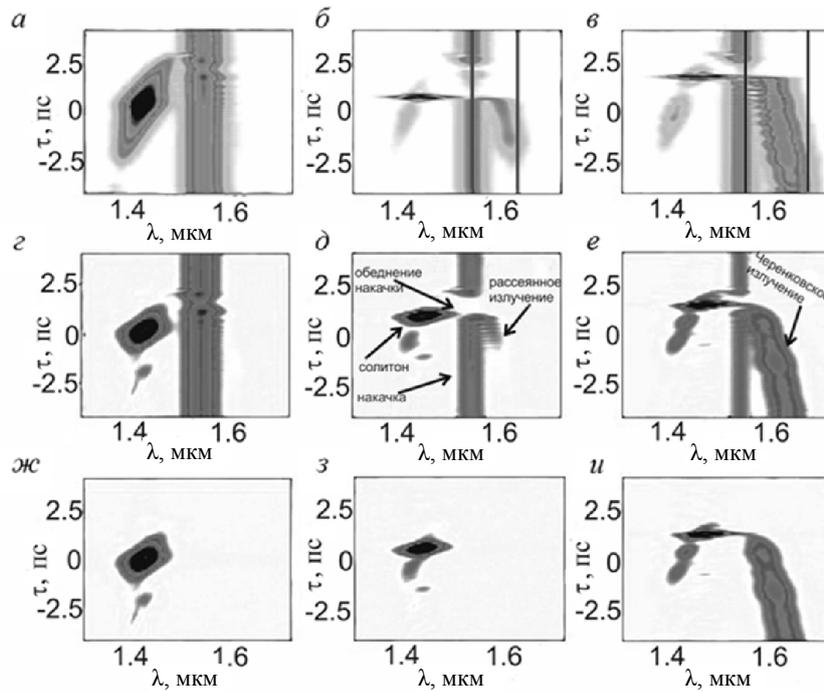


Рис. 3. XFROG-диаграммы, иллюстрирующие процесс фазово-независимого рассеяния линейных волн на солитонах разной интенсивности: *a — в* — диаграммы, построенные по результатам численного моделирования; *г — е* — экспериментально измеренные диаграммы; *жс — и* — экспериментально измеренные диаграммы в случае, когда на вход волокна подается только импульсная накачка. Мощность импульсной накачки 1,7 кВт (*a, г, ж*), 4,4 кВт (*б, д, з*) и 7 кВт (*в, е, и*)

В заключение следует добавить, что в работе [10] экспериментально наблюдалось также рассеяние линейных волн на солитонах в случае, когда солитоны и рассеиваемые волны имели ортогональную поляризацию. Фазово-зависимое четырехволновое смещение было экспериментально обнаружено и исследовано в работе [11].

4. Захват излучения между солитонами

Как мы видели выше, взаимодействие линейных волн с солитонами приводит к тому, что амплитуда падающей волны сильно уменьшается, но появляется рассеянная волна. При этом в диапазоне параметров, обеспечивающих высокую эффективность рассеяния, групповые скорости падающего и рассеянного излучения в системе отсчета, связанной с солитоном, имеют разный знак. Таким образом, можно говорить о том, что происходит отражение линейных волн от солитона и солитон в каком-то смысле выполняет роль нелинейного зеркала [12].

Это означает, что если коэффициент отражения достаточно большой, то излучение может быть эффективно захвачено между двумя солитонами подобно тому, как излучение удерживается между зеркалами в резонаторе Фабри — Перо [13]. В то же время взаимодействие солитона с излучением меняет частоту и, следовательно, скорость солитона. В результате наличие дисперсионных волн, захваченных между солитонами, может приводить к эффективному межсолитонному взаимодействию на дистанциях, много больших, чем характерный размер солитонов [12]. Теоретическому рассмотрению таких эффектов будет посвящена данная часть статьи.

Сначала рассмотрим динамику пакета линейных волн, распространяющихся в оптоволокне между двумя солитонами. Частота волнового пакета выбрана таким образом, чтобы обеспечить эффективное отражение этих волн от солитона. В этом случае особенности дисперсии приводят к тому, что излучение с частотой ω , движущееся быстрее солитонов, рассеивается в излучение с частотой ω' , движущееся медленнее солитонов. Затем перерассеянный волновой пакет сталкивается со вторым солитоном и рассеивается в волновой пакет с частотой ω'' , движущийся быстрее солитонов. Из резонансного условия (7) следует выполнение условия $\omega = \omega''$ в предположении, что солитоны одинаковы и их параметры не меняются из-за взаимодействия с излучением. Таким образом, процесс перерассеяния является периодическим, если не изменяются характеристики отражающих солитонов. На практике такое периодическое рассеяние удастся эффективно организовать только с помощью фазово-независимого взаимодействия.

Однако из-за того, что под воздействием линейных волн частота солитонов меняется, после двукратного отражения от солитонов частота волнового пакета сдвигается на некоторую величину. При этом частоты солитонов изменяются таким образом, что они начинают двигаться навстречу друг другу [12], как показано на рис. 4. Видно, что излучение оказывается захваченным между двумя солитонами и что при каждом акте отражения скорость солитонов меняется.

Интересно сравнить динамику солитонов при наличии и отсутствии захваченных линейных волн. На рисунке 4, а штриховыми линиями пока-

заны траектории солитонов при отсутствии захваченного излучения. Параметры солитонов выбраны такими, что черенковское излучение очень слабо, и поэтому солитоны движутся с почти постоянными скоростями.

На рисунке 4, б показана эволюция спектра захваченного излучения. Видно, что каждый акт столкновения излучения с солитоном приводит к скачкообразному изменению частоты захваченного излучения. Вследствие изменения частот солитонов периодичность изменения спектра излучения нарушена, и взаимодействие с солитонами приводит к модификации спектра захваченных волн.

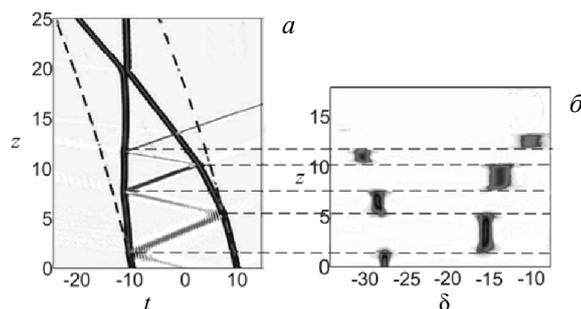


Рис. 4. Эволюция поля (а) и спектра (б) импульса при распространении в оптоволокне. Параметры волокна $\epsilon = -0,015$, $\theta = 0$. Начальное распределение поля взято в виде двух одинаковых солитонов с частотами $\delta_s = 0$ и параметрами $q = 12,5$ и волнового пакета $a_{cw} \operatorname{sech}(-t/t_0) \exp(i\delta_{cw}t)$, где $a_{cw} = 0,25$ — амплитуда, $t_0 = 3$ — длительность и $\delta_{cw} = -28$ — частота линейного излучения

Из-за того, что солитоны движутся навстречу друг другу, происходит сжатие дисперсионных волн, захваченных между солитонами. В какой-то момент частота захваченного излучения сдвигается настолько, что эффективное отражение такого излучения от солитонов становится невозможным и происходит его высвечивание. Далее движущиеся навстречу друг другу солитоны сталкиваются и проходят друг через друга. Таким образом, наличие захваченных волн приводит к эффективному взаимодействию между солитонами на расстоянии, много большем, чем характерный размер самих солитонов, когда их непосредственное взаимодействие экспоненциально слабо.

Заметим, что модификация спектра захваченного излучения происходит независимо от причины, из-за которой солитоны движутся навстречу друг другу [12]. На рисунке 5 показан случай, когда спектрально узкий пакет излучения захвачен между двумя сталкивающимися солитонами. При выбранных параметрах влияние захваченного излучения на динамику солитонов мало, но многократное рассеяние захваченного излучения приводит к существенному уширению его спектра (рис. 5, б).

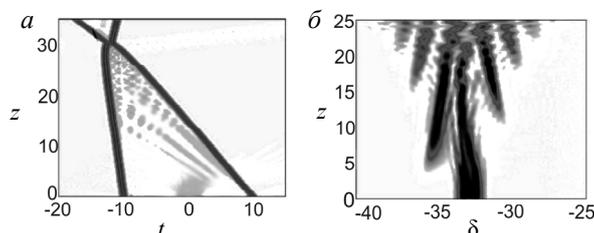


Рис. 5. Эволюция поля (а) и спектра (б) импульса при распространении в оптоволокне. Параметры волокна $\epsilon = -0,015$, $\theta = 0$. Начальное распределение поля взято в виде двух солитонов с частотами $\delta_{s1} = -0,3$, $\delta_{s2} = 0,3$ и параметром $q = 18$. Распределение линейных волн задано в виде $a_{cw} \text{sech}(-t/t_0) \exp(i\delta_{cw}t + ivt^2)$, где $a_{cw} = 0,15$, $t_0 = 3$, $\delta_{cw} = -33$ и $v = 0,1$

Теперь рассмотрим, как резонансное перерасеяние волн на солитонах влияет на генерацию оптического суперконтинуума [13]. Для этого проведем численное моделирование процесса генерации излучения мощным коротким импульсом. Исходный импульс запускается на частоте, для которой $\beta_2 < 0$ и, следовательно, возможно формирование солитонов. При этом частота выбирается близкой к частоте нулевой дисперсии, что обеспечивает эффективную резонансную генерацию волн солитонами. Такой метод является одним из наиболее распространенных способов генерации оптического суперконтинуума.

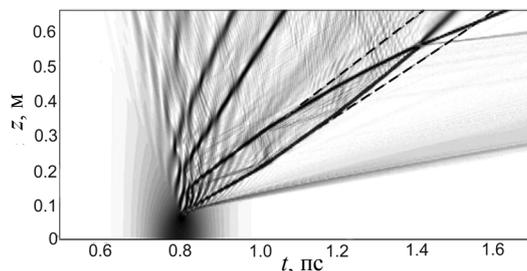


Рис. 6. Эволюция интенсивности оптического поля при распространении импульса в стеклянном оптоволокне с параметрами волокна $\beta_2 = -2,1$, $\beta_3 = -5,24 \times 10^{-3}$ пс³/км и $\gamma = 1,5 \cdot 10^{-5}$ Вт⁻¹ · м⁻¹. Штриховые линии показывают траектории солитонов в случае, если при $z = 0,16$ м отфильтровать линейные волны, захваченные между солитонами. Начальное распределение поля взято в виде импульса с пиковой мощностью 8 МВт, длительностью 90 фс и длиной волны 800 нм

Типичная картина эволюции такого импульса показана на рис. 6 [14]. Сначала исходный импульс распадается на несколько солитонов и на сложный набор квазилинейных волн малой интенсивности. В дальнейшем

солитоны распространяются и некоторые из них начинают притягиваться друг к другу вследствие взаимодействия, опосредованного линейными волнами. В численном эксперименте можно отфильтровать излучение, захваченное между двумя солитонами. После такой фильтрации столкновений солитонов происходить не будет, солитоны будут распространяться по траекториям, показанным на рис. 6 штриховыми линиями.

Таким образом, анализ взаимодействия между солитонами и линейными волнами объясняет частые столкновения солитонов и уширение спектра излучения.

5. Заключение

Подводя итоги, можно заключить, что рассмотренное резонансное взаимодействие дисперсионных волн с солитонами играет важную роль в динамике света в нелинейных оптоволоконках. Одним из результатов данного взаимодействия является модификация и уширение спектра излучения, поэтому рассмотренные эффекты представляют интерес с точки зрения такого практически важного применения оптических солитонов, как генерация суперконтинуума.

Настоящая статья не имеет цели дать сколько-нибудь полный обзор по способам генерации и применению оптического суперконтинуума (заинтересованный читатель может найти больше информации в работах [1—3, 15] и цитированной там литературе), но заметим, что в первую очередь суперконтинуум оказался востребованным в метрологии, где частотная гребенка позволила не только достичь потрясающей точности, но и проводить измерения в широком диапазоне частот, а не только вблизи опорной частоты. Часть Нобелевской премии 2005 года была присуждена Т. Хэншу и Дж. Холлу за работы по прецизионной лазерной спектроскопии, которые включали развитие техники измерений, основанных на оптической частотной гребенке. Оптический суперконтинуум также находит применение в области телекоммуникаций и других областях, где есть потребность в когерентном излучении в широком диапазоне частот.

В случае если суперконтинуум генерируется мощными фемтосекундными импульсами с частотой, лежащей в области аномальной дисперсии, то процесс генерации может быть упрощенно представлен в следующем виде. Сначала исходный импульс разваливается на несколько солитонов и остаточное излучение. Затем начинается черенковское излучение и перерассеяние на солитонах как остаточного, так и сгенерированного черенковского излучения.

Естественно, что черенковское излучение приводит к уширению спектра волнового пакета, распространяющегося в оптоволокне. Перерассеяние дисперсионных волн тоже ведет к генерации новых частот и к обогащению спектра излучения. Особенно активно этот процесс идет, если

линейные волны захвачены между солитонами. Очень важный вклад вносит также каскадное рассеяние, ведущее к уширению спектра в сторону коротких длин волн [16]. Этот процесс может происходить, если частота линейных волн больше частоты солитона и лежит в области нормальной дисперсии.

Кратко физику каскадного перерассеяния можно описать следующим образом. Солитон, взаимодействуя с дисперсионной волной, рассеивает ее в волну с другой частотой так, что скорость рассеянной волны становится больше скорости солитона. Затем, по мере распространения, рамановский сдвиг частоты у солитона приводит к уменьшению его частоты и, следовательно, к увеличению скорости. Поэтому солитон в какой-то момент догоняет рассеянное ранее излучение и снова рассеивает его. Далее процесс повторяется. Таким образом возникает каскадное перерассеяние дисперсионных волн. При каждом рассеянии линейных волн их частота увеличивается. Интересно, что при этом перерассеиваемое излучение в среднем движется со скоростью, равной скорости солитона.

Рассмотренные выше эффекты черенковского излучения и рассеяния дисперсионных волн оптическими солитонами являются важными элементами для понимания динамики интенсивного излучения в нелинейных оптических волокнах, позволяя, например, определить частоты генерируемых линейных волн или объяснить взаимное притяжение солитонов на расстоянии, много большем, чем их характерный размер.

В заключение заметим, что рассмотренные эффекты могут наблюдаться не только в оптических волноводах, но и в других системах, где солитоны могут резонансно взаимодействовать с линейными волнами, например в системах, описываемых уравнением Кортевега — де Фриза с дисперсией высших порядков.

Литература

1. *Dudley, J. M.* Supercontinuum generation in photonic crystal fiber / J. M. Dudley, G. Genty, and S. Coen // *Rev. Mod. Phys.* — 2006. — Vol. 78. — P. 1135.
2. *Skryabin, D. V.* Looking at a soliton through the prism of optical supercontinuum / D. V. Skryabin and A. V. Gorbach // *Rev. Mod. Phys.* — 2010. — Vol. 82. — P. 1287.
3. *Агравал, Г.* Нелинейная волоконная оптика : пер. с англ. / Г. Агравал. — М. : Мир, 1996.
4. *Wai, P. K. A.* Nonlinear pulse propagation in the neighborhood of the zero-dispersion wavelength of monomode optical / P. K. A. Wai, C. R. Menyuk, Y. C. Lee, H. H. Chen // *Opt. Lett.* — 1986. — Vol. 11. — P. 464—466.
5. *Akhmediev, N.* The Cherenkov radiation emitted by solitons in optical fibers / N. Akhmediev, M. Karlsson // *Phys. Rev. A.* — 1995. — Vol. 51. — P. 2602—2607.
6. *Захаров, В. Е.* Оптические солитоны и квазисолитоны / В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов // *ЖЭТФ.* — 1998. — Т. 113, вып. 5. — С. 1892—1914.

7. *Biancalana, F.* Theory of the soliton self-frequency shift compensation by the resonant radiation in photonic crystal fibers / F. Biancalana, D. V. Skryabin, A. V. Yulin // *Phys. Rev. E.* — 2004. — Vol. 70. — Art. 016615.
8. *Yulin, A. V.* Four-wave mixing of linear waves and solitons in fibers with higher-order dispersion / A. V. Yulin, D. V. Skryabin, and P. S. J. Russell // *Opt. Lett.* — 2004. — Vol. 29. — P. 2411.
9. *Skryabin, D. V.* Theory of generation of new frequencies by mixing of solitons and dispersive waves in optical fibers / D. V. Skryabin and A. V. Yulin // *Phys. Rev. E.* — 2005. — Vol. 72. — Art. 016619.
10. *Efimov, A.* Interaction of an optical soliton with a dispersive wave / A. Efimov, A. V. Yulin, D. V. Skryabin, J. C. Knight, N. Joly, F. G. Omenetto, A. J. Taylor, and P. Russell // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Vol. 95. — P. 213902.
11. *Efimov, A.* Phase-sensitive scattering of a continuous wave on a soliton / A. Efimov, A. J. Taylor, A. V. Yulin, D. V. Skryabin, J. C. Knight // *Opt. Lett.* — 2006. — Vol. 31. — P. 1624.
12. *Yulin, A. V.* Soliton interaction mediated by cascaded four wave mixing with dispersive waves / A. V. Yulin, R. Driben, B. A. Malomed, D. V. Skryabin // *Opt. Express.* — 2013. — Vol. 21. — P. 14481.
13. *Voytova, T.* Emulation of Fabry–Perot and Bragg resonators with temporal optical solitons / T. Voytova, I. Oreshnikov, A. V. Yulin, and R. Driben // *Opt. Lett.* — 2016. — Vol. 41. — P. 2442.
14. *Driben, R.* Trapping of light in solitonic cavities and its role in the supercontinuum generation / R. Driben, A. V. Yulin, A. Efimov, B. A. Malomed // *Opt. Express.* — 2013. — Vol. 21. — P. 19091.
15. *Femtosecond optical frequency comb technology* / editors J. Ye and S. T. Cundiff. — Springer, 2005.
16. *Gorbach, A. V.* Light trapping in gravity-like potentials and expansion of supercontinuum spectra in photonic-crystal fibres / A. V. Gorbach, D. V. Skryabin // *Nature Photonics.* — 2007. — Vol. 1. — P. 653.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ГИБРИДНЫХ СТРУКТУР «СВЕРХПРОВОДНИК — ФЕРРОМАГНЕТИК»

А. В. Самохвалов

Институт физики микроструктур РАН, г. Нижний Новгород

Цель статьи — дать представление об основных механизмах (орбитальном и обменном) взаимодействия двух макроскопических квантовых явлений: сверхпроводимости и магнетизма, лежащих в основе сверхпроводящей спинтроники. Описаны различные проявления конкуренции этих типов упорядочения на мезоскопических масштабах в окрестности границы сверхпроводник — ферромагнетик, в результате которой формируется новое состояние с необычными свойствами. Обсуждаются возможности управления сверхпроводящим транспортом при воздействии на спин электрона.

Сверхпроводимость (S) и (ферро)магнетизм (F) являются двумя макроскопическими квантовыми явлениями, и интригующая проблема их конкуренции и сосуществования изучается в течение нескольких десятилетий, начиная с пионерской работы [1] лауреата Нобелевской премии (2003 г.) академика Виталия Гинзбурга. В последнее время активно развивается новое направление физики сверхпроводимости, связанное с экспериментальными и теоретическими исследованиями гибридных систем «сверхпроводник — ферромагнетик» (SF). Это направление исследований объединяет в себе сверхпроводимость и спинтронику и уже получило название — сверхпроводящая спинтоника. Термином «спинтоника» (spintronics, spin-electronics) традиционно называют сравнительно новый раздел квантовой электроники, занимающийся изучением спинового токопереноса (спин-поляризованного транспорта) в твердом теле. В отличие от традиционной электроники, которая использует воздействие на заряд электрона, в спинтонике изучаются эффекты взаимодействия собственных магнитных моментов электронов (спинов) с электромагнитными полями и разрабатываются спин-электронные приборы и устройства, основанные на управлении движением электронов путем воздействия на их спиновый момент [2]. Сверхпроводящие спин-поляризованные токи сочетают макроскопическую квантовую когерентность с микроскопическим обменным взаимодействием, спиновой селективностью и спиновым переносом. Интерес к таким исследованиям вызван как ожиданиями, что конкуренция различных типов упорядочения на мезоскопических масштабах создаст в окрестности SF-границы новое состояние с необычными свойствами, так и возможностью управления сверхпроводящим транспортом при воздействии на спин электрона.

Магнитные свойства сверхпроводников

Обычная сверхпроводимость (о ней в дальнейшем пойдет речь) предполагает образование из электронов куперовских пар, в которых импульсы и спины электронов направлены в разные стороны. Это так называемое синглетное спаривание, при котором суммарный спин куперовской пары равен нулю. Характерный пространственный размер такой сверхпроводящей корреляции — длина когерентности ξ . При этом в спектре элементарных возбуждений формируется изотропная по импульсу сверхпроводящая щель Δ (параметр порядка). Однако явление сверхпроводимости не сводится только к нулевому сопротивлению при низких температурах, а проявляется, прежде всего, в том, как образец реагирует на внешнее магнитное поле. Взаимный антагонизм сверхпроводимости и магнетизма очевидным образом следует из фундаментального свойства сверхпроводящего состояния, получившего название эффекта Мейснера — Оксенфельда (магнитное поле выталкивается из объема сверхпроводника). Таким образом, в массивном сверхпроводнике магнитная индукция B всегда равна нулю, $B = 0$ — это уравнение состояния, а переход в сверхпроводящее состояние — фазовый переход. На самом деле, магнитное поле спадает до нуля в тонком приповерхностном слое толщиной λ , называемой глубиной проникновения магнитного поля. Связь между магнитным полем $\mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}$ и током \mathbf{j} описывается уравнением Лондонов [2]

$$\mathbf{j} = -\frac{e^2 n_s}{m c} \mathbf{A} = -\frac{c}{4\pi\lambda^2} \mathbf{A}, \quad (1)$$

в котором n_s — плотность сверхпроводящих электронов, а m — масса электрона с зарядом e , c — скорость света, \mathbf{A} — векторный потенциал магнитного поля. Полагая $n_s > 0$, $m > 0$, получаем, что уравнение (1) описывает диамагнитный сверхток, приводящий к экранировке внешнего поля в соответствии с эффектом Мейснера. Разрушение сверхпроводимости в магнитном поле происходит из-за фазового перехода первого ($\lambda/\xi < 1/\sqrt{2}$) или второго ($\lambda/\xi > 1/\sqrt{2}$) рода. В последнем случае возникает диапазон магнитных полей ($H_{c1} < H < H_{c2}$), при которых сверхпроводимость разрушается частично, а магнитное поле проникает в сверхпроводник в виде вихрей Абрикосова [3], несущих квант магнитного потока $\Phi_0 = \pi\hbar c / e$.

Механизмы конкуренции сверхпроводимости и магнетизма

Сверхпроводимость и ферромагнетизм — это два типа упорядочения, возникающие в металлах при низких температурах. При низких темпера-

турах в ферромагнетике существует магнитный порядок, такой, что большинство спинов электронов направлено в одну сторону и есть отличная от нуля намагниченность. Поэтому любой магнитный материал представляет собой естественный источник магнитного поля, создаваемого намагниченностью. Взаимодействие куперовских пар с векторным потенциалом магнитного поля формирует неоднородное распределение фазы сверхпроводящего параметра порядка $\Delta(\mathbf{r}) = |\Delta| \exp(i\varphi(\mathbf{r}))$ и индуцирует экранирующие вихревые токи, разрушающие сверхпроводимость. В этом суть электромагнитного (или орбитального) механизма конкуренции сверхпроводимости и магнетизма [1]. Легко оценить характерное поле H_{orb} , при котором сверхпроводимость будет подавлена орбитальным эффектом: электроны с противоположными импульсами, образующие куперовскую пару, движутся по разным орбитам, что препятствует их спариванию. Критерием разрушения такой сверхпроводящей корреляции будет равенство магнитной длины a_H и длины когерентности ξ :

$$a_H = \sqrt{\hbar c / eH} \sim \xi, \quad H_{orb} \sim \Phi_0 / \pi \xi^2 \sim H_{c2}. \quad (2)$$

Второй, обменный, механизм подавления синглетной сверхпроводимости обусловлен взаимодействием спина электронов с внешним магнитным полем H или внутренним обменным полем ферромагнетика h (парамагнитный эффект) [4]. В соответствии с этим механизмом однородное сверхпроводящее состояние становится невозможным, если эффективное магнитное поле ферромагнетика h / μ_B (μ_B — магнетрон Бора) превышает предельное значение H_{par} (поле парамагнитного предела), определяемое критерием Клогстона — Чандрасекара [5, 6],

$$H_{par} = \Delta_0 / \sqrt{2} \mu_B. \quad (3)$$

При $H \sim H_{par}$ энергия зеемановского расщепления спиновых подзон оказывается порядка сверхпроводящей щели Δ_0 при $T = 0$ и сильная спиновая поляризация электронного газа разрушает сверхпроводимость. Для типичных значений Δ_0 поле H_{par} составляет сотни тесла. Сравнение этих двух механизмов разрушения сверхпроводимости,

$$H_{orb} / H_{par} \sim \Delta_0 / \varepsilon_F \ll 1, \quad (4)$$

показывает, что в большинстве случаев преобладает орбитальный механизм. Исключение составляют материалы с большой эффективной массой электронов [7] или квазидвумерные слоистые сверхпроводники в продольном по отношению к слоям магнитном поле [8], когда орбитальный механизм оказывается подавленным. Типичное значение энергии обменного поля h , действующего на спин электрона в ферромагнетике, составляет сотни

миллиэлектронвольт (мэВ) и заметно превышает характерную температуру сверхпроводящего перехода $T_{c0} \sim \Delta_0 \sim 1$ мэВ. Условие $\hbar \gg \theta \gg \Delta_0$, где $\theta \approx \hbar^2 / \epsilon_F$ — температура Кюри ферромагнетика, делает, как правило, невозможным сосуществование синглетной сверхпроводимости и ферромагнетизма в объемных системах из-за парамагнитного эффекта [9]. Однако совсем недавно был создан новый класс ферромагнитных сверхпроводников, у которых $\theta \sim T_{c0}$, и впервые удалось наблюдать распределение магнитного потока как в доменной структуре, так и в вихрях Абрикосова, что свидетельствует о существовании узкого диапазона температур, когда сверхпроводимость имеется в присутствии ферромагнетизма [10].

Хорошо известный антагонизм ферромагнетизма и синглетной сверхпроводимости может быть частично ослаблен благодаря взаимной подстройки магнитной и сверхпроводящей подсистем. При этом формируется неоднородное сверхпроводящее состояние Ларкина — Овчинникова — Фульде — Феррелла (ЛОФФ) [11, 12], для которого характерно появление куперовских пар с ненулевым суммарным импульсом и осцилляции сверхпроводящего параметра порядка в реальном пространстве. Альтернативный вариант — это возникновение неоднородного магнитного состояния, когда характерный масштаб магнитной неоднородности существенно превышает атомный, но в то же время мал по сравнению с размером куперовской пары ξ [13]. Экспериментально реализуемой системой для изучения неоднородного сверхпроводящего состояния чаще всего служат гетерогенные гибридные SF-структуры, в которых источники этих двух конкурирующих электронных фаз разнесены в пространстве и два различных состояния встречаются только в окрестности SF-границы (см. обзоры [14, 15]). Простейшая гибридная структура — это SF-бислои, состоящий только из двух слоев: ферромагнетика и сверхпроводника (рис. 1, *a*). Различают два типа гибридных SF-структур по тому, какой из двух механизмов взаимодействия сверхпроводимости и ферромагнетизма является определяющим. При отсутствии изоляционного барьера между сверхпроводником и ферромагнитным металлом, препятствующего попаданию куперовских пар в область обменного поля, становится существенным так называемый эффект близости [16]. Фундаментальным выражением совместного влияния эффекта близости и обменного взаимодействия между F- и S-подсистемами является возникновение особенной квантово-механической интерференции, в результате которой в ферромагнетике возникают сверхпроводящие корреляции, амплитуда которых затухает и осциллирует в направлении перпендикулярном SF-границе [14, 17—19]. Исключение обменного механизма за счет использования ферромагнитных изоляторов и/или формирования сильного барьера на границе означает отсутствие куперовских пар в F-слое. В этих условиях взаимодействие сверхпроводящих электронов и магнитных моментов ферромагнетика происхо-

дит только за счет возбуждения экранирующих сверхтоков при орбитальном эффекте [1].

Электромагнитное взаимодействие

Характерная особенность гибридных FS-структур с электромагнитным взаимодействием состоит в том, что электрический контакт между сверхпроводником S и ферромагнитным металлом F отсутствует, а взаимодействие возникает из-за полей рассеяния ферромагнетика. Это означает, что ферромагнетик должен быть либо структурирован (например, одна или несколько магнитных частиц), либо неоднородно намагничен (например, находиться в доменном состоянии). В простейшем случае планарных гибридных структур, при наличии компоненты намагниченности, перпендикулярной плоскости системы, магнитные моменты соседних доменов противоположно направлены и формируют сильно неоднородное магнитное поле (рис. 1, а). При определенных условиях в окрестности доменной стенки возникают наиболее благоприятные условия для формирования сверхпроводящего зародыша и появления сверхпроводимости.

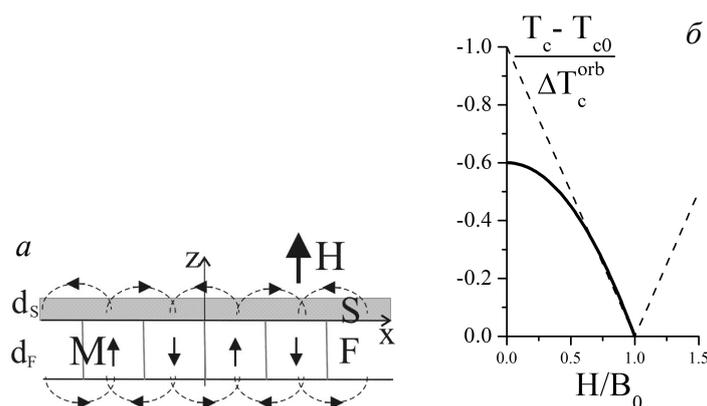


Рис. 1. SF-бислой с электромагнитным взаимодействием (а). Тонкий слой изолятора между S- и F-металлами исключает электрический контакт между слоями. Типичный вид фазовой диаграммы на плоскости (H, T) SF-бислоя с толстым слоем ферромагнетика (б). Сплошной линией показана зависимость критической температуры появления локализованного сверхпроводящего зародыша над доменной стенкой. Пунктиром показана аналогичная зависимость для зародыша, возникающего далеко от доменной стенки. Здесь $B_0 = 4\pi M$ — индукция, создаваемая доменом с намагниченностью M , $\Delta T_c^{orb} = T_{c0} B_0 / H_{c2}$ — характерный сдвиг критической температуры сверхпроводника T_{c0} в поле B_0 из-за орбитального эффекта [22]

Это явление получило название «доменная сверхпроводимость» и было изучено первоначально на примере ферромагнитных сверхпроводников в работах [20, 21], а потом и для гибридных SF-структур в [22]. Описывается оно линеаризованным уравнением Гинзбурга — Ландау, которое в этом случае есть уравнение Шрёдингера с потенциалом, формируемым совместно полем доменов и внешним магнитным полем. Типичная фазовая диаграмма доменной сверхпроводимости показана на рисунке 1, б. Когда нет внешнего магнитного поля, температура возникновения локализованного зародыша сверхпроводящей фазы в присутствии доменов T_c выше, чем для однородно намагниченного ферромагнетика. Поэтому, изменяя положение протяженной доменной стенки, можно управлять положением сверхпроводящего канала. Подробный обзор работ, посвященных изучению доменной сверхпроводимости и родственных эффектов, можно найти в [23].

Сверхпроводящий эффект близости

В структурах, где есть хороший электрический контакт между сверхпроводником и нормальным (несверхпроводящим) металлом, важен эффект близости [16], который определяет поведение таких гибридных систем. Вследствие эффекта близости сверхпроводящие корреляции проникают в область нормального металла с коэффициентом диффузии D_N на глубину порядка длины когерентности $\xi_N = \sqrt{\hbar D_N / 2\pi T_{c0}}$ (от десятка нанометров до нескольких микрометров) и генерируют индуцированную сверхпроводимость в этом материале, т. е. слой нормального металла вблизи границы приобретает сверхпроводящие свойства (рис. 2, а). Это позволяет подстраивать сверхпроводящие свойства структуры в целом (изменять энергетическую щель Δ (параметр порядка) в спектре одночастичных возбуждений и критическую температуру T_c), изменяя толщину слоев и прозрачность границы между ними. Бислой «сверхпроводник — нормальный металл» (SN) является простейшей сверхпроводящей гибридной структурой с эффектом близости. Критическая температура сверхпроводящего перехода SN-бислоя монотонно уменьшается с увеличением толщины слоя нормального металла d_N .

Физика эффекта близости становится существенно богаче, если речь идет о контакте сверхпроводника и ферромагнетика [14, 15]. Куперовская пара, попавшая в ферромагнетик, начинает разрушаться обменным полем. Однако в некотором слое вблизи SF-границы сверхпроводящие корреляции еще сохраняются, формируя необычное сверхпроводящее состояние. Как и в случае SN-структур, сверхпроводящие свойства, наведенные из-за эффекта близости, будут спадать при удалении от SF-границы. В то же время в SF-структурах спадание парной волновой функции Ψ будет сопровождаться знакопеременными осцилляциями (рис. 2, б) [17—19].

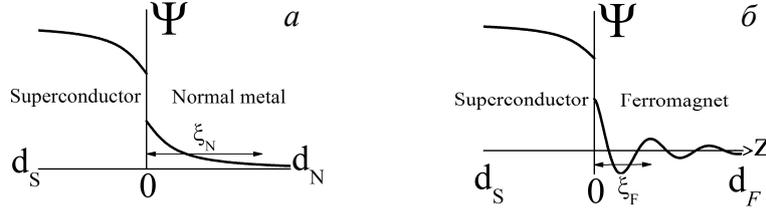


Рис. 2. Качественное поведение парной волновой функции вблизи границы сверхпроводник — нормальный металл (а) и сверхпроводник — ферромагнетик (б). Скачок волновой функции на границе предполагает присутствие потенциального барьера между металлами

Для описания гибридных SF-структур из металлов с диффузным типом проводимости (приближение «грязного» предела [4]) наиболее естественным представляется использование квазиклассических уравнений Узаделя [24] для усредненной по поверхности Ферми аномальной функции Грина $F(z, \omega)$. В случае слоистых систем линейаризованное относительно потенциала спаривания $\Delta(z)$ одномерное уравнение Узаделя имеет вид

$$-\frac{\hbar D}{2} \frac{\partial^2 F(z, \omega)}{\partial z^2} + (|\omega| + i h \operatorname{sgn} \omega) F(z, \omega) = \Delta(z), \quad (5)$$

где $\omega = (2n+1)\pi T$ — мацубаровские частоты для температуры T , \hbar — энергия обменного поля, z — координата поперек слоев, $D = V_F l / 3$ — коэффициент диффузии, определяемый скоростью на поверхности Ферми V_F и длиной свободного пробега l , причем потенциал спаривания $\Delta(z)$ отличен от нуля только в S-слое. В ферромагнетике с сильным однородным обменным полем $\hbar \gg T_{c0}$ уравнение (5) имеет очевидное решение, затухающее при $z > 0$,

$$F(z, \omega > 0) = A \exp\left(-\frac{1+i}{\xi_F} z\right), \quad F(z, \omega < 0) = F^*(z, \omega > 0), \quad (6)$$

которое определяет структуру синглетных сверхпроводящих корреляций вблизи SF-границы:

$$\Psi \sim \sum_{\omega} F(z, \omega) \sim \Delta \exp(-z/\xi_F) \cos(z/\xi_F). \quad (7)$$

Пространственные масштабы осцилляций и затухания парной волновой функции Ψ в ферромагнетике в простейшем случае совпадают и определяются характерной длиной когерентности $\xi_F = \sqrt{\hbar D_F / h}$, зависящей от энергии обменного поля \hbar и коэффициента диффузии в ферромагнитном

металле $D = D_F$. Типичное значение ξ_F лежит в пределах от 1 нм (сильные ферромагнетики типа Ni, Co) до 5–10 нм (слабые ферромагнитные растворы типа CuNi, PdNi).

Осцилляции волновой функции в ферромагнитном барьере приводят к интересным эффектам, возникающим при соизмеримости периода осцилляций и толщины F-слоя ($d_F \sim \xi_F$). Так, например, критическая температура сверхпроводящего перехода SF-бислоя немонотонно зависит от толщины ферромагнетика d_F [25]. В более сложных, джозефсоновских SFS-структурах осцилляции волновой функции в F-барьере могут сопровождаться формированием необычного π -состояния [26], при котором устанавливается равновесная разность фаз π между фазами параметра порядка двух сверхпроводников и возникает инверсия джозефсоновского тока [17, 18, 27, 28] (см. также обзор [29]). На рисунке 3 качественно показано распределение парной волновой функции в обычном джозефсоновском SFS-переходе (0 типа) и π -контакте. Переход между 0- и π -состояниями SFS-контакта сопровождается, как правило, немонотонной зависимостью критического тока SFS-перехода I_c (I_c — максимальный ток, протекающий через джозефсоновский переход без диссипации) от температуры T и толщины барьера d_F [17, 18], что было неоднократно подтверждено экспериментально [27, 28]. Подобные джозефсоновские инверторы фазы могут использоваться в качестве элементов сверхпроводящей логики, в том числе в сверхпроводниковых кубитах [29].



Рис. 3. Качественное поведение парной волновой функции в джозефсоновском SFS-контакте: *a* — переход 0-типа; *b* — переход π -типа

Особенности эффекта близости на SF-границе при соизмеримости между периодом осцилляций парной волновой функции в F-слое и его толщиной d_F приводят также к аномальному поведению экранирующих свойств гибридных FS-структур: немонотонной зависимости эффективной глубины проникновения магнитного поля от толщины F-слоя [30–32], парамагнитному эффекту Мейснера [33] и ЛОФФ-неустойчивости в плоскости слоев [34]. Указанные эффекты становятся особенно существенными в случае тонких S-слоев (порядка сверхпроводящей длины когерентно-

сти ξ_s), когда возможно заметное подавление сверхпроводящего параметра порядка Δ в S-слоях из-за эффекта близости.

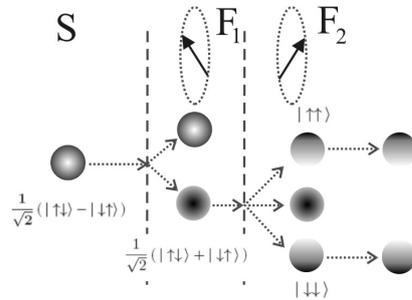
Эффект дальнего действия в SF-структурах

Представления о сильном подавлении синглетной сверхпроводимости в ферромагнетике, однако, противоречат целому ряду экспериментальных наблюдений аномально большой длины затухания сверхпроводящих корреляций в F-металле (см. обзор [35]). Такой аномальный эффект близости и дальнее действие — распространение сверхпроводящих корреляций на аномально большие расстояния в ферромагнитных металлах — обычно объясняют возбуждением триплетных пар (суммарный спин пары $\Sigma = 1$) из электронов с одинаковой проекцией спинов на ось квантования [33, 36]. Для реализации этого механизма дальнего действия важным является вопрос о способе конверсии куперовских пар из электронов с $\Sigma = 0$ и противоположными проекциями спинов $\sigma_z^{(1)} = -\sigma_z^{(2)}$, образующихся в синглетном сверхпроводнике, в триплетные пары с проекцией суммарного спина $\Sigma_z = \sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)} = \pm 1$ в ферромагнетике. Приведенное выше решение (7) $\Psi \sim \text{Re} F(z, \omega)$ (для действительных Δ) описывает распределение синглетных пар у SF-границы ферромагнетика с однородным обменным полем. Спиновая часть волновой функции таких пар антисимметрична по перестановке частиц и имеет вид $(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) / \sqrt{2}$. При этом $\text{Im} F(z, \omega)$ определяет амплитуду спин-триплетной компоненты $T_0 = (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) / \sqrt{2}$ («короткий триплет») вынужденных сверхпроводящих корреляций, которые имеют нулевую проекцию спина на ось квантования $\Sigma_z = 0$. Подобные триплетные корреляции ведут себя в ферромагнетике аналогично синглетным парам (амплитуда T_0 осциллирует и затухает на масштабе ξ_{SF}) и поэтому не могут быть ответственны за эффект дальнего действия.

Однако если ферромагнетик неоднородно намагничен, то из-за вращения оси квантования в пространстве возникает прецессия спинов электронов, которая вызывает взаимную трансформацию различных компонент триплета $\hat{T} = (T_{+1}, T_0, T_{-1}) = (|\uparrow\uparrow\rangle, (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) / \sqrt{2}, |\downarrow\downarrow\rangle)$ друг в друга. Это приводит к появлению компонент $T_{+1} = |\uparrow\uparrow\rangle$ и $T_{-1} = |\downarrow\downarrow\rangle$ («длинный триплет») с ненулевой проекцией суммарного спина $\Sigma_z = \pm 1$. Поскольку обменное поле и парамагнитный эффект не оказывают существенного влияния на триплетные пары $T_{\pm 1}$, такие сверхпроводящие корреляции за-

метно затухают в «грязном» ферромагнетике на том же расстоянии $L \sim \xi_N \gg \xi_F$ от FS-границы, что и в нормальном (неферромагнитном) металле с коэффициентом диффузии D_F . Это приводит к эффекту дальнего действия в SF-структурах с неоднородным обменным полем [36] и сильному эффекту Джозефсона в SFS-структурах с композитным ферромагнитным слоем, толщина которого заметно превышает характерный масштаб ξ_F [37, 38]. Для эффективной генерации «длинной» триплетной компоненты оптимальной является неоднородность обменного поля с характерным пространственным масштабом ξ_F . Заметная конверсия в триплетные пары с $\Sigma_z = \pm 1$ возможна также на спин-активной FS-границе, при пересечении которой меняется спин электрона [35, 36].

Рис. 4. Трансформация куперовской пары из спин-синглетного состояния $(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$ в спин-триплетные состояния $|\uparrow\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\downarrow\rangle$ в ферромагнетике F_1F_2 с неоднородным обменным полем



На рисунке 4 схематично показан механизм преобразования куперовской пары из спин-синглетного состояния $(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$ в триплетные $T_{+1} = |\uparrow\uparrow\rangle$ и $T_{-1} = |\downarrow\downarrow\rangle$ в SF_1F_2 -структуре с неоднородным обменным полем.

Фазовые переходы в гибридных SF-структурах

Чаще всего для определения критической температуры T_c фазового перехода гибридной SF-структуры в сверхпроводящее состояние используют измерения температурной зависимости сопротивления или магнитной восприимчивости образца. Также весьма удобным методом изучения различных фазовых переходов, вызванных взаимодействием двух конкурирующих параметров порядка, является исследование экранирующих свойств гибридных SF-структур с эффектом близости [30—32]. В этом случае в качестве измеряемой величины выступает эффективная глубина проникновения магнитного поля Λ , получающаяся при усреднении локальной глубины проникновения $\lambda(r)$ по объему структуры V , если

толщина структуры меньше лондоновской глубины проникновения магнитного поля:

$$\Lambda^{-1} = \frac{1}{V} \int d\mathbf{r} \lambda^{-1}(\mathbf{r}) \sim \Delta. \quad (8)$$

Переход гибридной SF-структуры из нормального состояния в сверхпроводящее является фазовым переходом второго рода. Характерная особенность такого перехода — немонотонная зависимость критической температуры T_c от толщины F-слоя d_F , которая возникает из-за пространственных осцилляций амплитуды парной волновой функции в ферромагнетике. Аналогичное (немонотонное) поведение демонстрирует и зависимость эффективной глубины проникновения магнитного поля $\Lambda(d_F)$ от толщины d_F [30, 31]. Для определения зависимости T_c от параметров SF-структур из металлов с диффузным типом проводимости решения уравнения Узалея (5) $F_S(z, \omega)$ и $F_F(z, \omega)$ для S- и F-слоев соответственно следует дополнить уравнением самосогласования в сверхпроводнике

$$\Delta(z) = \pi T_c \rho \sum_{\omega} F_S(z, \omega), \quad (9)$$

где ρ — константа связи, равная нулю в ферромагнетике. На рисунке 5 приведен фрагмент типичной фазовой диаграммы на плоскости (d_F, T_c) для трехслойной джозефсоновской SFS-структуры с тонкими сверхпроводящими слоями (толщина слоя d_s порядка сверхпроводящей длины

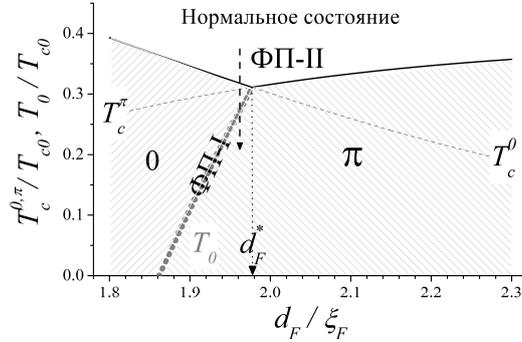


Рис. 5. Типичный вид фазовой диаграммы трехслойной SFS-структуры с тонкими S-слоями на плоскости (d_F, T_c) . Критическая температура фазового перехода второго рода (ФП-II) немонотонно зависит от толщины F-слоя d_F . Переход первого рода (ФП-I) из состояния 0 в состояние π при $T = T_0$ сопровождается скачком параметра порядка: $\Delta_{\pi}(T_0) < \Delta_0(T_0)$ — и эффективной глубины проникновения Λ

когерентности ξ_s) в окрестности критической толщины F-слоя d_F^* , соответствующей переходу между 0- и π -состояниями (см. рис. 3). Немонотонное поведение $T_c(d_F)$ в этом случае связано с изменением основного состояния структуры: при $d_F < d_F^*$ критическая температура 0-фазы выше и $T_c(d_F) = T_c^0$ — структура переходит из нормального состояния в сверхпроводящее 0-типа. При больших значениях $d_F > d_F^*$ в результате фазового перехода второго рода в структуре устанавливается неоднородное π -состояние с нетривиальной разностью фаз π между параметрами порядка в S-слоях.

Особенный интерес с точки зрения эксперимента представляет реализация перехода между 0- и π -состояниями при изменении температуры T гибридной системы. В случае тонких S-слоев и при отсутствии барьера на SF-границе эффект близости может вызвать заметное подавление сверхпроводящего параметра порядка $\Delta(T)$ в сверхпроводниках. Поскольку подавление сверхпроводимости из-за эффекта близости зависит от распределения парной волновой функции в F-слое, равновесное значение сверхпроводящего параметра порядка $\Delta_{0,\pi}$ в S-слоях для 0- и π -состояний будет отличаться: $\Delta_0(T) \neq \Delta_\pi(T)$. Фазовый переход первого рода между 0- и π -состояниями структуры происходит при $T = T_0(d_F) < T_c^\pi < T_c^0$ и определяется из условия равенства энергий 0- и π -состояний. Переход сопровождается резким увеличением эффективной глубины проникновения магнитного поля $\Lambda \sim 1/\Delta(T)$ и ухудшением экранирующих свойств структуры при понижении температуры T [39], которое наблюдалось в экспериментах [32, 40].

Парамагнитный эффект и ЛОФФ-неустойчивость в слоистых FS-структурах

При исследовании экранирующих свойств гибридных SF-структур проявляются особенности эффекта близости между сверхпроводником и ферромагнетиком, в частности присутствие в ферромагнетике вынужденных триплетных корреляций. При температуре T , близкой к критической T_c , эффективная глубина проникновения магнитного поля Λ (8) определяется средней плотностью синглетных $\langle n_s \rangle$ и триплетных $\langle n_t \rangle$ пар [35]: $\Lambda^{-2} \sim \langle n_s \rangle - \langle n_t \rangle$. Параметр Λ^{-2} обуславливает аналогичное (1) соотношение между средней по структуре плотностью экранирующего тока \mathbf{J} и векторным потенциалом \mathbf{A} внешнего магнитного поля: $\mathbf{J} = -c \mathbf{A} / (4\pi\Lambda^2)$.

Поскольку поведение синглетных и триплетных сверхпроводящих корреляций в ферромагнетике существенно отличается, сверхток $\mathbf{j} = -e^2(n_s - n_t)\mathbf{A}/(mc)$ может стать локально парамагнитным в тех местах, где триплетные корреляции преобладают ($n_s < n_t$).

Принципиальный вопрос о знаке величины Λ^{-2} до последнего времени оставался открытым, и появилась серия работ, где обсуждалась возможность отрицательных значений этой величины в гибридных SF-структурах [33]. В таких случаях принято говорить об аномальном эффекте Мейснера, имея в виду, что сверхток оказывается парамагнитным и не экранирует внешнее магнитное поле. Решение этой важной проблемы было получено авторами работы [34], которые показали, что в условиях аномального эффекта Мейснера однородное вдоль слоев сверхпроводящее состояние становится неустойчивым и в плоскости слоев возникает дополнительная ЛОФФ-модуляция $\Delta \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_\parallel)$, восстанавливающая диамагнитный отклик SF-структуры в целом. Порог подобной ЛОФФ-неустойчивости во внешнем поле, параллельном плоскости структуры, определяется условием $1/\Lambda = 0$. На рисунке 6 качественно показан вид зависимости Λ^{-2} и оптимального масштаба продольной ЛОФФ-модуляции $|\mathbf{k}|\xi_F$ от параметра $p = (d_s/\xi_F)(\sigma_S/\sigma_F)$, обусловленного толщиной S-слоя d_s и соотношением проводимостей S- и F-металлов σ_S и σ_F в нормальном состоянии [34]. При $p < p_c$ осцилляции парной волновой функции в ферромагнетике из-за эффекта близости в поперечном направлении сопровождаются продольной ЛОФФ-модуляцией сверхпроводящего параметра порядка Δ в SF-бислое. Таким образом, ухудшение экранирующих свойств гибридных структур «сверхпроводник — ферромагнетик» ($\Lambda \rightarrow \infty$) при понижении температуры T

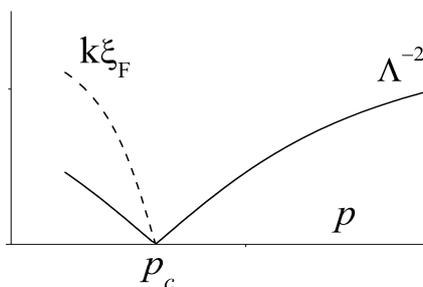


Рис. 6. Качественный вид зависимости эффективной глубины проникновения магнитного поля Λ^{-2} и оптимального масштаба продольной ЛОФФ-модуляции $k\xi_F$ в SF-бислое с тонким S-слоем ($d_s < \xi_S$) от параметров SF-структуры [34]

может служить предвестником формирования ЛОФФ-состояния в гибридных SF-структурах. Заметим, что продольная ЛОФФ-модуляция при наличии дополнительного сильного спин-орбитального взаимодействия в ферромагнетике может сопровождаться возникновением спонтанных токов, локализованных вблизи SF-границы и текущих в противоположных направлениях в S- и F-слоях так, чтобы полный ток в основном состоянии гибридной структуры был равен нулю [41, 42].

Электродинамика гибридных SF-структур с неодносвязной геометрией

Несомненное преимущество слоистых SF-структур с диффузным типом проводимости, о которых здесь шла речь, — возможность сравнительно легко контролировать толщину ферромагнитной прослойки. Это обстоятельство важно с точки зрения эксперимента, поскольку как характерный масштаб затухания, так и период осцилляций парной волновой функции в «грязном» ферромагнетике определяются длиной когерентности ξ_F , обычное значение которой лежит в пределах от 1 до 10 нм.

Более сложные гибридные SF-структуры с эффектом близости и неодносвязной геометрией (полый сверхпроводящий цилиндр с ферромагнитной сердцевинкой, сверхпроводящее кольцо на ферромагнитной подложке) были теоретически изучены в работах [43, 44] для случая однородно намагниченного ферромагнетика. Характерное проявление неодносвязности сверхпроводника — это классический эффект Литтла — Паркса [45, 46]: периодические осцилляции критической температуры сверхпроводящего перехода T_c при изменении потока Φ внешнего магнитного поля H , пронизывающего структуру. Критическая температура $T_c(\Phi)$ перехода полого тонкостенного сверхпроводящего цилиндра радиусом R в вихревое состояние с орбитальным моментом L определяется потоком $\Phi = \pi R^2 H$ через полость [2]:

$$\frac{T_{c0} - T_c^L(\Phi)}{T_{c0}} \sim \frac{\xi l}{R^2} \left(L - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2, \quad T_c(\Phi) = \max_L T_c^L(\Phi). \quad (10)$$

Эффект Литтла — Паркса представляет собой чрезвычайно чувствительный экспериментальный метод исследования интерференционных явлений в сверхпроводящих системах и описывает переходы между состояниями с различной завихренностью L из-за орбитального механизма подавления сверхпроводимости внешним магнитным полем.

Кратко обсудим на примере полого сверхпроводящего цилиндра с ферромагнитной сердцевинкой (рис. 7) влияние обменного механизма на

эффект Литтла — Паркса. Отличительная особенность такой гибридной структуры — возможность возбуждения в ней индуцированных обменным взаимодействием вихревых состояний с отличным от нуля орбитальным моментом $L \neq 0$, даже если внешнее магнитное поле отсутствует. Такие сверхпроводящие состояния с неоднородным распределением фазы параметра порядка могут вызвать появление спонтанных сверхтоков, которые увеличивают свободную энергию системы из-за орбитального эффекта. Конкуренция между обменным и орбитальным эффектами приводит к последовательным переключениям между состояниями с различным орбитальным моментом L при увеличении радиуса R_f ферромагнитного цилиндра [43]. При приложении внешнего магнитного поля H эффект близости и обменное поле ферромагнетика приводят к нарушению строгой периодичности осцилляций $T_c(\Phi)$ (10) и модуляции амплитуды этих осцилляций. На рисунке 8 показан пример зависимости $T_c(\Phi)$ для тонкостенного сверхпроводящего цилиндра, внутренняя полость которого заполнена ферромагнитным металлом.

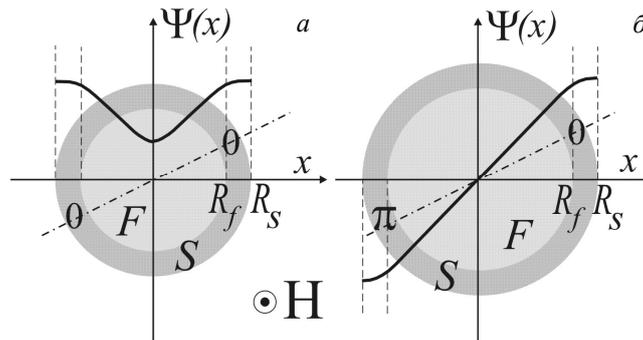


Рис. 7. Качественный вид распределения парной волновой функции $\Psi(r, \theta) = |\Psi| \exp(iL\theta)$ в SF-цилиндре: a — $L=0$, $\Psi(r, \theta) = \Psi(r, \theta + \pi)$; b — $L=1$, $\Psi(r, \theta) = -\Psi(r, \theta + \pi)$. Фаза $\Psi(r, \theta)$ отличается на π в диаметрально противоположных точках

Заметим, что зависимость парной волновой функции Ψ и сверхпроводящего параметра порядка Δ от азимутального угла θ вида $\Delta \sim \exp(iL\theta)$ для вихревого состояния с $L \neq 0$ описывает дополнительную фазовую модуляцию вдоль SF-границы, т. е. напоминает ЛОФФ-модуляцию в плоскости слоев, изученную в работе [34] для слоистых структур.

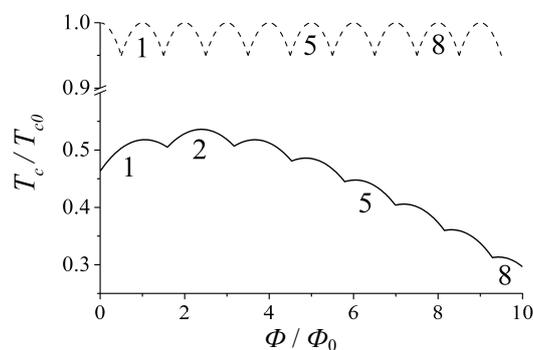


Рис. 8. Типичные зависимости критической температуры T_c SF-цилиндра от потока Φ внешнего магнитного поля через F-сердцевину. Для сравнения пунктиром показана зависимость $T_c(\Phi)$ полого S-цилиндра (10). Цифры — значение орбитального момента L , соответствующее данному участку кривой

В заключение отметим, что успехи современной технологии приводят к постоянному расширению класса гибридных систем «сверхпроводник — ферромагнетик». Прогресс последних лет в области нанотехнологии позволил наблюдать ряд интересных явлений, часть из которых отражена в этом обзоре. Исследования конкуренции сверхпроводимости и магнетизма нельзя назвать завершёнными, эти работы активно продолжаются.

Работа выполнялась при финансовой поддержке РФФИ (гранты 17-52-12044 и 18-02-00390).

Литература

1. Гинзбург, В. Л. Ферромагнитные сверхпроводники / В. Л. Гинзбург // ЖЭТФ. — 1956. — Т. 31. — С. 202—210.
2. Ферт, А. Происхождение, развитие и перспективы спинтроники / А. Ферт // УФН. — 2008. — Т. 178. — С. 1337—1348.
3. Абрикосов, А. А. О магнитных свойствах сверхпроводников второй группы / А. А. Абрикосов // ЖЭТФ. — 1957. — Т. 32. — С. 1442—1452.
4. Сан-Жам, Д. Сверхпроводимость второго рода / Д. Сан-Жам, Г. Сарма, Е. Томас. — М.: Мир, 1970. — 364 с.
5. Clogston, A. M. Upper limit for the critical field in hard superconductors / A. M. Clogston // Phys. Rev. Lett. — 1962. — Vol. 9. — P. 266—267.
6. Chandrasekhar, B. S. A note on the maximum critical field of high-field superconductors / B. S. Chandrasekhar // Appl. Phys. Lett. — 1962. — Vol. 1. — P. 7—8.
7. Matsuda, Y. Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov state in heavy fermion superconductors / Y. Matsuda, H. Shimahara // J. Phys. Soc. Jpn. — 2007. — Vol. 76. — P. 051005.

8. *Uji, S.* Vortex dynamics and the Fulde–Ferrell–Larkin–Ovchinnikov state in a magnetic-field-induced organic superconductor / S. Uji, T. Terashima, M. Nishimura [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 97. — P. 157001.
9. *Буздин, А. И.* Магнитные сверхпроводники / А. И. Буздин, Л. Н. Булаевский, М. Л. Кулич, С. В. Панюков // *УФН.* — 1984. — Т. 144. — С. 597—641.
10. *Stolyarov, V. S.* Domain Meissner state and spontaneous vortex-antivortex generation in the ferromagnetic superconductor $\text{EuFe}_2(\text{As}_{0.79}\text{P}_{0.21})_2$ / V. S. Stolyarov, I. S. Veshchunov, S. Yu. Grebenchuk [et al.] // *Science Advances.* — 2018. — Vol. 4. — P. eaat1061.
11. *Larkin, A. I.* Inhomogeneous state of superconductors / A. I. Larkin, Y. N. Ovchinnikov // *Sov. Phys. (JETP).* — 1965. — Vol. 20. — P. 762—769.
12. *Fulde, P.* Superconductivity in a strong spin-exchange field / P. Fulde, R. A. Ferrell // *Phys. Rev.* — 1964. — Vol. 135. — P. A550—A563.
13. *Anderson, P. W.* Spin alignment in the superconducting state / P. W. Anderson, H. Suhl // *Phys. Rev.* — 1959. — Vol. 116. — P. 898—900.
14. *Buzdin, A. I.* Proximity effects in superconductor–ferromagnet heterostructures / A. I. Buzdin // *Rev. Mod. Phys.* — 2005. — Vol. 77. — P. 935—976.
15. *Изюмов, Ю. А.* Конкуренция сверхпроводимости и магнетизма в гетероструктурах ферромагнетик / сверхпроводник / Ю. А. Изюмов, Ю. Н. Прошин, М. Хусаинов // *УФН.* — 2002. — Т. 172. — С. 113—154.
16. *Holm, R.* Kontaktwiderstand zwischen supraleitern und nichtsupraleitern / R. Holm, W. Meissner // *Z. f. Physik.* — 1932. — Bd. 74. — S. 715—735.
17. *Буздин, А. И.* Осцилляции критического тока в зависимости от обменного поля и толщины ферромагнитного металла (F) в джозефсоновском контакте S-F-S / А. И. Буздин, Л. Н. Булаевский, С. В. Панюков // *Письма в ЖЭТФ.* — 1982. — Т. 35. — С. 147—148.
18. *Буздин, А. И.* Джозефсоновский контакт с ферромагнитной прослойкой / А. И. Буздин, М. Ю. Куприянов // *Письма в ЖЭТФ.* — 1991. — Т. 53. — С. 308—312.
19. *Demler, E. A.* Superconducting proximity effects in magnetic metals / E. A. Demler, G. B. Arnold, M. R. Beasley // *Phys. Rev. B.* — 1997. — Vol. 55. — P. 15174—15182.
20. *Buzdin, A. I.* Existence of superconducting domain walls in ferromagnets / A. I. Buzdin, L. N. Bulaevskii, S. V. Panyukov // *Sov. Phys. (JETP).* — 1984. — Vol. 60. — С. 174—179.
21. *Buzdin, A. I.* Domain wall superconductivity in ferromagnetic superconductors / A. I. Buzdin, A. S. Melnikov // *Phys. Rev. B.* — 2003. — Vol. 67. — P. 020503.
22. *Aladyshkin, A. Y.* Domain-wall superconductivity in hybrid superconductor-ferromagnet structures / A. Y. Aladyshkin, A. I. Buzdin, A. A. Fraerman [et al.] // *Phys. Rev. B.* — 2003. — Vol. 68. — P. 184508.
23. *Aladyshkin, A. Y.* Nucleation of superconductivity and vortex matter in superconductor-ferromagnet hybrids / A. Y. Aladyshkin, A. V. Silhanek, W. Gillijns, V. V. Moshchalkov // *SUST.* — 2009. — Vol. 22. — P. 053001—053048.
24. *Usadel, L.* Generalized diffusion equation for superconducting alloys / L. Usadel // *Phys. Rev. Lett.* — 1970. — Vol. 25. — P. 507—509.

25. *Fominov, Y. V.* Nonmonotonic critical temperature in superconductor/ferromagnet bilayers / Y. V. Fominov, N. M. Chtchelkatchev, A. A. Golubov // *Phys. Rev. B.* — 2002. — Vol. 66. — P. 014507.
26. *Булаевский, Л.* Сверхпроводящая система со слабой связью с током в основном состоянии / Л. Н. Булаевский, В. В. Кузий, А. А. Собянин // *Письма в ЖЭТФ.* — 1977. — Т. 25. — С. 314—318.
27. *Ryazanov, V. V.* Coupling of two superconductors through a ferromagnet: evidence for a π junction / V. V. Ryazanov, V. A. Oboznov, A. Y. Rusanov [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 86. — P. 2427—2430.
28. *Kontos, T.* Josephson junction through a thin ferromagnetic layer: negative coupling / T. Kontos, M. Aprili, J. Lesueur [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Vol. 89. — P. 137007.
29. *Рязанов, В. В.* Сверхпроводящие токи через ферромагнетик. Инверсия фазы в структурах с джозефсоновскими π -контактами / В. В. Рязанов, В. А. Обознов, В. В. Большинов, А. С. Прокофьев, А. К. Феофанов // *УФН.* — 2004. — Т. 174, вып. 7. — С. 795—800.
30. *Lemberger, T.* Superfluid density of superconductor-ferromagnet bilayers / T. Lemberger, I. Hetel, A. Hauser, F. Yang // *J. Appl. Phys.* — 2008. — Vol. 103. — P. 07C701.
31. *Houzet, M.* Magnetic screening properties of superconductor-ferromagnet bilayers / M. Houzet, J. Meyer // *Phys. Rev. B.* — 2009. — Vol. 80. — P. 012505.
32. *Pompeo, N.* Thermodynamic nature of the $0-\pi$ quantum transition in superconductor/ferromagnet/superconductor trilayers / N. Pompeo, K. Torokhtii, C. Cirillo [et al.] // *Phys. Rev. B.* — 2014. — Vol. 90. — P. 064510.
33. *Bergeret, F.* Josephson current in superconductor-ferromagnet structures with a nonhomogeneous magnetization / F. Bergeret, A. F. Volkov, K. B. Efetov // *Phys. Rev. B.* — 2001. — Vol. 64. — P. 134506.
34. *Mironov, S.* Vanishing Meissner effect as a hallmark of in-plane Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov instability in superconductor-ferromagnet layered systems / S. Mironov, A. Mel'nikov, A. Buzdin // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Vol. 109. — P. 237002.
35. *Eschrig, M.* Spin-polarized supercurrents for spintronics: a review of current progress / M. Eschrig // *Rep. Prog. Phys.* — 2015. — Vol. 78. — P. 104501.
36. *Bergeret, F. S.* Odd triplet superconductivity and related phenomena in superconductor-ferromagnet structures / F. S. Bergeret, A. F. Volkov, K. B. Efetov // *Rev. Mod. Phys.* — 2005. — Vol. 77. — P. 1321—1373.
37. *Houzet, M.* Long range triplet Josephson effect through a ferromagnetic trilayer / M. Houzet, A. Buzdin // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Vol. 76. — P. 060504.
38. *Khairé, T. S.* Observation of spin-triplet superconductivity in co-based Josephson junctions / T. S. Khairé, M. A. Khasawneh, J. W. P. Pratt, N. O. Birge // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Vol. 104. — P. 137002.
39. *Samokhvalov, A. V.* First order $0-\pi$ phase transitions in superconductor/ferromagnet/superconductor trilayers / A. V. Samokhvalov, A. Buzdin // *Phys. Rev. B.* — 2015. — Vol. 92. — P. 054511.

40. *Вдовичев, С. Н.* Фазовые переходы в гибридных SFS-структурах с тонкими сверхпроводящими слоями / С. Н. Вдовичев, Е. Е. Пестов, Ю. Н. Ноздрин, П. А. Юнин, А. В. Самохвалов // Письма в ЖЭТФ. — 2016. — Т. 104. — С. 336—341.
41. *Bobkova, I. V.* Effects of spin-orbit interaction on superconductor-ferromagnet heterostructures: spontaneous electric and spin surface currents / I. V. Bobkova, Yu. S. Barash // Письма в ЖЭТФ. — 2004. — Т. 80. — С. 563—567.
42. *Mironov, S.* Spontaneous currents in superconducting systems with strong spin-orbit coupling / S. Mironov, A. Buzdin // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Vol. 118. — P. 077001.
43. *Samokhvalov, A. V.* Vortex states induced by proximity effect in hybrid ferromagnet-superconductor systems / A. V. Samokhvalov, A. Mel'nikov, A. Buzdin // Phys. Rev. B. — 2007. — Vol. 76. — P. 184519.
44. *Samokhvalov, A. V.* Little-Parks oscillations in hybrid ferromagnet-superconductor systems / A. V. Samokhvalov, A. Mel'nikov, P. Ader, A. Buzdin // Phys. Rev. B. — 2009. — Vol. 79. — P. 174502.
45. *Little, W. A.* Observation of quantum periodicity in the transition temperature of a superconducting cylinder / W. A. Little, R. D. Parks // Phys. Rev. Lett. — 1962. — Vol. 9. — P. 9—12.
46. *Little, W. A.* Fluxoid quantization in a multiply-connected superconductor / W. A. Little, R. D. Parks // Phys. Rev. — 1964. — Vol. 133. — P. A97—A103.

**Нелинейные процессы
на границе океана и атмосферы**

АЗБУКА ВЕТРОВОГО ВОЛНЕНИЯ

С. И. Бадулин

Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, г. Москва

В статье представлено современное состояние исследований морского волнения в терминах теории слабой (волновой) турбулентности. С помощью аналитических и численных методов продемонстрирована принципиальная роль слабонелинейных взаимодействий и дана теоретическая интерпретация полученных за последние полвека экспериментальных результатов.

1. Краткий исторический очерк

Морское волнение относится к тем физическим процессам, которые представляются обывателю привычными и, казалось бы, наиболее понятными в ряду прочих природных явлений. Именно привычность скрывает от нас многие фундаментальные и практические проблемы, стоящие за этим явлением, и полную драматизма историю его познания. Изложение истории изучения и предсказания волнения начиная с древних времен было бы весьма уместным и поучительным. Здесь мы ограничимся лишь несколькими штрихами и указаниями на имена и даты.

Эмпирическое знание, строго привязанное к конкретным регионам, издревле играло важнейшую роль в обеспечении безопасности судоходства. Недостаток такого знания существенно ограничивал или же делал невозможным успешное мореплавание. Достаточно упомянуть историю Великой и славнейшей армады (1588 г.) времен Англо-испанской войны (1585—1604 гг.). Недостаточное знание района боевых операций и активные действия англо-голландского флота по разрушению имевшейся навигационной инфраструктуры побережья привели к практически полному уничтожению испанской армии вторжения. Боевые потери не могли идти ни в какое сравнение с потерями от штормов и крушений на малознакомом побережье.

Бурное развитие науки и технологий в Новое время привело к созданию, прежде всего, методов измерений и наблюдений, позволявших обобщить эмпирическое знание и, таким образом, существенно расширить область его применения. Замечательным примером служит шкала Бофорта (адмирал Фрэнсис Бофорт, 1774—1857 гг.), первоначально созданная для унификации докладов командиров конкретных типов судов и в дальнейшем ставшая всемирным стандартом оценки состояния моря.

Глубокое понимание взаимосвязи атмосферных и морских процессов привело к созданию национальных служб погоды. Как часто бывает, поводом послужили крупные потрясения. 14 ноября 1854 года в разгар Крымской войны во время ужасного шторма в течение одного дня погибли более 50 судов и 500 моряков союзного франко-британского флота. До сих пор это событие упоминается как the Great Storm. Успех французской метеослужбы, созданной немедленно после трагедии, во многом объясняется талантом и энергичностью ее организатора выдающегося ученого Леверье (Urbain Jean Joseph Le Verrier, 1811—1877 гг.) и особым покровительством императора Наполеона III. Леверье, более известный как человек, открывший планету Нептун «на кончике пера», проследил путь циклона, приведшего к Великому шторму, через всю Европу и пришел к выводу о необходимости создания глобальной (как сказали бы сейчас) сети метеонаблюдений для сбора и анализа регулярно поступающей информации.

Формально метеослужба Великобритании была создана на год раньше, после Брюссельской конференции 1853 года (должность метеоролога-статистика со штатом помощников). Благодаря первому шефу этой службы вице-адмиралу Роберту Фицрою (Robert FitzRoy, 1805—1865 гг.) была развернута национальная сеть метеостанций и организован оперативный прогноз погоды. Эти прогнозы стали печататься в ежедневных газетах. Их низкая оправдываемость вызвала жесткую критику и обвинения Фицроя в превышении данных ему полномочий метеоролога-статистика, что и привело последнего к самоубийству. Следует подчеркнуть, что деятельность метеорологического департамента под руководством Фицроя не в последнюю очередь была направлена на предсказания морских штормов и поддерживалась торговыми и страховыми компаниями. В то же время существовала оппозиция, для которой слишком частые ложные предупреждения о природных катаклизмах оборачивались значительными экономическими потерями. Вскоре после смерти Фицроя в 1865 году метеодепартамент был закрыт и выпуск прогнозов погоды прекратился, поскольку комиссия сочла, что «еще нет научных оснований для ежедневных предсказаний». Эту историю следует иметь в виду при разработке методов прогноза: преувеличение, равно как и преуменьшение опасности, может оказаться неоправданно дорогим.

Развитию современных подходов к исследованиям морского волнения и разработке методов его прогноза немало способствовали крупные морские операции Второй мировой войны, такие как Torch (Северная Африка, 1942 г.), Husky (Сицилия, 1943 г.), Neptune (первый этап операции Overlord высадки союзников в Нормандии в 1944 году). В 1947 году была опубликована книга выдающихся океанологов Харальда Свердрупа и Уолтера Манка [1], которые принимали участие в исследованиях, способствовавших успеху упомянутых операций. В книге были представлены многие

элементы современной физической теории волнения. Ключевым выводом этой книги, по которой первые послевоенные поколения советских океанологов знакомились с теорией морского волнения, можно считать возможность качественного прогноза волнения по интегральным параметрам: значимой высоте и характерному периоду волн («the concept of “significant waves” is essential for purpose of forecasting»). Именно это делает физическую теорию Свердруп и Манка обозримой и пригодной для решения практических задач.

Растущие практические потребности и возможности появившейся в 40—50-х годах XX века вычислительной техники потребовали более детальной информации о волновом поле. Так появились современные спектральные модели [2], которые, наряду с очевидным прогрессом, к сожалению, обусловили доминирование вопросов сугубо технических над решением принципиальных физических проблем. Много в физике морского волнения еще не понято. В частности, недооцененной, на наш взгляд, остается роль нелинейных межволновых взаимодействий в ряду множества механизмов, определяющих эволюцию волн в океане.

В этой статье предпринята попытка подчеркнуть именно роль нелинейных волновых процессов в формировании известных особенностей эволюции поля волн (увеличение периодов волн по мере их развития, так называемый downshift, черты автомодельности спектров — близкую к универсальной форму волновых спектров и т. п.). Представлены результаты, полученные за последние годы автором и его коллегами. Эта работа потребовала проведения значительного объема вычислений и в то же время привела к замечательным обобщениям в виде простых аналитических соотношений, своеобразной азбуки, выделяющей основные звуки из континуума явлений, связанных с ветровым волнением.

В разделе 2 даны основные сведения из спектральной теории, лежащей в основе современной теории морского волнения. В разделе 3 рассматривается модель автомодельного морского волнения и формулируются ключевые результаты аналитической теории [3], позволяющие рассмотреть развитие волнения как последовательность стадий, отвечающих различным режимам взаимодействия ветра с морской поверхностью.

2. Спектральная теория ветрового волнения

В настоящее время основой описания морского волнения в исследовательских и прогностических моделях является статистическая теория, которая представляет поле гравитационных волн на поверхности воды как ансамбль волн-квазичастиц со случайными параметрами. Состояние такой системы в каждый момент времени t в точке с координатами $\mathbf{x} = (x, y)$ определяется плотностью частиц в пространстве волновых векторов — ква-

зиимпульсов $\mathbf{k} = (k, l)$. Для волн на воде функция плотности частиц имеет смысл спектральной плотности волнового действия $N(\mathbf{k}) = E(\mathbf{k})/\omega(\mathbf{k})$, которая, как и в классической механике, выражается через плотность полной энергии $E(\mathbf{k})$ и собственную частоту волны-частицы $\omega(\mathbf{k})$. При этом собственная частота удовлетворяет дисперсионному соотношению для волн рассматриваемого типа. Мы ограничимся случаем волн на глубокой воде, что отвечает степенной изотропной зависимости $\omega(\mathbf{k}) = (g|\mathbf{k}|)^{1/2}$. Энергия таких волн пропорциональна квадрату амплитуды (высоты волнения). В исследованиях морского волнения принято опускать множитель, ускорение свободного падения g , и записывать спектральную плотность энергии волнения как $E(\mathbf{k}) = |\eta(\mathbf{k})|^2$, где $\eta(\mathbf{k})$ — амплитуда фурье-компоненты \mathbf{k} волнового поля. Соответственно, пространственная плотность энергии волнового поля выразится через среднеквадратичную высоту волнения как $E = H_{rms}^2$. В исследованиях волнения часто используется так называемая значимая высота $H_s = 4H_{rms}$, связанная с размахом волн, расстоянием от подошвы до гребня, реально оцениваемым наблюдателем с судна.

В отсутствие взаимодействия между волнами-частицами их плотность в элементарном объеме квазиимпульсов должна сохраняться. Все изменения могут быть связаны либо с взаимодействием волн, либо с внешним воздействием. Для морского волнения такое рассуждение приводит к основному уравнению, которое часто связывают с именем Клаусса Хассельмана [4] и записывают в виде

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{k}} \omega \nabla_{\mathbf{x}} N_{\mathbf{k}} = S_{nl} + S_{in} + S_{diss}. \quad (1)$$

Здесь нижние индексы обозначают зависимость от волнового вектора ($N_{\mathbf{k}} \equiv N(\mathbf{k})$) или градиент в пространстве координат и импульсов ($\nabla_{\mathbf{k}}, \nabla_{\mathbf{x}}$). Таким образом, изменения плотности волнового действия (полная гидродинамическая производная в левой части уравнения (1)) связываются с тремя основными механизмами: нелинейными взаимодействиями между гармониками волнового поля (S_{nl}), ветровой накачкой (S_{in}) и волновой диссипацией (S_{diss}). Строго говоря, такое разделение некорректно и связано с молчаливым принятием множества более чем спорных гипотез и приближений [5]. Рассмотрим свойства отдельных членов в правой части уравнения Хассельмана (1).

2.1. Нелинейные взаимодействия

В работе [4] соотношение (1) было получено из уравнений для потенциальных поверхностных волн в отсутствие генерации и диссипации. Уравнения типа (1), описывающие поведение ансамблей частиц (волн), хорошо известны в физике как кинетические, начиная с уравнения Больцмана

для идеального газа. Для разных физических систем они различаются видом члена взаимодействий S_{nl} , так называемого интеграла столкновений. Для волн на глубокой воде этот член описывает взаимодействия квартетов волн-квазичастиц в отличие от парных взаимодействий частиц, рассматриваемых в идеальном газе. Уравнение Хассельмана является предельным случаем квантового кинетического уравнения, полученного почти век назад [6]. Здесь приведем выражение для интеграла столкновений (1), следуя [3],

$$S_{nl} = \pi g^2 \iiint_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} |T_{0123}|^2 (N_1 N_2 N_3 + N N_2 N_3 - N N_1 N_2 - N N_1 N_3) \times \delta(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3. \quad (2)$$

Из (2) видно, что взаимодействовать могут только гармоники, для которых выполняются условия пространственно-временного резонанса (δ -функции в подынтегральном выражении),

$$\begin{cases} \mathbf{k} + \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \\ \omega + \omega_1 = \omega_2 + \omega_3. \end{cases} \quad (3)$$

В уравнениях (2), (3) использованы естественные сокращения, индексы функции N отвечают индексам соответствующих волновых векторов. В отличие от других физических задач, вероятности перехода волн в новое состояние, задаваемые коэффициентами T_{0123} в интеграле столкновений (2), могут быть вычислены в явном виде, что позволяет существенно продвинуться в построении аналитической теории. Громоздкие выражения для коэффициентов взаимодействия в разных работах могут отличаться при использовании различных нормировок спектральной плотности [3, 4, 7].

В отсутствие накачки и диссипации уравнение (1) имеет три формальных закона сохранения, которые могут быть легко получены с учетом свойств симметрии коэффициентов взаимодействия,

$$T_{0123} = T_{2301} = T_{1023} = T_{0132}, \quad (4)$$

для полного волнового действия, энергии и волнового импульса соответственно:

$$N = \int_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}; \quad E = \int_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}; \quad \mathbf{M} = \int_{\mathbf{k}} \mathbf{k} N_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}.$$

При выводе законов сохранения существенным условием оказывается сходимость соответствующих интегралов, содержащих быстрорастущие по волновому числу коэффициенты взаимодействия. Необходимость выполнения этого условия приводит к тому, что единственным реальным первым интегралом системы остается волновое действие N , тогда как энергия и волновой импульс, вообще говоря, не сохраняются.

Кинетическое уравнение (1) в отсутствие диссипации и накачки имеет стационарные решения, отвечающие аннигиляции межволновых взаимодействий $S_{nl} = 0$ [8, 9]. Первое из этих решений, Рэлея — Джинса,

$$N_{\mathbf{k}} = \frac{T}{\omega_{\mathbf{k}} + \mathbf{k}\mathbf{U} + \mu}, \quad (5)$$

не зависит от коэффициентов взаимодействия и отвечает локальному балансу амплитуд взаимодействующих квадруплетов в подинтегральном выражении для S_{nl} в (2)

$$N_1 N_2 N_3 + N N_2 N_3 - M N_1 N_2 - N N_1 N_3 = 0$$

при произвольных константах T (температура), μ (свободная энергия) и \mathbf{U} (скорость дрейфа).

Особую роль играют степенные решения Колмогорова — Захарова, которые определяются свойствами конкретной физической системы. Для таких решений равновесие обуславливается не балансом для каждого элементарного квадруплета, как в (5) (занулением подинтегрального выражения в уравнении (2)), а балансом потока по спектру. Для каждой спектральной компоненты приход (энергии, действия, импульса) благодаря взаимодействиям с волнами определенного диапазона в точности компенсируется убылью вследствие тех же взаимодействий с гармониками других диапазонов. Один из таких режимов динамического равновесия, прямой каскад [8], соответствует переносу энергии в бесконечно малые масштабы и дает показатель степени для спектра волнового действия -4 , хорошо наблюдаемый в эксперименте,

$$N^{(1)}(\mathbf{k}) = C_p P^{1/3} g^{-2/3} |\mathbf{k}|^{-4}. \quad (6)$$

Еще одно решение для обратного каскада отвечает переносу волнового действия в область больших масштабов (малых частот) при несколько меньшем показателе степени, $-23/6$:

$$N^{(2)}(\mathbf{k}) = C_q Q^{1/3} g^{-1/2} |\mathbf{k}|^{-23/6}. \quad (7)$$

Потоки энергии и действия определяются соответственно как

$$P = - \int_{\mathbf{k}}^{+\infty} \omega_{\mathbf{k}} S_{nl} d\mathbf{k}; \quad Q = \int_0^{\mathbf{k}} S_{nl} d\mathbf{k}. \quad (8)$$

Колмогоровские решения (6), (7) позволяют связать спектральную плотность со спектральным потоком, что дает принципиальную возможность оценки трудноизмеряемой на практике величины (например, потока энергии) по наблюдаемой физической величине (например, по энергии или высоте волн). Это замечательное свойство будет использовано ниже.

Постоянные Колмогорова C_p , C_q в (6), (7) хорошо известны из численных и аналитических оценок [10, 13]:

$$C_p = 0,203; \quad C_q = 0,194. \quad (9)$$

Изотропные решения Колмогорова — Захарова (6), (7) удобно записать в терминах частоты $\omega_{\mathbf{k}}$ для энергии, совершив стандартные замены переменных (см. [11]):

$$E^{(1)}(\omega) = 2C_p \frac{g^{4/3} P^{1/3}}{\omega^4}; \quad (10a)$$

$$E^{(2)}(\omega) = 2C_q \frac{g^{4/3} Q^{1/3}}{\omega^{11/3}}. \quad (10б)$$

Слабоанизотропное решение, реализующее прямой каскад волнового импульса, может быть построено с помощью процедуры возмущения для изотропного решения (10a) [12]:

$$E^{(3)}(\omega, \theta) = 2 \frac{g^{4/3} P^{1/3}}{\omega^4} \left(C_p + C_m \frac{gK}{\omega P} \cos \theta + \dots \right). \quad (11)$$

Еще одна константа Колмогорова, $C_m \approx 0,08$ [13], в (11) отвечает за анизотропную поправку к спектральной плотности энергии из-за постоянного потока волнового импульса K в высокие частоты.

Принципиальным для дальнейшего анализа является свойство однородности интеграла столкновений, естественным образом связанное со степенным законом дисперсии. Для произвольных положительных чисел κ, ν выполняется равенство

$$S_{nl}[\kappa \mathbf{k}, \nu N_{\mathbf{k}}] = \kappa^{19/2} \nu^3 S_{nl}[\mathbf{k}, N_{\mathbf{k}}]. \quad (12)$$

Свойство (12) определяет многие важные особенности решений кинетического уравнения для волн на воде, которые будут рассмотрены ниже.

2.2. Ветровая накачка

Переходя к обсуждению члена ветровой накачки S_{in} , следует подчеркнуть противоречивость уравнения Хассельмана в формулировке (1). В то время как слагаемое, описывающее нелинейные взаимодействия, выводится в рамках последовательной математической процедуры при использовании определенных гипотез и приближений, обозримые физические и тем более математические модели для членов S_{in} , S_{diss} в настоящее время отсутствуют и вряд ли будут созданы в ближайшем будущем (см. [3]). Связано это со множественностью механизмов, ответственных за динамику морских волн, причем отдельные физические эффекты могут отвечать как за генерацию, так и за диссипацию волнения. Так, ветер генерирует волны, бегущие, как правило, медленнее ветра. Однако по мере роста высоты волн и их длины (периода) появляются волны, распространяющиеся быстрее ветра (иногда значительно быстрее — см. [14]), и потому под действием этого ветра затухающие.

Рост волнения в современных моделях морского волнения обычно описывается как квазилинейный процесс:

$$S_{in} = \gamma_k \omega_k N_k, \quad (13)$$

где малый безразмерный инкремент $\gamma_k = O(\rho_a/\rho_w)$ имеет порядок величины отношения плотностей воздуха и воды. Считается, что генерация, главным образом, определяется отношением фазовых скоростей волновых гармоник C_k к характерной скорости ветра U_h (обычно на стандартной высоте 10 метров), так называемым возрастом волнения C_k/U_h , т. е. устроена аналогично черенковскому механизму излучения волн движущимся возмущением:

$$\gamma_k = s \frac{\rho_a}{\rho_w} \left(\frac{U_h \cos \Theta - 1}{C_k} \right)^n \quad \text{при} \quad \left(\frac{U_h \cos \Theta - 1}{C_k} \right) > 0. \quad (14)$$

Коэффициент s варьирует в диапазоне от 0,04 [5] до 0,3 [15]. Показатель n обычно полагается равным 1 [15] или 2 [5, 16, 17, 19] и может зависеть от стадии развития волнения. Такая неопределенность в задании функции ветровой накачки дополняется необходимостью выбора подходящей функции диссипации в уравнении (1). Как подтверждают недавние исследования [18], показатель степени $n = 4/3$ в (14) согласуется с имеющимся экспериментальным материалом не хуже, а может, и лучше, чем стандартные $n = 1$, $n = 2$. Зависимости волновой накачки от безразмерной частоты представлены на рис. 1, откуда видно, что разброс значений, даваемых разными авторами «стандартных» параметризаций, может достигать порядка величины.

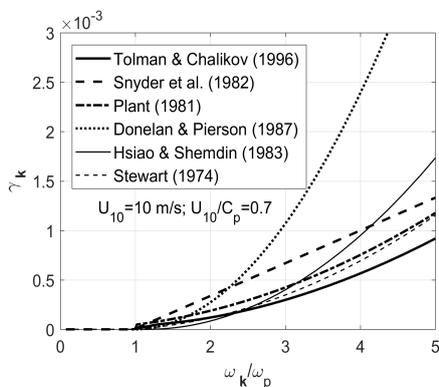


Рис. 1. Зависимости безразмерного инкремента ветровой накачки (13) от безразмерной частоты волны (ω_p — частота спектрального пика) для скорости ветра на стандартном горизонте $U_{10} = 10$ м/с и возраста волнения $C_p/U_{10} = 1$ для различных параметризаций (см. список литературы)

В прогностических моделях большинство известных параметризаций ветровой накачки предлагается как опции, и их выбор зависит от опыта и добросовестности конкретного пользователя. Корректность такого подхода («настройки») вызывает большие сомнения (см. обсуждение в [3]).

2.3. Волновая диссипация

Неоднозначность в выборе функции диссипации определяется отмеченной выше особенностью выражения функции источника в правой части уравнения (1), где разделение на члены генерации и диссипации является весьма условным. Проблемы в статистическом описании генерации и диссипации волнения во многом схожи: параметризация диссипации в основном имеет в виду единственный механизм, связанный с обрушением волн. Математическая модель этого сложного процесса была рассмотрена К. Хассельманом [23] как случайный процесс формирования особенностей профиля волны, что приводит к квазилинейной зависимости функции диссипации S_{diss} от энергии (волнового действия) и степенной — от частоты волны. Соответствующий анзац, как и в ситуации с ветровой накачкой, содержит ряд параметров, которые предлагается адаптировать к конкретному случаю. В оригинальной работе [23] эти параметры были оценены для гипотетического состояния насыщенного морского волнения (fully-developed, mature sea), когда все три члена в правой части (1) сбалансированы. В современных моделях диссипация обычно представляется в общем виде [24]:

$$S_{diss} = -\frac{C_f}{g^p} \bar{\omega}^{2p+1} E^{p/2} \left[\delta \left(\frac{\omega}{\bar{\omega}} \right)^2 + (1-\delta) \left(\frac{\omega}{\bar{\omega}} \right)^4 \right] N(\mathbf{k}, t), \quad (15)$$

где зависимость от полной энергии E отражает нелинейность диссипации, средняя частота $\bar{\omega}$ определяется интегралами энергии и действия:

$$\bar{\omega} = \left(\int_0^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \omega N(\omega, \theta) d\omega d\theta \right) \cdot \left(\int_0^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} N(\omega, \theta) d\omega d\theta \right)^{-1} = \frac{E}{N}, \quad (16)$$

а коэффициенты C_f , p и δ выбираются опытным путем.

Описанная выше физическая конструкция правой части кинетического уравнения (1), включающая члены нелинейного взаимодействия S_{nl} , ветровой накачки S_{in} и волновой диссипации S_{diss} , является общей для всех современных спектральных моделей морского волнения (так называемых моделей третьего поколения), начиная с первой из них, модели WAM (WAve Model) [20]. Европейская модель WAM в течение многих лет остается своеобразным стандартом и широко используется, прежде всего, в исследовательских целях. В разработанной в США модели WaveWatch [21] большое внимание уделено эффективности численных алгоритмов, что определяет ее преимущество в качестве прогностической в самых разных регионах Мирового океана. В модели SWAN (Simulating WAves Nearshore [22]), развиваемой в Дельфтском технологическом университете

(<https://www.tudelft.nl/en/>), особенно тщательно учитываются эффекты, связанные с эволюцией волнения на мелководье. Вместе с тем выбор параметров функций диссипации и ветровой накачки остается едва ли не единственным направлением совершенствования всех упомянутых моделей морского волнения, несмотря на ряд несоответствий результатам, получаемым в рамках альтернативных подходов.

В модели WAM Cycle 4 [24, 25] параметры функции диссипации (15) по умолчанию приняты $C_f = 4,5$, $p = 4$, $\delta = 0,5$. Между тем моделирование случайного волнового поля в рамках динамических уравнений [26] показывает, что такая диссипация, вероятно, сильно завышена и для параметризации вида (15) следовало бы брать совершенно другие значения параметров — $C_f = 0,11$, $p = 12$, $\delta = 0$. Наиболее важным здесь является параметр p , определяющий зависимость диссипации от средней крутизны волнения. Его большая величина в (15) может означать пороговый характер процесса: диссипация очень резко возрастает по достижении некоторого критического значения крутизны. Этот результат противоречит общепринятым подходам к параметризации волновой диссипации и, к сожалению, до сих пор не нашел должной оценки у сообщества специалистов по ветровому волнению.

3. Теория автомодельного ветрового волнения

3.1. О доминировании нелинейного переноса

Элементарные сведения о моделировании морского волнения, представленные в предыдущем разделе, показывают, прежде всего, радикальное различие между членами в правой части (1). Член нелинейного переноса S_{nl} выводится из первых принципов гидродинамики, с ним связаны фундаментальные свойства уравнения (1) в отсутствие внешнего воздействия (законы сохранения, решения Колмогорова — Захарова и т. п.). Напротив, функции, отвечающие за генерацию и диссипацию волн, конструируются, исходя из общих качественных представлений о том, как могут расти и затухать морские волны, но не на основе последовательной физической теории. Показательной иллюстрацией подобного подхода может быть цитата из статьи ведущих специалистов по ветровому волнению [27]:

«In the experiment reported in this paper, we did not rely on the Miles or any other theory, or on any other experiment, for interpretation of our data and to obtain the parameterization of the wind input spectral function in terms of wind-wave properties».

К сожалению, основные усилия в исследованиях и развитии прогноза морского волнения продолжают тратиться на совершенствование функций накачки и диссипации часто в ущерб более корректному учету особенностей нелинейного переноса, связанных с членом S_{nl} . Аргументация перво-

очередной необходимости сосредоточиться на функциях накачки S_{in} и диссипации S_{diss} базируется на банальном сравнении членов в правой части (1). При этом игнорируется тот факт, что интеграл столкновений S_{nl} уже содержит и генерацию и затухание, баланс которых, в частности, обеспечивает существование стационарных потоковых решений Колмогорова — Захарова и квазиуниверсальную форму нестационарных спектральных распределений. При этом нелинейные генерация и затухание не влияют непосредственно на изменение интегральных действия и энергии. Столкновительный интеграл S_{nl} может быть представлен в виде [28]

$$S_{nl} = F_k - \Gamma_k N_k, \quad (17)$$

где нелинейная функция Γ_k имеет смысл коэффициента затухания, а заведомо положительный член F_k — источника волн. Соответствующие части интеграла столкновений оказываются много больше по величине членов ветровой накачки и диссипации и самого S_{nl} ($|F_k| \gg |S_{nl}|$, $|F_k| \gg |S_{in}|$ и т. п.). Характерное соотношение величин членов в правой части кинетического уравнения (1) показано на рис. 2.

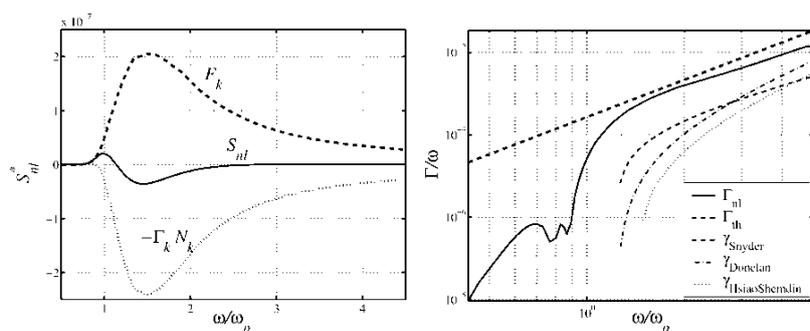


Рис. 2. Соотношение величин членов в правой части кинетического уравнения (1) для гипотетического состояния насыщенного ветрового волнения [29]: *слева* — интеграл столкновений S_{nl} (сплошная линия) в сравнении с нелинейной генерацией F_k (штриховая линия) и нелинейного затухания $\Gamma_k N_k$ (пунктир) [28]; *справа* — декремент нелинейного затухания $\Gamma_k N_k$ (сплошная линия) и инкременты волновой накачки γ_k различных эмпирических параметризаций (см. легенду и рис. 1)

Левый график на рис. 2 показывает, что S_{nl} складывается из двух больших (по абсолютной величине) слагаемых. Отметим, что вычисления проведены для спектра Пирсона — Московича [30], который ассоциируется с гипотетическим состоянием полностью развитого волнения (fully-developed, mature sea), когда достигается баланс правой части кинетического уравнения (1) и эволюция спектрального распределения в пространстве и времени прекращается. Существование такого состояния и конструктивность самого понятия полностью развитого волнения в исследова-

ниях волн вызывают серьезные сомнения, поскольку для достижения подобного насыщения требуются нереально большие времена и разгоны (см. обсуждение [29, 31]).

На правом графике на рис. 2 показано соотношение инкремента нелинейного затухания Γ_k в (17) и различных параметризаций волновой накачки (14). Первый оказывается почти на порядок больше даже для установившегося спектра Пирсона — Московича. Наблюдаемые спектры растущего ветрового волнения преимущественно концентрируют энергию вблизи частоты максимума, и для них разница инкрементов нелинейной релаксации и волновой накачки оказывается еще больше. Факт доминирования нелинейного переноса над внешним воздействием (генерация и диссипация волнения) может быть использован для построения аналитической теории, в которой ключевую роль играют свойства однородности интеграла столкновений (12).

3.2. Приближенные автомодельные решения

Предполагая, что член нелинейного переноса S_{nl} в (1) является главным, можно попытаться построить процедуру последовательных приближений, первое уравнение которой будет описывать эволюцию спектра волн исключительно под действием нелинейных волновых взаимодействий:

$$dN_k / dt = S_{nl}. \quad (18)$$

Условие однородности интеграла столкновений (12) позволяет получить автомодельные решения для двух специальных случаев развития волнения. Для пространственно-однородного сценария (так называемого *duration-limited growth*) соотношение (18) в терминах частотно-угловых спектров энергии $E(\omega, \theta)$ с очевидным обезразмериванием на произвольный масштаб времени t_0 ($\tau = t / t_0$ — безразмерное время и безразмерная частота $\tilde{\omega} = \omega t_0$) [7] приводит к формальному решению

$$\tilde{E}(\tilde{\omega}, \theta) = a_\tau \tau^{p_\tau + q_\tau} \Phi_\tau(\xi, \theta); \quad \xi = b_\tau \tau^{q_\tau} \tilde{\omega}, \quad (19)$$

отвечающему автомодельности второго рода [33]. Решение для случая стационарного развития волнения в терминах безразмерных частоты $\omega = \tilde{\omega} / \sqrt{g / x_0}$ и разгона $\chi = x / x_0$ вдоль одной из координат x (x_0 — произвольный пространственный масштаб) можно записать аналогичным образом:

$$\tilde{E}(\tilde{\omega}, \theta) = a_\chi \chi^{p_\chi + q_\chi} \Phi_\chi(\zeta, \theta); \quad \zeta = b_\chi \chi^{q_\chi} \tilde{\omega}. \quad (20)$$

Функции Φ_τ, Φ_χ в (19), (20) очевидно зависят от параметров решений p_τ, q_τ (p_χ, q_χ). Недавно В. Е. Захаров указал на возможность существования формального решения (18) для случая зависимости и от времени, и от одной из пространственных переменных.

С решениями (19), (20) связаны так называемые магические соотношения [34] для показателей $p_\tau, q_\tau (p_\chi, q_\chi)$:

$$p_\tau = \frac{9q_\tau - 1}{2}; \quad p_\chi = \frac{10q_\chi - 1}{2}, \quad (21)$$

и множителей $a_\tau, b_\tau (a_\chi, b_\chi)$:

$$a_\tau = b_\tau^{17/4}; \quad a_\chi = b_\chi^{9/2}. \quad (22)$$

Связи (21), (22) замечательны тем, что комбинация крутизны волнения, определенной с помощью полной энергии E и частоты спектрального пика ω_p (или другой характерной частоты),

$$\mu = (E\omega_p^4)^{1/2} / g^2, \quad (23)$$

и характерного числа периодов волнения для специальных случаев пространственно-однородного (duration-limited) и стационарного (fetch-limited) роста

$$v = \omega_p t, \quad \text{или} \quad v = 2\omega_p^2 x / g, \quad (24)$$

перестает зависеть от множителей $a_\tau, b_\tau (a_\chi, b_\chi)$ и степенных показателей $p_\tau, q_\tau (p_\chi, q_\chi)$. Остается лишь зависимость от форм спектральных функций Φ_τ, Φ_χ в (19), (20), но такая зависимость является слабой, как показывают экспериментальные и численные исследования [7, 36], т. е. имеет место инвариантность форм спектральных распределений (spectral shape invariance). В результате получается замечательно простой закон универсальности роста ветрового волнения [35]

$$\mu^4 v = \alpha_0^3, \quad (25)$$

не содержащий параметров автомодельных решений (19), (20). Универсальная константа α_0 в (25) требует определения в терминах параметров автомодельных решений (19), (20).

До сих пор мы использовали общие свойства единственного уравнения (18) нашей асимптотической модели. Для замыкания модели следует учесть формально малые члены, связанные с процессами накачки и диссипации, S_{in}, S_{diss} . Для этого можно потребовать выполнения интегрального баланса в полном кинетическом уравнении (1):

$$\langle dN_k / dt \rangle = \langle S_{in} + S_{diss} \rangle. \quad (26)$$

Здесь угловые скобки означают интегрирование по всему пространству волновых векторов. Консервативный интеграл столкновений S_{nl} при таком интегрировании вклада в интегральный баланс не дает. Замыкание приближенной модели (26) позволяет связать параметры автомодельных решений (19), (20) с характеристиками интегральной накачки (потока). Вы-

ражая левую часть в терминах интегралов решений (19), (20), можно получить соотношение колмогоровского типа, связывающее уровень энергии с внешним потоком (интегральной накачкой), так называемый слаботурбулентный закон развития ветрового волнения [32]:

$$\frac{E\omega_p^4}{g^2} = \alpha_{ss} \left(\frac{\langle S_{in} + S_{diss} \rangle \omega_p^3}{g^2} \right)^{1/3}, \quad (27)$$

где параметр $\alpha_{ss} \approx \alpha_0 p_\tau^{1/3}$ ($\alpha_{ss} \approx \alpha_0 p_\chi^{1/3}$), зависящий от скорости роста волн, является очевидным аналогом констант Колмогорова — Захарова (9) в классических стационарных решениях консервативного кинетического уравнения (1). Множитель $\alpha_0 \approx 0,7$ в приближенном выражении для этого параметра фигурирует в универсальном законе роста волнения (25).

Таким образом, предложенная нами модель (18), (26), которая разделяет баланс энергии волнения (split balance model по терминологии [7]), позволяет получить целый ряд важных аналитических результатов. Ниже рассмотрим некоторые физические следствия и экспериментальные аргументы в поддержку развиваемого подхода.

3.3. Эталонные режимы роста волнения

Замечательным свойством рассмотренной выше приближенной модели развития волнения и основных ее аналитических результатов является отсутствие очевидной зависимости от характеристик поля ветра. Ситуация, на первый взгляд, кажется парадоксальной: ветровые волны описываются моделью, в которой ветер формально никак не присутствует. Это всего лишь кажущийся парадокс, связанный с принятой нами идеализацией физического явления.

Во-первых, мы предположили доминирование нелинейных волновых взаимодействий, представив в разделе 3.1 формальное обоснование такого предположения. Это позволило описать автомодельную эволюцию волнового спектра в терминах решений (19), (20).

Во-вторых, мы предложили задать параметры автомодельных решений условием замыкания (26). И в этом случае неявно предполагалось, что малые в сравнении с нелинейным переносом S_{nl} члены волновой накачки и диссипации S_{in} , S_{diss} будут влиять на рост интегральным образом, локальные же их особенности будут несущественны из-за сильной нелинейной релаксации. Данная гипотеза является довольно сильной и нуждается в серьезном обосновании. Ниже мы предьявим соответствующие результаты численных и экспериментальных работ.

Наконец, явное описание влияния ветра может возникнуть, если потребуется отразить эффект ветра и диссипации волн при задании S_{in} и S_{diss} . В рамках обсуждаемой модели эта часть процесса отделяется от собствен-

но волновой в рамках процедуры последовательного разделения физических масштабов различных процессов, с чем и связан термин «модель разделенного баланса» (split balance model). В рамках этой модели мы не пренебрегаем отдельными эффектами, но лишь ставим каждый из них на определенное место в соответствующей иерархии.

Заметим, что асимптотическая модель (18), (26) может быть записана для различных величин — как для волнового действия (18), так и для энергии E или волнового импульса M . Следовательно, важное соотношение (27) трансформируется в очевидные аналоги:

$$\frac{N\omega_p^5}{g^2} = \alpha_{ss}^{(N)} \left(\frac{\langle S_{in}^{(N)} + S_{diss}^{(N)} \rangle \omega_p^4}{g^2} \right)^{1/3}; \quad (28)$$

$$\frac{M\omega_p^3}{g^2} = \alpha_{ss}^{(M)} \left(\frac{\langle S_{in}^{(M)} + S_{diss}^{(M)} \rangle \omega_p^2}{g^2} \right)^{1/3}, \quad (29)$$

где верхними индексами выделены члены, отвечающие этим физическим величинам. Можно рассмотреть специальные случаи постоянства потоков энергии, импульса и волнового действия в (26), (28), (29) — и обсудить физические условия, им соответствующие. Показатели степеней p_τ , q_τ (p_χ , q_χ) для этих специальных случаев представлены в таблице. Естественно, для идеализированных постановок однородного ($\nabla_x E = 0$, duration-limited) и стационарного ($\partial E / \partial t = 0$, fetch-limited) развития волнения показатели автомодельных решений (19), (20) разные, однако отношение показателя скорости роста p_τ (p_χ) к показателю убывания характерной частоты q_τ (q_χ) (downshift) одно и то же. В таблице это отношение обозначено символом T по ассоциации с именем проф. Йошиаки Тобы, который предложил известный закон $3/2$ ($H_s \sim T_p^{3/2}$) [37]. Отношение $T = p/q$, таким образом, является индикатором режима развития волнения и физического механизма, отвечающего за это развитие.

*Показатели степеней автомодельных решений (19), (20)
для эталонных режимов развития волнения*

		p_τ	q_τ	p_χ	q_χ	$T = p/(2q)$
A	$dM/dt = \text{const}$	10/7	3/7	1	3/10	5/3
B	$dE/dt = \text{const}$	1	1/3	3/4	1/4	3/2
C	$dN/dt = \text{const}$	8/11	3/11	4/7	3/14	4/3
D	$dN/dt = 0$	-1/11	1/11	-1/12	1/12	-1/2

Режим А в таблице соответствует постоянству потока импульса к волнам и максимальным значениям показателей p_τ , q_τ (p_χ , q_χ). Показатель

(Тобы) $T = p/(2q) = 5/3$ был предложен в работе [36] как следствие параметрической модели, отвечающей постоянству напряжения трения ветра, и как удовлетворительная аппроксимация для подмножества данных эксперимента JONSWAP [39]:

$$\tilde{E} = C_0 \left(\frac{\tilde{\omega}_p}{2\pi} \right)^{-2T} ; \quad C_0 = 5,1 \cdot 10^{-6}; \quad T = 5/3. \quad (30)$$

Здесь \tilde{E} , $\tilde{\omega}$ — безразмерные энергия и частота. В свете представленной выше теории, предлагающей колмогоровскую связь спектрального потока и уровня энергии (27)—(29), параметрическая зависимость (30) приобретает особое значение, поскольку позволяет оценить трудно измеряемую экспериментально физическую величину — поток энергии (импульса, действия). Более того, явный вид зависимости автомодельных решений (19), (20) от времени или координаты позволяет параметризовать этот поток в терминах зависящей от времени (координат) характерной фазовой скорости волн C_p и не зависящей от времени (координаты) константы взаимодействия волн с ветром — скорости трения ветра u_* . Следуя [38], получим из (26) для (30)

$$dE/dt = 7,7 \cdot 10^{-3} \frac{\rho_a}{\rho_w} \frac{C_p u_*^2}{\alpha_{ss}^3 g}. \quad (31)$$

Поскольку фазовая скорость волн растет по мере развития волнения, поток энергии к волнам, определяемый (31), также растет.

Аналогичным образом может быть оценен поток энергии для **режима В** при постоянстве потока энергии к волнам, введенный Тобой [37] (в [38] приведен ошибочный множитель):

$$dE/dt = 0,05 \frac{\rho_a}{\rho_w} \frac{u_*^3}{\alpha_{ss}^3 g}. \quad (32)$$

Режим С постоянства потока действия, оцененный по данным JONSWAP [40, 41], дает зависимость, обратно пропорциональную скорости волн:

$$dE/dt = 1,6 \frac{\rho_a}{\rho_w} \frac{C_p^{-1} u_*^4}{\alpha_{ss}^3 g}, \quad (33)$$

и, соответственно, убывающий по мере развития волнения поток энергии.

Рисунок 3 представляет схему сценариев развития волнения в терминах безразмерных потоков энергии и возраста волнения, C_p/U_{10} . Поток энергии безразмерен на величину потока для режима В [37]. В соответствии с этой схемой для так называемого молодого волнения, $C_p/U_{10} < 1/2$, т. е. для волн, распространяющихся заметно медленнее ветра, поток энер-

гии растет. При приближении характерной фазовой скорости к скорости ветра происходит насыщение потока энергии, а при уравнивании и превышении скорости ветра — падение. Такая схема представляется внутренне непротиворечивой и отвечающей современным экспериментальным и теоретическим представлениям о динамике морского волнения. Более того, количественные оценки, несмотря на их простоту, также представляются весьма правдоподобными и могут быть успешно использованы для оценки характерных параметров ветрового волнения в Мировом океане.

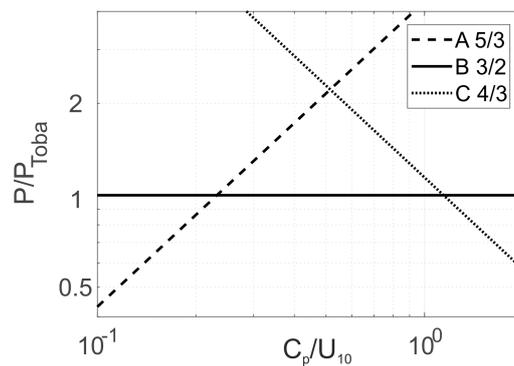


Рис. 3. Зависимость безразмерного потока энергии от возраста волнения C_p/U_{10} для различных сценариев развития волнения (31)—(33) в таблице на с. 135

Таким образом, нам удалось представить своеобразную азбуку (ABC) морского волнения как набор небольшого числа эталонных режимов, за каждым из которых стоит определенная физическая величина (энергия, импульс, действие) и возможный физический механизм, обеспечивающий реализацию каждого из режимов. Эффективность такого подхода, использующего простую асимптотическую модель автомодельного морского волнения (18), (26), была продемонстрирована для более чем 20 экспериментов по измерению роста волнения [32]. В недавней работе [3] список экспериментов расширен и дополнен результатами численных экспериментов.

3.4. Еще одна буква алфавита — морская зыбь

Морское волнение традиционно принято разделять на собственно ветровое волнение и ту его часть, которая с воздействием ветра не связана или, как представляется, связана слабо. Основным источником зыби является само ветровое волнение, распространяющееся в области, не охваченные действием ветра. Будучи, как правило, существенно более длинной (долгопериодной, периоды могут составлять десятки секунд, длины — несколько сотен метров), зыбь слабо затухает, распространяясь на тысячи

километров, и таким образом переносит энергию из районов штормов в относительно спокойные области. В некоторых районах Мирового океана зыбь может существенно преобладать над ветровыми волнами, аккумулируя в себе практически всю энергию поверхностного волнения [42]. Очевидно, предложенная выше асимптотическая теория (уравнение (18)) может быть применена и в этом частном случае.

Условие сохранения волнового действия для случая зыби дает показатели автомодельных решений $p_\tau = -1/11$; $q_\tau = 1/11$; $p_\chi = -1/12$; $q_\chi = 1/12$ [13], что означает, что энергия E зыби не сохраняется, так же как и волновой импульс M . Таким образом, **режим D** предоставляет нам сток энергии, не требующий введения каких-либо дополнительных модельных параметров. Диссипация в этом случае определяется фундаментальными свойствами уравнения (1), которое в отсутствие внешнего воздействия гарантирует сохранение волнового действия, но не полной энергии. Одновременно величины N и E для кинетического уравнения (1) сохраняться не могут. Заметим, что показатель Тобы для зыби $T = -1/2$ отрицателен, что можно использовать как критерий разделения ветрового волнения и зыби. Попытка такого разделения по данным попутных судовых наблюдений [43] обнаружила удивительное свойство зыби в смысле эталонного режима таблицы на с. 135 — в Мировом океане такой режим в чистом виде, по-видимому, не реализуется. Зыбь в Мировом океане активно поглощает ветровое волнение, о чем свидетельствуют показатели Тобы, заметно превышающие $T = -1/2$.

4. Заключение

Целью настоящей статьи было, прежде всего, показать, что для такого сложного физического явления, как морское волнение, может быть разработан своеобразный алфавит — обзримая схема режимов эволюции, оперирующая общими физическими понятиями — интегралами движения и их потоками. Будучи далеко не полной, ограниченной, такая схема позволяет тем не менее отойти от широко распространенных эмпирических подходов, использующих не всегда физически корректные параметризации процессов взаимодействия волн с ветром. Представленная теория хорошо согласуется с известными экспериментальными фактами [3, 32, 35], что позволяет рассматривать ее как возможный необходимый элемент верификации существующих и вновь разрабатываемых моделей волнения. Ограниченность объема статьи отчасти компенсируется списком литературы, предлагающим пытливому читателю самостоятельно углубить свои знания о морском волнении.

Результаты исследований получены в рамках государственного задания (тема 0149-2019-0002).

Литература

1. *Sverdrup, H. V.* Wind, sea, and swell : theory of relations for forecasting / H. V. Sverdrup, W. H. Munk. — Washington : United States Navy Department, Hydrographic Office, 1947. — (H. O. Pub. № 601).
2. *Gelci, R.* Prévision de la houle. La méthode des densités spectroangulaires / R. Gelci, H. Cazalé, J. Vassal // Bulletin d'information du Comité d'Océanographie et d'Etude des Côtes. — 1957. — № 9. — P. 416—435.
3. *Zakharov, V. E.* Analytic theory of a wind-driven sea / V. E. Zakharov // Procedia IUTAM. — 2018. — Vol. 26 : IUTAM Symposium Wind Waves. — P. 43—58.
4. *Hasselmann, K.* On the nonlinear energy transfer in a gravity wave spectrum. Part 1 : General theory / K. Hasselmann // J. Fluid Mech. — 1962. — Vol. 12. — P. 481—500.
5. *Plant, W. J.* A relationship between wind stress and wave slope / W. J. Plant // J. Geophys. Res. — 1982. — Vol. 87, № C3. — P. 1961—1967.
6. *Nordheim, L. W.* On the kinetic method in the new statistics and its applications in the electron theory of conductivity / L. W. Nordheim // Proc. R. Soc. London, Sec. A. — 1928. — Vol. 119. — P. 689—698.
7. *Badulin, S. I.* Self-similarity of wind-driven seas / S. I. Badulin, A. N. Pushkarev, D. Resio, V. E. Zakharov // Nonl. Proc. Geophys. — 2005. — Vol. 12. — P. 891—946.
8. *Захаров, В. Е.* Спектр энергии для стохастических колебаний поверхности жидкости / В. Е. Захаров, Н. Н. Филоненко // ДАН. — 1966. — Т. 170, № 6. — С. 1292—1295.
9. *Захаров, В. Е.* Кинетическое уравнение и колмогоровские спектры в слабо-турбулентной теории ветровых волн / В. Е. Захаров, М. М. Заславский // Изв. АН. ФАО. — 1982. — Т. 18, № 9. — С. 970—979.
10. *Геогджаев, В. В.* Численный и аналитический расчет параметров степенных спектров гравитационных волн на глубокой воде / В. В. Геогджаев, В. Е. Захаров // Письма в ЖЭТФ. — 2017. — Т. 106, № 3. — С. 175—178.
11. *Zakharov, V. E.* Energy balance in a wind-driven sea / V. E. Zakharov // Physica Scripta. — 2010. — Vol. 142. — Art. 014052.
12. *Кац, А. В.* Анизотропные турбулентные распределения для волн с нераспадным законом дисперсии / А. В. Кац, В. М. Конторович // ЖЭТФ. — 1974. — Т. 65, вып. 1. — С. 206—218.
13. *Badulin, S. I.* Ocean swell within the kinetic equation for water waves / S. I. Badulin, V. E. Zakharov // Nonl. Proc. Geophys. — 2017. — Vol. 24. — P. 237—253.
14. *Glazman, R.* Surface gravity waves at equilibrium with a steady wind / R. Glazman // J. Geoph. Res. — 1994. — Vol. 99, № C3. — P. 5249—5262.
15. *Snyder, R. L.* Array measurements of atmospheric pressure fluctuations above surface gravity waves / R. L. Snyder, F. W. Dobson, J. A. Elliot, R. B. Long // J. Fluid Mech. — 1981. — Vol. 102. — P. 1—59.
16. *Donelan, M. A.* Radar scattering and equilibrium ranges in wind-generated waves with application to scatterometry / M. A. Donelan, W. J. Pierson-jr. // J. Geophys. Res. — 1987. — V. 92, № C5. — P. 4971—5029.
17. *Hsiao, S. V.* Measurements of wind velocity and pressure with a wave follower during MARSEN / S. V. Hsiao, O. H. Shemdin // J. Geophys. Res. — 1983. — Vol. 88, № C14. — P. 9841—9849.

18. *Zakharov, V. E.* New wind input term consistent with experimental, theoretical and numerical considerations / V. E. Zakharov, A. Pushkarev, D. Resio // *Nonlin. Processes Geophys.* — 2017. — Vol. 24. — P. 581—597.
19. *Stewart, R. W.* The air-sea momentum exchange / R. W. Stewart // *Boundary-Layer Meteorol.* — 1974. — Vol. 6. — P. 151—167.
20. The WAM model – a third generation ocean wave prediction model / The WAMDI Group // *J. Phys. Oceanogr.* — 1988. — Vol. 18. — P. 1775—1810.
21. User manual and system documentation of WAVEWATCH III R version 5.16 / The WAVEWATCH III R Development Group (WW3DG) ; Tech. Note 329, NOAA/NWS/NCEP/MMAB. — [S. 1.] : College Park, 2016. — 326 pp. + Appendices.
22. *Holthuijsen, L. H.* A spectral wave model for the coastal zone / L. H. Holthuijsen, N. Booij and R. C. Ris // *Proceedings 2nd International Symposium on Ocean Wave Measurement and Analysis, New Orleans, Louisiana, July 25–28, 1993.* — N. Y., 1993. — P. 630—641.
23. *Hasselmann, K.* On the spectral dissipation of ocean waves due to white capping / K. Hasselmann // *Bound. Layer Meteorology.* — 1974. — Vol. 6. — P. 107—127.
24. *Günther, H.* The WAM model Cycle 4 (revised version) : Tech. Rep. 4 / H. Günther, S. Hasselmann, P. A. E. M. Janssen. — Hamburg : Deutsch. Klimatol. Rechenzentrum, 1992.
25. *Komen, G. J.* Dynamics and modelling of ocean waves / G. J. Komen, L. Cavaleri, M. Donelan, K. Hasselmann, S. Hasselmann, P. A. E. M. Janssen. — Cambridge : Cambridge University Press, 1994.
26. *Korotkevich, A. O.* Numerical verification of the weak turbulent model for swell evolution / A. O. Korotkevich, A. N. Pushkarev, D. Resio, V. E. Zakharov // *Eur. J. Mech. B Fluids.* — 2008. — Vol. 27. — P. 361—387.
27. *Donelan, M. A.* Wave-follower field measurements of the wind-input spectral function. Part II : Parameterization of the wind input / M. A. Donelan, A. V. Babanin, I. R. Young, M. L. Banner // *J. Phys. Ocean.* — 2006. — Vol. 36. — P. 1672—1689.
28. *Захаров, В. Е.* О балансе энергии ветровых волн / В. Е. Захаров, С. И. Бадудин // *ДАН.* — 2011. — Т. 440, № 6. — С. 1440—1444.
29. *Komen, G. J.* On the existence of a fully developed wind-sea spectrum / G. J. Komen, S. Hasselmann, K. Hasselmann // *J. Phys. Oceanogr.* — 1984. — Vol. 14. — P. 1271—1285.
30. *Pierson, W. J.* A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of S. A. Kitaigorodskii / W. J. Pierson, L. A. Moskowitz // *J. Geophys. Res.* — 1964. — Vol. 69. — P. 5181—5190.
31. *Alves, J. H. G. M.* Revisiting the Pierson–Moskowitz asymptotic limits for fully developed wind waves / J. H. G. M. Alves, M. L. Banner // *J. Phys. Oceanogr.* — 2003. — Vol. 33. — P. 1301—1303.
32. *Badulin, S. I.* Weakly turbulent laws of wind-wave growth / S. I. Badulin, A. V. Babanin, D. Resio, V. E. Zakharov // *J. Fluid Mech.* — 2007. — Vol. 591. — P. 339—378.
33. *Баренблатт, Г. И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике / Г. И. Баренблатт. — Л. : Гидрометеиздат, 1982. — 256 с.

34. *Pushkarev, A.* Limited fetch revisited : comparison of wind input terms, in surface wave modeling / A. Pushkarev, V. Zakharov // *Ocean Modeling*. — 2016. — Vol. 103. — P. 18—37.
35. *Zakharov, V. E.* Universality of sea wave growth and its physical roots / V. E. Zakharov, S. I. Badulin, P. A. Hwang, G. Caulliez // *J. Fluid Mech.* — 2015. — Vol. 669. — P. 178—213.
36. *Hasselmann, K.* A parametric wave prediction model / K. Hasselmann, D. B. Ross, P. Muller, W. Sell // *J. Phys. Oceanogr.* — 1976. — Vol. 6. — P. 200—228.
37. *Toba Y.* Local balance in the air-sea boundary processes. Part I : On the growth process of wind waves / Y. Toba // *J. Oceanogr. Soc. Japan*. — 1972. — Vol. 28. — P. 109—121.
38. *Gagnaire-Renou, E.* On weakly turbulent scaling of wind sea in simulations of fetch-limited growth / E. Gagnaire-Renou, M. Benoit, S. I. Badulin // *J. Fluid Mech.* — 2011. — Vol. 669. — P. 178—213.
39. *Hasselmann, K.* Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP) / K. Hasselmann, T. P. Barnett, E. Bouws [et al.] // *Dtsch. Hydrogh. Zeitschr. Suppl.* — 1973. — Vol. 12, № A8.
40. *Захаров, В. Е.* Зависимость параметров волн от скорости ветра, продолжительности его действия и разгона в слаботурбулентной теории ветровых волн / В. Е. Захаров, М. М. Заславский // *Изв. АН. ФАО.* — 1983. — Т. 19, № 4. — С. 406—416.
41. *Захаров, В. Е.* Форма спектра энергонесущих компонент водной поверхности в слаботурбулентной теории ветровых волн / В. Е. Захаров, М. М. Заславский // *Изв. АН. ФАО.* — 1983. — Т. 19, № 3. — С. 282—291.
42. *Chen, G.* A global view of swell and wind sea climate in the ocean by satellite altimeter and scatterometer / G. Chen, B. Chapron, R. Ezraty, D. Vandemark // *J. Atmosph. Oceanic Technology*. — 2002. — Vol. 19, № 11. — P. 1849—1859.
43. *Badulin, S. I.* On discriminating swell and wind-driven seas in voluntary observing ship data / S. I. Badulin, V. G. Grigorieva // *J. Geophys. Res.* — 2012. — Vol. 117, iss. C11. — Art. C00J29 ; doi:10.1029/2012JC007937.

ПОРТРЕТЫ НЕЛИНЕЙНЫХ МОРСКИХ ВОЛН В ПРОСТРАНСТВЕ ФУРЬЕ

А. В. Слюняев

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород

Обсуждаются характерные «портреты» пространственно-временных спектров Фурье для нелинейных гравитационных волн на поверхности глубокой воды в плоской геометрии (коллинеарные волны) — от случая простой волны до сильно нелинейных сильно модулированных групп волн и нерегулярных волн, характерных для моря. Показана возможность генерации попутных и встречных волн с разными длинами в результате сильной самомодуляции нелинейных групп волн. Обсуждается модификация спектральных портретов волн на поверхности воды конечной глубины.

Введение

Представление о волнах на морской поверхности как случайной суперпозиции простых гармонических волн активно используется с середины прошлого века. Действительно, волны малой амплитуды, распространяющиеся на поверхности воды под действием силы тяжести, почти синусоидальны и скорости их движения не зависят от амплитуды и других волн (т. е. волны линейны). В предположении, что каждая из компонент волн с заданной частотой и скоростью эволюционирует независимо от других и характеризуется некоторой энергией, вероятность смещения поверхности воды (в одной точке или в один момент времени) определяется нормальным (гауссовым) распределением. Распределение энергии по компонентам волн представляет собой спектр волнения.

Специфика ветровых волн заключается в принципиальной роли ветра (способа «накачки») в их генерации (в отличие, например, от приливных волн или волн цунами) и в определенном диапазоне их масштабов. Наибольшая часть энергии ветровых волн в открытом океане заключена в диапазоне периодов 5—15 с и длин от десятков до нескольких сотен метров. Сгенерированные ветром волны могут распространяться и длительное время после его действия (волны зыби), медленно теряя энергию. Динамика ветровых волн и волн зыби хорошо описывается потенциальными уравнениями движения идеальной жидкости в пренебрежении другими эффектами.

В открытом море (с глубинами более 100 м) волны не ощущают воздействия дна и дисперсионное соотношение принимает максимально простую форму:

$$\omega = \sqrt{gk}, \quad k = |\mathbf{k}|, \quad (1)$$

где $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ — волновой вектор, ω — циклическая частота и g — ускорение свободного падения. Базовые сведения о морских волнах можно найти в учебниках [1—5].

Волны с конечной амплитудой обмениваются энергией, что приводит к эволюции спектров и видоизменению волнения. Необходимость учета взаимодействий волн (т. е. нелинейных эффектов) была осознана довольно давно [6], а математическое описание дано в 1960-х годах в рамках спектрального представления, благодаря работам К. Хассельмана и В. Е. Захарова (см. статью С. И. Бадулина «Азбука ветрового волнения» в настоящем сборнике, с. 121—141). Для их построения используется предположение о слабой нелинейности морских волн, позволяющее пренебречь нелинейными эффектами высоких порядков, ограничиваясь учетом не выше четырех- или пятиволновых нелинейных процессов (это происходит обрыванием ряда разложения гамильтониана для волн по степеням нелинейности). Основу существующих прогностических моделей ветровых волн составляют кинетические модели, базирующиеся на расчете уравнений энергетического баланса в терминах частотно-направленных спектров. В них межволновые взаимодействия описываются выражениями типа столкновительных интегралов, используемых для описания газа и плазмы (см. статью С. И. Бадулина).

Потенциальная возможность осуществления нелинейных взаимодействий волн определяется дисперсионным соотношением (см., например, [7—9]). В частности, дисперсия волн на глубокой воде допускает выполнение точных резонансных условий как минимум на 4 волны,

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4, \quad (2)$$

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 \quad (3)$$

(здесь нижний индекс нумерует волны). Трехволновые взаимодействия на глубокой воде нерезонансные (вынужденные), что означает для волн (\mathbf{k}_1, ω_1) и (\mathbf{k}_2, ω_2) присутствие в спектрах комбинационных компонент, не имеющих собственной динамики (их называют связанными (bound), phase-locked, slave), которые отражают лишь факт геометрического отличия нелинейной волны от синусоиды; это не свободные волны, для которых выполняется дисперсионное соотношение (1). В рамках гамильтонова подхода нерезонансные взаимодействия могут быть исключены каноническим преобразованием, что сокращает число эффективно взаимодействующих мод; такой подход наиболее конструктивен с физической точки зрения.

Кроме *возможности* нелинейного взаимодействия между волнами, важна еще и его эффективность, на языке спектрального представления определяемая коэффициентом нелинейного взаимодействия. Так, для плоской геометрии (одна координата в глубину бассейна и одна вдоль поверхно-

сти) возможны нетривиальные решения для системы условий (2) и (3), когда один из волновых векторов противоположен остальным, но при этом соответствующий коэффициент четырехволнового взаимодействия в уравнениях Захарова обращается в ноль [10]. Такое свойство, в частности, исключает возможность возникновения волн навстречу в результате резонансных нелинейных четырехволновых взаимодействий, если изначально все волны бежали в одном направлении [11]. (Как выяснилось недавно, коэффициент взаимодействия обращается в ноль, даже если выполняется только условие на волновые числа (2), когда одна из волн противоположна остальным [12].)

Однако для эволюции волн огромное значение играют и квазирезонансные (почти резонансные) взаимодействия, когда условия (2) и (3) выполняются между спектральными волновыми компонентами приближенно. Так, было показано, что наиболее эффективный энергообмен в модулированных волнах происходит при неточном выполнении резонансных соотношений [13], а искусственное исключение из рассмотрения точных резонансов (при сохранении приближенных) не изменяет динамику волн существенно [14]. Модуляционная неустойчивость (т. е. рост длинных модуляций волн) является доминирующим типом неустойчивости на глубокой воде для не слишком крутых волн, и это — квазирезонансный процесс. Подчеркнем, что под резонансными подразумеваются условия (2) и (3) для линейных параметров волн (волновых векторов и частот), связанных дисперсионным соотношением (1). Частота нелинейных волн заданной длины изменяется под действием нелинейности, что приводит к изменению и «размыванию» условий резонансов. Таким образом, при моделировании эволюции волн на дискретных сетках в фурье-пространстве выбор узлов сетки оказывается не столь требовательным к точному учету резонансных волновых конфигураций [15]. С другой стороны, недостаточно мелкая сетка узлов в пространстве Фурье может приводить к нефизическим результатам [16]. При решении кинетических уравнений стараются выбирать расположение узлов сетки волновых векторов в соответствии с резонансными условиями.

В этой статье рассматриваются картины спектров Фурье, построенные по результатам прямого численного моделирования исходных (динамических) уравнений потенциальной гидродинамики (уравнений Эйлера) в пренебрежении эффектами накачки и диссипации. Изучаются волны на бесконечно глубокой воде (эффект конечности глубины обсуждается отдельно в разделе 6) в двумерной геометрии (вертикальная ось Oz и одна горизонтальная координата x вдоль движения волн). Система уравнений представлена уравнением Лапласа для потенциала скорости жидкости $\varphi(x, z, t)$ в толще воды, ограниченной поверхностью $\eta(x, t)$,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad z \leq \eta, \quad (4)$$

с условием спадания решения на глубине,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty, \quad (5)$$

и нелинейными граничными условиями на поверхности:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad z = \eta, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right], \quad z = \eta. \quad (7)$$

Здесь введено обозначение для потенциала на поверхности воды $\Phi(x, t) \equiv \Phi(x, z = \eta(x, t), t)$.

Для моделирования системы (4)—(7) в разделах 2, 5 и 6 применен популярный подход High Order Spectral Method (HOSM, [17]), который использует разложение потенциала скорости вблизи поверхности в ряд Тейлора заданного порядка $M = 6$ (точный учет вплоть до семиволновых взаимодействий) и позволяет рассчитывать довольно крутые волны (до крутизны порядка $\varepsilon = 0,3$ и более, где $\varepsilon = kH/2$, H — высота волны). Код обладает высокой производительностью, поскольку уравнение Лапласа (4) оказывается записанным для неизменяемой во времени области и не требует решения на каждом шаге. Формально алгоритм не имеет ограничений на ширину спектра волн, но из-за конечной точности компьютерных расчетов можно ожидать погрешности описания волн со слишком широким спектром (из-за очень быстрого спада полей коротких волн с возмущенного уровня поверхности $z = \eta$ к уровню $z = 0$). Численные эксперименты в разделе 4 выполнены в рамках полных потенциальных уравнений Эйлера в конформных переменных [18].

В океанографии понятие спектра вводится через автокорреляционные функции для смещения поверхности, и в общем случае вычисление спектров по данным натуральных экспериментов представляет собой нетривиальную задачу [4]. В предположении эргодичности и стационарности спектр волнения может быть равносильно записан через преобразование Фурье в силу теоремы Хинчина — Колмогорова (или Винера — Хинчина, Wiener-Khinchin theorem). Для наших целей будем определять амплитудный пространственно-временной спектр S посредством преобразования Фурье:

$$S(k, \omega) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x, t) e^{-i\omega t + ikx} dx dt \right|. \quad (8)$$

Здесь функция координаты и времени $\eta(x, t)$ есть рассчитанное смещение поверхности. Поскольку поле $\eta(x, t)$ действительно, из (8) очевидно, что полученный образ Фурье обладает симметрией: $S(-k, -\omega) = S(k, \omega)$, потому одна половина плоскости волновых чисел и частот содержит всю инфор-

мацию о волнах (далее будем рассматривать половину $\omega > 0$). Спектр волновых чисел S_k определяется после интегрирования энергетического спектра S^2 по частотам:

$$S_k^2(k) = \int_0^{\infty} S^2 d\omega, \quad (9)$$

а частотные спектры для волн, бегущих вправо и влево, определяются следующими соотношениями:

$$S_{\omega+}^2(\omega) = \int_0^{\infty} S^2 dk, \quad S_{\omega-}^2(\omega) = \int_{-\infty}^0 S^2 dk. \quad (10)$$

Вычисление пространственно-временного спектра Фурье позволяет различить волны, бегущие в разных направлениях.

В настоящей работе случайное морское волнение моделируется расчетом эволюции нерегулярных волн во времени в рамках динамических уравнений. При этом начальные условия выбираются в виде последовательностей волн с заданным профилем амплитуд спектра Фурье (см. раздел 5), а его комплексные фазы выбираются случайным образом.

1. Построение пространственно-временных спектров.

Пример линейной задачи

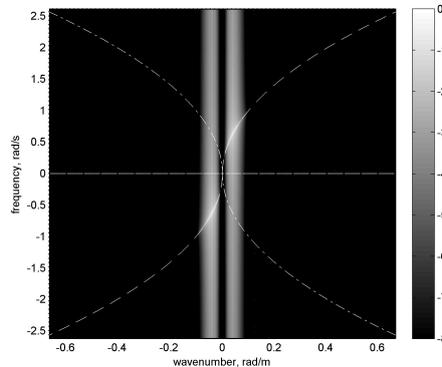
Численное моделирование выполняется на периодическом пространственном интервале L с пространственным разрешением Δx в течение некоторого времени T , потому преобразование Фурье по координате от функции $\eta(x, t)$ периодически по оси волновых чисел с периодом $2\pi/\Delta x$. Сохранение результатов вычислений происходит с одинаковым шагом по времени Δt , что также обеспечивает повторяемость спектра $S(k, \omega)$ вдоль оси частот с периодом $2\pi/\Delta t$.

На рис. 1 приведен пример вычисленного двойного преобразования Фурье от поля нерегулярных волн, эволюция которых рассчитана в рамках линейной теории (т. е. каждая компонента с заданным волновым числом осциллировала с периодом, определяемым дисперсионной зависимостью (1)). Начальное условие характеризовалось гауссовым профилем спектра волновых чисел с пиковым волновым числом $k_p \approx 0,04$ рад/м, что соответствует периоду волн $T_p = 10$ с; было рассчитано 100 реализаций со случайными фазами. Яркостью цвета на рис. 1 построен десятичный логарифм от нормированного амплитудного спектра Фурье,

$$\log_{10} \frac{S}{\max_{k, \omega} S}, \quad (11)$$

соответствующая цветовая кодировка для значений относительных амплитуд Фурье до 10^{-8} (одинарная точность компьютера) указана справа от

Рис. 1. Пример распределения десятичного логарифма от нормированного амплитудного спектра Фурье (11) на плоскости волновых чисел (горизонтальная ось) и частот (вертикальная ось) для линейной задачи. Пунктир — дисперсионная зависимость (1) для волн, бегущих вдоль оси Ox , штрихпунктирная линия — для волн, бегущих в противоположном направлении



рисунка. Линиями показана дисперсионная зависимость (1) для попутных (длинный пунктир) и встречных (штрихпунктир) волн. Как было отмечено выше, рисунок антисимметричен относительно каждой из осей. Из-за отсутствия периодичности анализируемого поля по времени ($\eta(x, t + T) \neq \eta(x, t)$) спектр вдоль оси частот спадает медленно. По этой причине энергия на плоскости (k, ω) распределена аномально широко вдоль оси частот, что затрудняет интерпретацию изображения. Для снижения негативного влияния неперiodичности поля применялась скользящая сглаживающая маска Ханна (Hann, или Hanning window, [4]) по времени

$$W(t) = 0,5 \left[1 - \cos \frac{2\pi t}{T} \right], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (12)$$

Результат двойного фурье-преобразования того же поля $\eta(x, t)$, что на рис. 1, но домноженного на функцию $W(t)$, приведен на рис. 2 (построена только половина $\omega > 0$). Применение маски (12) позволяет усилить локализацию спектра по частотам (при этом длина интервала времени эффективно сокращается, поэтому несколько ухудшается разрешение по частоте вблизи максимума спектра), и теперь на рис. 2 можно видеть значительно более четко, что энергия волн распределена вдоль дисперсионной зависимости, показанной штриховой линией. В то же время на рис. 2 виден артефакт примененного метода

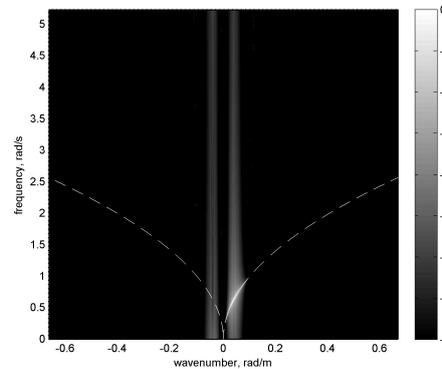


Рис. 2. Тот же спектр, что на рис. 1, но с применением маски Ханна

построения спектра: серая область на левой половине, $k < 0$, причина появления которой очевидна после сравнения с рис. 1. Она является не результатом физических эффектов, а исключительно следствием неперIODичности поля η на интервале времен T .

Графики спектров на рис. 1 и рис. 2 представляют тривиальный результат распределения энергии линейных волн на геометрическом месте дисперсионной зависимости на плоскости (k, ω) .

2. Одна нелинейная волна (волна Стокса)

Для реалистичного моделирования морской поверхности в последнее время широко применяются численные расчеты эволюции случайных (нерегулярных) волн с заданным начальным спектром (так называемое стохастическое моделирование). При этом начальное условие должно быть представлено суперпозицией нелинейных волн, что не имеет простого решения. В качестве первого приближения для задания начальных условий обычно используют линейное решение, которое тривиально записывается для любой композиции волн.

Рассмотрим элементарное нелинейное решение — простую волну, или волну Стокса, на глубокой воде. Кроме основной гармоники (k_0, ω_p) — из-за нелинейности линейное дисперсионное соотношение немного нарушается, $\omega_p > \omega_0$, $\omega_0^2 = gk_0$, — в результате нерезонансных взаимодействий возбуждаются и все кратные, $(nk_0, n\omega_p)$, с амплитудами, спадающими с ростом $n > 1$. Такое нелинейное решение может быть получено с помощью численных процедур для стационарных уравнений гидродинамики [19, 20]. Известны и аналитические разложения волны Стокса высокого порядка по гармоникам [21, 22], например разложение третьего порядка для поля смещения,

$$k_0\eta = \left(\varepsilon - \frac{3}{8}\varepsilon^3 \right) \cos(k_0x - \omega_p t) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos(2k_0x - 2\omega_p t) + \frac{3}{8}\varepsilon^3 \cos(3k_0x - 3\omega_p t) + O(\varepsilon^4), \quad (13)$$

$$\frac{\omega_p}{\sqrt{gk_0}} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4),$$

которые также могут быть использованы для тестовых задач.

На рис. 3 приведен пример амплитудного спектра Фурье, полученного в результате численного моделирования эволюции начального условия, заданного в виде линейной волны с крутизной $\varepsilon = 0,1$,

$$\eta(x, 0) = \varepsilon \frac{1}{k_0} \cos(k_0x), \quad \Phi(x, 0) = \varepsilon \frac{\omega_0}{k_0^2} \sin(k_0x), \quad (14)$$

где Φ есть потенциал скорости на поверхности, а k_0 и ω_0 связаны дисперсионным соотношением (1). В вычислительной области задавалось 8 периодов волн, что обеспечивало скважность спектра вдоль оси волновых чисел. Очевидно, что картина спектра на рис. 3 много богаче описанного выше решения для волны Стокса. Это связано с тем, что из начального условия рождается волна Стокса (со свойственным для нее распределением энергии по гармоникам), а разница между ней и начальным условием дробится на новые попутные и встречные волны Стокса с кратными волновыми числами. Кроме того, рожденные волны Стокса производят и комбинационные гармоники, что делает спектральную картину столь сложной. В итоге получившееся из (14) решение сильно отличается от желаемого. В случае достаточно большой крутизны начального условия генерация паразитных волн может быть заметна даже на глаз.

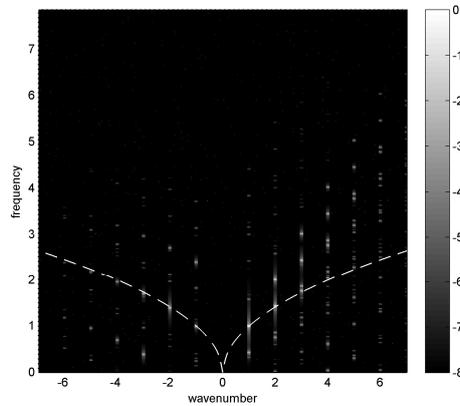


Рис. 3. Спектр Фурье по результатам расчета эволюции простой волны, заданной с использованием линейного решения (14). Волновые числа и частоты нормированы на k_0 и ω_0

Чтобы из линейного начального условия (14) родилась лишь одна волна Стокса с волновым числом k_0 , переход от линейного решения уравнений гидродинамики к нелинейному должен происходить адиабатически медленно, как было предложено в работе [23]. Такая процедура легко реализуется в рамках HOSM, поскольку нелинейные слагаемые в уравнениях (4)–(7) могут быть отделены от линейных. На рис. 4 показана картина спектра Фурье для той же задачи, что на рис. 3, но нелинейность включалась медленно в течение примерно 20 периодов волн. Для построения рис. 4 использовано поле волн, накопленное в течение более 100 периодов после 40 периодов от начала расчета. Видно, что структура спектра Фурье на рисунке полностью соответствует решению Стокса. На линии дисперсионной кривой расположено только одно пятно энергии (максимальное),

кратные (нерезонансные) гармоники лежат вне дисперсионной зависимости. Первую гармонику (k_0, ω_p) называют свободной (free, master) а остальные ($nk_0, n\omega_p$), $n = 2, 3, \dots$, связанными (bound, phase-locked, slave) компонентами волн (см. строгое описание в [24]).

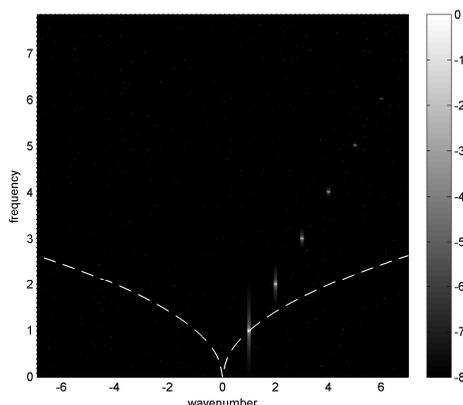


Рис. 4. Спектр по результатам расчета, аналогичного представленному на рис. 3, с медленно включаемыми нелинейными слагаемыми уравнений гидродинамики

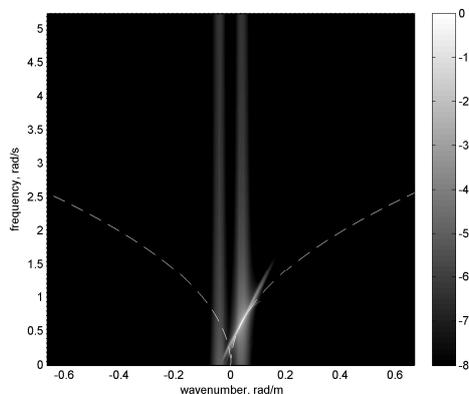
В канонических переменных гамильтонова подхода В. Е. Захарова (переменные b_k) динамическими уравнениями описываются свободные компоненты, а все остальные (квадратичные, кубические) находятся с помощью определенных преобразований. Производимое таким образом упрощение столь эффективно, что позволяет находить точные решения (хотя и приближенных) уравнений Захарова [25, 26].

3. Спектр нелинейных групп.

Условия синхронизма с линейными волнами

Для начала приведем картину пространственно-временного спектра Фурье по результатам расчета волн с относительно узким спектром в рамках нелинейного уравнения Шрёдингера (рис. 5). Это уравнение является первым приближением для слабо модулированных волн малой амплитуды и описывает амплитуду модуляций (см., например, [8, 27]). Начальные условия расчета соответствуют случаю, когда формируются солитоны огибающей — когерентные волновые группы, не расплывающиеся под действием дисперсии. На рис. 5 основная часть энергии волн расположена примерно на прямой, касательной к дисперсионной зависимости, которая не пересекает точку ($k = 0, \omega = 0$). То есть соответствующие компоненты энергии (k, ω) характеризуются одной групповой скоростью $V = d\omega(k)/dk$, которая не равна фазовой скорости ω/k .

Рис. 5. Спектр Фурье по результатам расчета эволюции волн в рамках нелинейного уравнения Шрёдингера, когда имело место возникновение солитонов огibaющей. Штриховыми линиями показана дисперсионная зависимость для волн на воде



Качественное объяснение картины спектра для нелинейных групп дано на схеме на рис. 6. Пусть волны заданы в некоторой области пространства с периодическими граничными условиями, тогда набор волновых чисел дискретен. Обозначим индексом 0 компоненту с максимальной энергией (кружок максимального диаметра на рис. 6), другие компоненты: ± 1 , ± 2 и т. д. (кружки меньших диаметров на рисунке) — обладают меньшей энергией. В случае линейной динамики (предел малых амплитуд) частоты компонент соответствуют линейному дисперсионному соотношению (сплошная кривая на рисунке). Все пятна энергии в системе располагаются на этой кривой, и резонансные условия (2) и (3) не выполняются. Под действием нелинейности частоты изменяются. Так, для волн на глубокой воде нелинейный сдвиг частоты положительный (стрелка на рисунке) и пропорционален крутизне во второй степени — см. разложение для частоты (13).

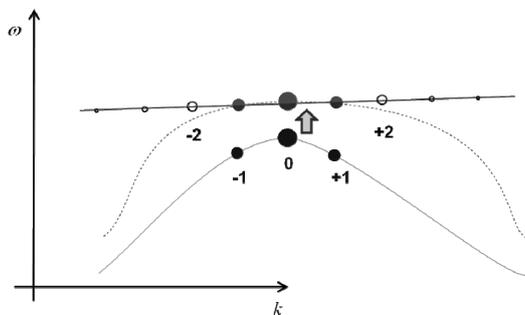


Рис. 6. Схематический рисунок формирования спектра нелинейной волновой группы со сдвигом частот компонент волн (по стрелке). Сплошной кривой показана линейная дисперсионная зависимость, пунктирной — эффективная «нелинейная» дисперсионная зависимость

В общем случае нелинейный сдвиг частоты отдельной пространственной гармоники определяется не только энергией, содержащейся в этой компоненте, но и другими гармониками. Подходящий (для эффективного энергообмена) закон нелинейного сдвига частот обеспечивает примерное выравнивание частот нескольких волновых компонент, так что начинают выполняться резонансные условия (2) и (3):

$$2k_0 = k_{-1} + k_{+1}, \quad 2\omega_0 = \omega_{-1} + \omega_{+1}, \quad (15)$$

и образуется самоподдерживающаяся когерентная группа (другим языком — одна мода модуляционной неустойчивости, или бризер). Квазирезонансное взаимодействие основных компонент дополняется нерезонансными типа $2k_{+1} = k_0 + k_{+2}$, $2\omega_{+1} = \omega_0 + \omega_{+2}$ или $2k_0 = k_{-2} + k_{+2}$, $2\omega_0 = \omega_{-2} + \omega_{+2}$ и т. д., что в итоге формирует спектр когерентной группы, вытянутый в плоскости (k, ω) вдоль прямой (на рис. 6 вдоль этой прямой заливкой показано распределение энергии в группе). Отметим, что в данном абзаце под частотами подразумеваются наблюдаемые («нелинейные»), а не следующие из дисперсионного соотношения (1). В центральной области спектра группы доминирует квазирезонансное взаимодействие; хвосты спектра определяются нерезонансными взаимодействиями, которые все вместе составляют когерентную структуру.

Полная картина процесса еще более сложная, поскольку возможны нелинейные эффекты более высоких порядков, эффективность взаимодействий определяется соответствующими коэффициентами взаимодействия, картина распределения энергии между квазирезонансными квартетами зависит от начальных условий (может возбуждаться много мод модуляционной неустойчивости).

Для представления степени реализуемости рассмотренного сценария важно отметить следующие моменты: 1) для описанной картины в принципе достаточно учета четырехволновых взаимодействий (например, в рамках нелинейного уравнения Шрёдингера, как на рис. 5); 2) численное моделирование полных уравнений [28, 29] и лабораторные эксперименты [30, 31] подтверждают существование долгоживущих солитоноподобных групп волн на поверхности глубокой воды даже в случае сильной нелинейности.

Известно, что если движущееся со скоростью V возмущение оказывается синхронно с волнами, $V = \omega/k$, то возможна генерация волн с этими параметрами (черенковское излучение). На рис. 7, *a* заливкой показана амплитуда спектра возмущения вдоль линии, соответствующей его скорости, $\omega = Vk$; кривая — дисперсионная зависимость волн. Кружки на рис. 7, *a* представляют точки синхронизма. В линейном рассмотрении удобно представить, что изменение амплитуды Фурье для каждого волнового числа описывается уравнением для гармонического осциллятора с внешней силой, частота и амплитуда которой задается спектром движущегося объекта на этом k . Синхронизм выполняется при совпадении собственной частоты

волны (определяемой дисперсионным соотношением $\omega(k)$) и частоты вынуждающей силы $\omega = V k$.

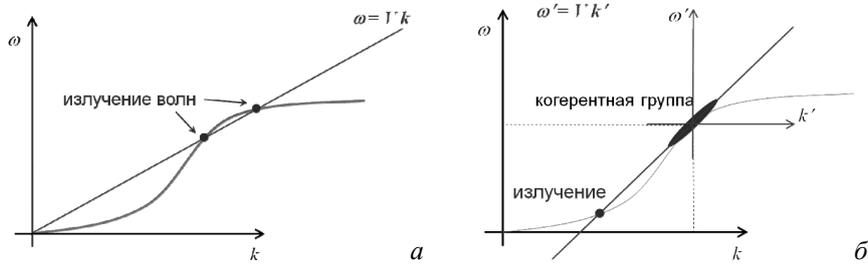


Рис. 7. Схематические рисунки излучения волн движущимся объектом (а) и нелинейной группой (б). Кривые линии соответствуют дисперсионным зависимостям волн, кружки — условиям синхронизма

Такая геометрическая интерпретация непосредственно переносится и на ситуацию нелинейной группы (рис. 7, б), спектральная амплитуда которой представлена заливкой. Запись эволюционного уравнения для огибающей группы соответствует переносу системы отсчета в плоскости (k, ω) , так что в системе (k', ω') группа не осциллирует ни во времени, ни в пространстве, а потому идентична стационарному возмущению, движущемуся со скоростью группы. Условия синхронизма тогда легко находятся (кружок на рис. 7, б), они могут быть выражены соотношением

$$V = \frac{\omega - \omega_0}{k - k_0}, \quad (16)$$

где V , k_0 и ω_0 — скорость, волновое число и частота группы соответственно.

Эффекты генерации волн движущимися нелинейными группами (квазисолитонами огибающей) хорошо известны в задачах нелинейной оптики (см. статью А. В. Юлина «Резонансное взаимодействие квазилинейных волн с оптическими солитонами и генерация суперконтинуума в нелинейных оптических волокнах с дисперсией» в настоящем сборнике, с. 84—99), но ранее не обсуждались в приложении к гравитационным волнам на поверхности воды.

4. Резонансное взаимодействие между волнами и нелинейными группами на глубокой воде

Для исследования волновых взаимодействий в условиях сильной нелинейности была выполнена серия расчетов нелинейной самомодуляции волн [32]. Вычисления проводились в рамках полных потенциальных уравнений гидродинамики (4)—(7) без дополнительных приближений (в конформных переменных [18]). Начальные условия задавались в виде

цуга волн Стокса (их профили находились численно и могут считаться точными) на периодическом интервале с таким соотношением между крутизной волны ε и числом волн N_w в области расчета, что могла развиваться только одна мода модуляционной неустойчивости. То есть реализовалась конфигурация, показанная на рис. 6, когда одна компонента несущей волны и два спектральных сателлита формируют один квазирезонансный квартет и волновая динамика относительно проста для интерпретации. Модуляция (спектральные сателлиты) развивалась из численного шума, связанного с ограничением точности представления числа в компьютере, с уровня амплитуды $10^{-15} \dots 10^{-16}$ от спектрального максимума, как показано на рис. 8. На рисунке построена эволюция во времени пространственного спектра Фурье (величины (11) для S_k). В начальный момент спектр гребенчатый и описывает цуг из $N_w = 6$ волн Стокса с волновым числом k_0 и крутизной $\varepsilon = k_0 H/2 = 0,07$. Рост модуляций долгое время остается незаметным в физическом пространстве, но спустя почти 4000 периодов T_0 спектр резко уширяется, что соответствует возникновению сильно модулированной группы. Далее происходит демодуляция волн, а затем повторяющиеся циклы модуляции-демодуляции (такая динамика связана с утечкой энергии из резонансного квартета, как обсуждается в работе [33]).

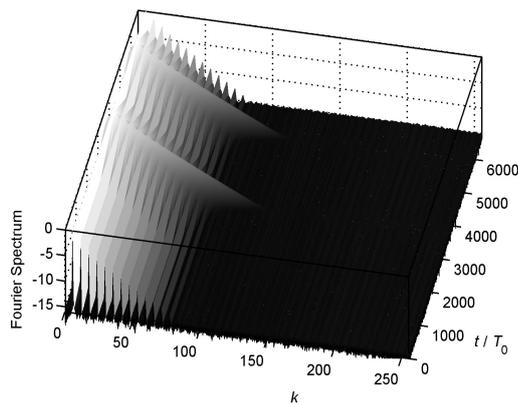


Рис. 8. Эволюция пространственного спектра Фурье (десятичного логарифма от нормированного амплитудного спектра) во времени для случая $N_w = 6$, $\varepsilon = 0,07$

Зависимость максимума смещения поверхности от времени приведена на рис. 9 (см. вклейку между с. 144 и 145). Заливкой показаны три выборки по времени, для которых строились пространственно-временные спектры Фурье (будем их нумеровать последовательно римскими цифрами), приведенные на рис. 10 (см. вклейку): в момент первой фокусировки (II), в момент посередине двух последовательных фокусировок (III) и в момент до первой фокусировки (I), такой, что промежуток времени между моментами (I) и (II) примерно равен промежутку между моментами (II) и (III).

В первой выборке (рис. 10, *a*) модуляция волн еще не заметна (см. профиль цуга в левом верхнем квадранте), но спектральные сателлиты, соответствующие модуляции, хорошо видны в пространственном и частотном спектрах по отдельности (S_k построен по верхнему краю белой линией в логарифмических координатах, $S_{\omega+}$ построен по правому краю рисунка) и на плоскости (k, ω) . Модуляция выражается в появлении спектральных сателлитов как для основной гармоники, так и для кратных; также видно формирование длинноволновой (разностной) компоненты модуляции, выходящей из точки $k = 0, \omega = 0$ (при этом среднее значение смещения поверхности на компоненте $k = 0$ не может возникнуть в силу сохранения массы жидкости, $S(0, 0) \equiv 0$). В спектре S_k виден небольшой пик при $k = -k_0$, который является артефактом обработки, схожим с ненулевыми значениями спектра в области $k < 0$ на рис. 2.

Рисунок 10, *b* соответствует интервалу времени максимальной само-модуляции волн (см. профиль в левом верхнем квадранте) и уширения спектра. В спектре на рис. 10, *b* видно большое количество возбужденных сателлитов для разных гармоник, которые вытянуты в параллельные линии на плоскости (k, ω) качественно схоже с примером расчета приближенного нелинейного уравнения Шрёдингера на рис. 5. Заметим, что линия пятен энергии на плоскости (k, ω) протягивается на рис. 10, *b* в область встречных волн, $k < 0$, ей соответствует пятно, расположенное примерно на дисперсионной кривой для встречных волн. Соответствующие пики можно видеть и на функциях S_k при $k < 0$ и $S_{\omega-}$ (у левого края). Что более существенно, на стадии демодуляции III (рис. 10, *в*) кроме пятен энергии, соответствующих слабой модуляции основной волны, сохраняется спектральный пик, ответственный за встречную волну с волновым числом $k = -1/6k_0$. Он виден также и на спектрах S_k и $S_{\omega-}$. При более тщательном анализе построенных спектров можно найти и комбинационные гармоники, вызванные нерезонансным взаимодействием между основной и встречной волнами.

Рисунок 10 говорит о наличии процесса излучения волн назад сильно модулированной группой в согласии с условием (16). С учетом ранее упоминавшегося запрета генерации волн назад в результате четырехволновых взаимодействий [11, 12] можно предположить, что рис. 10, *b* свидетельствует о более высоком порядке нелинейности, ответственном за генерацию волн навстречу.

Случаи эволюции еще более крутых волн представлены на рис. 11 и рис. 12 (см. вклейку). Одновременно с увеличением крутизны ϵ уменьшалось число волн в модулированном цуге N_w , чтобы возбуждалась лишь одна мода модуляции (картина модуляционной неустойчивости в полных

уравнениях гидродинамики была рассмотрена в работе [34]). На рис. 11, *a* и рис. 12, *a* показаны спектры для стадий наибольшей модуляции волн II, а на рис. 11, *b* и рис. 12, *b* — стадии последующей демодуляции III. На рис. 11 также видна генерация встречной волны с $k = -1/2k_0$, но не спектральной линией, ответственной за уширение спектра свободной волны (т. е. огибающей первой гармоники), а линией, ответственной за вторую гармонику.

На рис. 12 генерации встречных волн не видно, что, вероятно, говорит о большой роли дискретности набора волновых чисел, которая ведет к неэффективности генерации волн, находящихся в неполном синхронизме с когерентной модулированной группой. В то же время на рис. 12, *b* видна генерация новой попутной волны с волновым числом $k = 11/3k_0$ уширенной линией нелинейной разностной компоненты. Легко получить, что в предположении малой нелинейности волн с дисперсией (1) пересечение линии разностной гармоники с дисперсионным соотношением должно происходить в точке $(4k_0, 2\omega_0)$, что близко к наблюдаемой на рис. 12, *b* картине.

Заметим, что на рис. 11, *a* и рис. 12, *a* видны линии пятен энергии, начинающиеся в точке $(k = k_0, \omega = 0)$. Если обратиться к рис. 1, становится понятно, что это не артефакт обработки, а физический процесс: достаточно уширенная линия модуляции первой гармоники волны может оказываться синхронной с гораздо более короткими попутными волнами.

Для учета отраженных на рис. 11 и рис. 12 условий синхронизма нелинейных гармоник сильно модулированных групп волн с линейными волнами классическое резонансное условие черенковского типа (16) должно быть дополнено до вида

$$V = \frac{\omega - m\omega_0}{k - mk_0}. \quad (17)$$

Здесь целое число $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ нумерует ветвь возможного синхронизма.

5. Спектры нерегулярных нелинейных волн

Заметим, что рассмотренные выше волновые условия очень идеализированы и далеки от условий моря. Примеры пространственно-временных спектров, наблюдаемых в компьютерных экспериментах по моделированию нерегулярных однонаправленных волн с реалистичными для моря параметрами, приведены на рис. 13. В этих численных экспериментах условия соответствуют параметризованному на основе натуральных измерений в Северном море спектру JONSWAP [35], который имеет довольно сложный вид:

$$S(\omega) \propto \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{-5} \exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{-4}\right] \gamma^\delta, \quad \delta = \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{\omega-\omega_p}{\omega_p}\right)^2\right], \quad (18)$$

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} 0,07, & \omega < \omega_p, \\ 0,09, & \omega > \omega_p, \end{cases}$$

и характеризуется параметрами доминирующего периода волн $T_p = 2\pi/\omega_p$ и пиковатостью γ . Интенсивность волнения обычно выражают так называемой значительной высотой волн H_s , определяемой как среднее от трети наиболее высоких волн в выборке.

Из-за медленного спада спектра (18) в высокочастотной области и тенденции крутых волн к обрушению (которое не может быть описано гладкими решениями уравнений (4)—(7)) при моделировании интенсивных нерегулярных волн в численные алгоритмы зачастую вводится гипервязкость или спектральные фильтры, приводящие к поглощению энергии в области малых масштабов.

На рис. 13, *a* и *б* показаны спектры для условий, похожих по характерному периоду волн и пиковатости, но отличающихся по интенсивности волн. Во втором случае характерная высота волн H_s в 2 раза выше, чем в первом. В расчетах, представленных на рис. 13, *б*, использовалась гипервязкость для предотвращения обрушению волн, влияние которой на подавление волн с большими k хорошо видно в спектре. В расчетах на рис. 13, *a* она не применялась. Подробности моделирования приведены в статьях [36, 37].

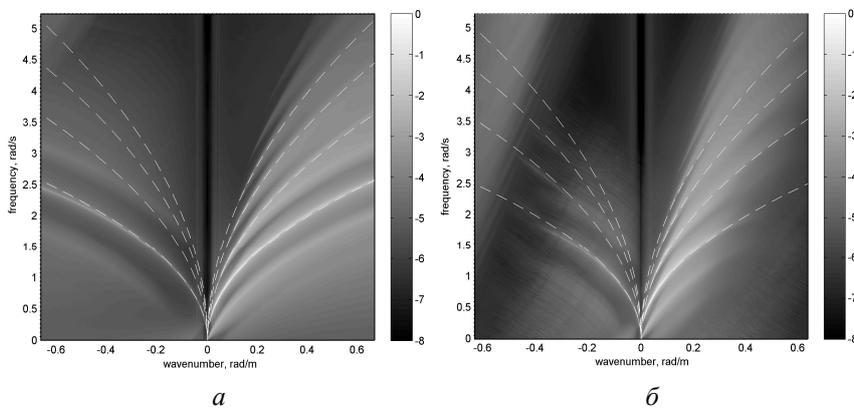


Рис. 13. Пространственно-временные спектры нерегулярных волн с частотными спектрами JONSWAP и параметрами $H_s = 3,5$ м, $T_p = 10$ с, $\gamma = 3$ (*a*) и $H_s = 7$ м, $T_p = 10,5$ с, $\gamma = 3,3$ (*б*). Штриховыми линиями показана дисперсионная зависимость и геометрические места первых трех кратных гармоник

Из рис. 13 следует, что области распределения энергии по плоскости (k, ω) более обширны, чем в рассмотренных в предыдущих разделах примерах. Можно сделать следующие общие заключения. Основная доля энергии расположена вдоль (в некоторой окрестности) дисперсионной кривой. Области, ответственные за кратные гармоники (на представленных рисунках различается до 6—7 гармоник), в целом следуют предписанным им положениям $(nk, n\omega(k))$, где $n = 2, 3, 4, \dots$ и $\omega(k)$ определяется зависимостью (1). Кратные и разностная гармоники размыты, но довольно хорошо отделены друг от друга и от основной компоненты даже в случае большой нелинейности. На спектре различимы встречные волны, хотя для инициализации численного моделирования был применен описанный в разделе 2 метод медленного включения нелинейности. Видно, что их фактические дисперсионные зависимости несколько ниже решения (1), что связано с присутствием в системе интенсивных волн. На рис. 13, б (и в существенно меньшей степени на рис. 13, а) в левом верхнем квадранте присутствует артефакт обработки — переналожение периодического по частоте спектра через верхний край построенной области из-за недостаточно быстрого его спада вдоль оси ω .

На рис. 14 приведен пространственно-временной спектр для нерегулярных волн с высотами и периодами, схожими со случаем на рис. 13, б, но для значительно более узкого гауссового спектра начальных условий. Картина на рис. 14 сильно отличается от рис. 13, б, но в качественном плане совпадает с расчетом в рамках слабо нелинейной модели на рис. 5, а также с картинками сильно модулированных волн в рамках полных уравнений в разделе 4. Из-за того, что волны крутые, а спектр достаточно узкий, выполняются условия, благоприятные для развития нелинейной самомодуляции. По этой причине в поле нерегулярных волн формируются когерентные группы типа солитонов огибающей, которые и формируют спектр, состоящий из полос на плоскости (k, ω) . Кратные и разностная гармоники пересекают кривую дисперсионного соотношения во многих местах, обеспечивая выполнение условия синхронизма (17) для многих длин волн.

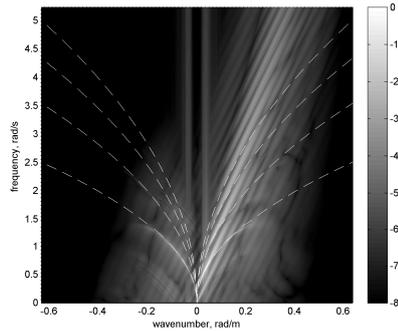


Рис. 14. Пространственно-временные спектры нерегулярных волн с узким гауссовым спектром, периодом $T_p = 10$ с и значительной высотой $H_s = 7$ м. Штриховыми линиями показана дисперсионная зависимость и геометрические места первых трех кратных гармоник

Примеры на рис. 13 и рис. 14 представляют собой крайние случаи, но могут реализоваться и промежуточные, когда выделяются два типа пятен энергии на плоскости (k, ω) : примерно следующие дисперсионной зависимости и вытянутые вдоль касательной к ней. Отметим, что при сопоставлении между собой волновых систем, характеризуемых одинаковой полной энергией, но представленных когерентными группами либо распределенными диспергирующими волнами, первые отличаются большей нелинейностью, а потому должны сильнее проявляться в областях кратных гармоник (больших частот), где представляются прямыми линиями.

6. Эффект конечной глубины

Результаты, представленные в предыдущих разделах, получены для случая бесконечно глубокой воды. С учетом конечной глубины h дисперсионная зависимость (1) должна быть заменена на общеизвестный закон дисперсии для волн на поверхности воды постоянной глубины

$$\omega = \sqrt{gk \tanh kh}. \quad (19)$$

Изменение дисперсионной зависимости приводит к изменению конфигураций возможных межволновых взаимодействий. В частности, на мелкой воде возрастает, а потом и доминирует роль трехволновых нелинейных эффектов, которые имеют значительно более короткий временной масштаб, чем четырехволновые (пропорциональный ε^{-1} вместо ε^{-2}).

Изменение нелинейных взаимодействий волн при уменьшении глубины бассейна приводит к существенной модификации картины расположения энергии на плоскости (k, ω) . На рис. 15 показаны распределения энергии на пространственно-временных спектрах, построенные на основании численного моделирования нерегулярных волн с начальными условиями, заданными в соответствии со спектром JONSWAP с параметрами $H_s = 7$ м, $T_p = 10,5$ с, $\gamma = 3,3$. Показаны результаты для четырех значений безразмерной глубины $k_p h$ (здесь k_p есть волновое число, соответствующее пиковой частоте ω_p согласно (19)). Распределения для каждого случая на рис. 15 построены посредством усреднения 100 реализаций волн в областях размером 10 км, рассчитанных в течение 20 мин (см. подробности вычислений в [38]). Для повышения контрастности рисунков для закрашки применено три цвета: черный для амплитуд Фурье от максимальной до 0,1 от максимума, темно-серый — для диапазона 0,1...0,01, и светло-серый для амплитуд от 0,01 до 0,001 от максимальной. Показаны только области вблизи максимума спектра.

На рис. 15 явно видны различия в характерных картинах спектра. С уменьшением глубины область третьей гармоники спускается ниже по оси частот и почти сливается со второй гармоникой при $kh = 1,2$ (рис. 15, z).

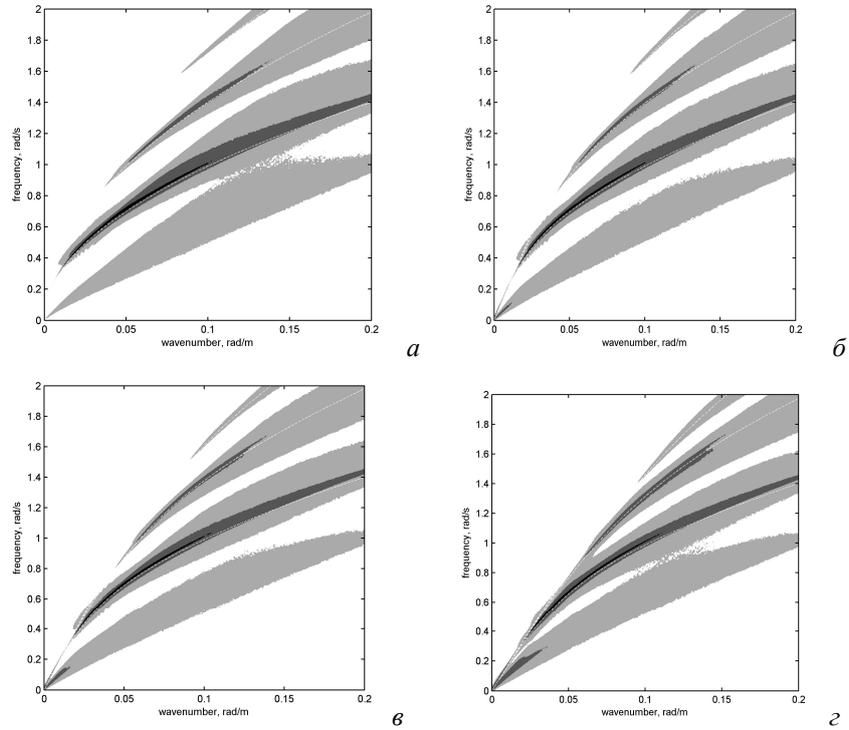


Рис. 15. Пространственно-временные спектры нерегулярных волн с частотными спектрами JONSWAP и параметрами $H_s = 7$ м, $T_p = 10,5$ с, $\gamma = 3,3$ для различных глубин: бесконечной (а), $k_p h = 2$ (б), $k_p h = 1,6$ (в) и $k_p h = 1,2$ (г). Усреднение по 100 реализациям. Белым пунктиром показана дисперсионная зависимость и геометрические места кратных гармоник

На этой глубине области первой, второй и разностной гармоник соединяются вдоль линии, соответствующей пределу длинных волн $\omega = (gh)^{1/2}k$. Интенсивность разностной гармоники (ответственной за изменение среднего уровня нелинейных групп) увеличивается с уменьшением глубины. При дальнейшем уменьшении глубины области разных гармоник объединяются еще больше, так что разделение на «свободную» и «связанные» волновые компоненты становится все более затруднительным, вынужденные гармоники могут стать квазирезонансными. При такой перестройке условное разложение волнового поля на слабо взаимодействующие гармоники (используемое для построения моделей огибающей) становится невозможным.

Заключение

Построенные портреты нелинейных волн могут выглядеть довольно сложно, но при этом обладают общими характерными свойствами, что позволяет сделать полезные выводы. Компонента свободных волн локализована примерно вдоль дисперсионной кривой. Во всех рассмотренных в настоящей работе случаях реалистичных волн на глубокой воде спектральные области, соответствующие основной гармонике, кратным и разностной гармоникам хорошо разнесены на плоскости (k, ω) , что делает представление волнового поля в виде суперпозиции взаимодействующих гармоник эффективным. При этом имеются в виду пространственно-временные (а не пространственные или временные) гармоники. В частотном или пространственном спектрах Фурье гармоники могут сильно перекрываться (кривые на рис. 10, *b*, рис. 11, *a* и рис. 12, *a*), но они остаются хорошо разнесены в пространстве (k, ω) . Этим обстоятельством может отчасти объясняться неожиданно хорошее описание сильно нелинейных сильно модулированных поверхностных волн приближенными по нелинейности моделями для огибающей: уравнениями Захарова для широкого спектра [39] и даже уравнениями для длинных модуляций типа нелинейного уравнения Шрёдингера и его обобщениями [29—31].

Кроме образования в спектре комбинационных (в частности, кратных и разностных) гармоник, можно отметить действие нелинейности по размыванию областей локализации энергии в пространстве Фурье: нелинейный сдвиг частоты и появление пятен энергии примерно по касательной к дисперсионной кривой из-за образования когерентных групп. Особо ярко эффекты переналожения спектральных гармоник проявляются при сильной самомодуляции волн, когда возможны множественные синхронизмы между линейными волнами и как свободными, так и связанными компонентами волн, составляющих нелинейные когерентные группы. В результате могут возникать новые волны с различными длинами, распространяющиеся как в попутном, так и во встречном направлении. Их амплитуды довольно малы: для случаев самомодуляции волны Стокса, представленных на рис. 10—12, соответствующие амплитуды Фурье в пространстве (k, ω) составляют до порядка 10^{-5} от амплитуды волны несущей (см. [32]), а для нерегулярных волн с узким спектром на рис. 14 — до порядка 10^{-3} (для излучения вперед с вчетверо более короткой волной).

Отметим, что интенсивность пятен энергии на приведенных в работе рисунках может не всегда давать верное представление об их значимости, поскольку спектр Фурье представляет собой результат усреднения по области пространства и времени. Так, компоненты кратных гармоник в физическом пространстве больше всего выражены в местах интенсивных волн, где дают значительный вклад в амплитуды волн. Особенности проявления кратных гармоник от когерентных нелинейных групп и некоге-

рентных волн отмечалась в разделе 5. Для определения полных энергетических вкладов различных компонент необходимо производить интегрирование по соответствующим областям в пространстве Фурье.

Как отмечалось выше, рассмотренные условия плоской геометрии соответствуют, вообще говоря, вырожденному случаю нелинейных взаимодействий волн. В частности, при эволюции коллинеарных нерегулярных волн характерный временной масштаб определяется кубической нелинейностью, $\sim \varepsilon^{-2}$ (динамический масштаб), а кинетический масштаб эволюции $\sim \varepsilon^{-4}$, хорошо известный для уравнений Хассельмана, не проявляется [40]. С другой стороны, априори не очевидно, почему описанные в настоящей работе эффекты генерации новых волн не могут наблюдаться в трехмерном случае. Масштаб времени $\varepsilon^{-2}T_p$ для присущих открытому океану величин $\varepsilon \approx 0,1$ и $T_p \approx 10$ с примерно соответствует интервалу квазистационарности ~ 20 мин, учитываемому при нарезке непрерывных записей смещения на статистически однородные выборки.

В выполненных нами предварительных численных экспериментах по моделированию трехмерных нерегулярных волн с частотным спектром JONSWAP (типа описанных в разделе 5 для двумерной геометрии) наблюдались ключевые особенности спектров Фурье, отмеченные в настоящей работе. А именно, области в трехмерном пространстве (\mathbf{k}, ω) , занимаемые основной, разностной и кратными гармоникам, оказываются хорошо разнесенными. Наблюдалось возникновение встречных волн из первоначально однонаправленных (амплитуды соответствующих гармоник Фурье составляют примерно 10^{-3} от амплитуды наиболее энергоемкой гармоники). Для определенных условий было обнаружено формирование пятен энергии, ориентированных по касательной к поверхности дисперсионного соотношения (1), свидетельствующих о возникновении когерентных волновых групп в трехмерных полях волн. Таким образом, разобранная здесь картина спектров Фурье нелинейных морских волн в значительной степени помогает составить представление и о случае трехмерных волн.

Традиционно исследование спектров волн на основе измерений ограничивалось частотными спектрами (временные последовательности измерений) или спектрами волновых чисел (анализ моментальных профилей). Благодаря развитию инструментальной базы, в последние годы появляются работы по непосредственному измерению пространственно-временных спектров волн на воде [41—47], и качество таких измерений улучшается. Потому в скором времени должна появиться возможность сопоставить продемонстрированные в настоящей работе спектры волн с результатами прямых натурных измерений.

Автор благодарен С. И. Бадулину и Е. Н. Пелиновскому за ценные замечания. Разделы 5 и 6 выполнены при поддержке гранта РФФИ 16-55-52019; остальные разделы — при поддержке гранта РНФ 16-17-00041.

Литература

1. Давидан, И. Н. Ветровое волнение как вероятностный гидродинамический процесс / И. Н. Давидан, Л. И. Лопатухин, В. А. Рожков. — Л. : Гидрометеоздат, 1978. — 287 с.
2. Лопатухин, Л. И. Ветровое волнение : учеб. пособие / Л. И. Лопатухин. — 2-е изд., доп. — СПб. : БВМ, 2012. — 165 с.
3. Young, I. R. Wind generated ocean waves / I. R. Young. — Amsterdam [etc.] : Elsevier, 1999. — 288 p.
4. Massel, S. R. Ocean surface waves: their physics and prediction / S. R. Massel. — Singapore : World Scientific Publ., 1996. — 491 p.
5. Holthuijsen, L. H. Waves in oceanic and coastal waters / L. H. Holthuijsen. — Cambridge : Cambridge University Press, 2007. — 387 p.
6. Sverdrup, H. V. Wind, sea, and swell: theory of relations for forecasting / H. V. Sverdrup, W. H. Munk. — Hydrographic Office Pub. № 601. — 1947. — 56 p.
7. Филлипс, О. М. Динамика верхнего слоя океана / О. М. Филлипс. — Л. : Гидрометеоздат, 1980. — 320 с.
8. Рабинович, М. И. Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. — М. : Наука, 1984. — 430 с.
9. Kartashova, E. Nonlinear resonance analysis: theory, computation, applications / E. Kartashova. — Cambridge : Cambridge University Press, 2010. — 240 p.
10. Zakharov, V. Statistical theory of gravity and capillary waves on the surface of a finite-depth fluid // Eur. J. Mech. B/Fluids. — 1999. — Vol. 18. — P. 327—344.
11. Dyachenko, A. I. About compact equations for water waves / A. I. Dyachenko, D. I. Kachulin, V. E. Zakharov // Natural Hazards. — 2016. — Vol. 84. — P. 529—540.
12. Dyachenko, A. I. Super compact equation for water waves / A. I. Dyachenko, D. I. Kachulin, V. E. Zakharov // J. Fluid Mech. — 2017. — Vol. 828. — P. 661—679.
13. Stiassnie, M. On the interaction of four water-waves / M. Stiassnie, L. Shemer // Wave Motion. — 2005. — Vol. 41. — P. 307—328.
14. Annenkov, S. Y. Role of non-resonant interactions in the evolution of nonlinear random water wave fields / S. Y. Annenkov, V. I. Shrira // J. Fluid Mech. — 2006. — Vol. 561. — P. 181—207.
15. Korotkevich, A. O. Numerical simulation of surface waves instability on a discrete grid / A. O. Korotkevich, A. I. Dyachenko, V. E. Zakharov // Physica D. — 2016. — Vol. 321/322. — P. 51—56.
16. Zakharov, V. E. Mesoscopic wave turbulence / V. E. Zakharov, A. O. Korotkevich, A. N. Pushkarev, A. I. Dyachenko // Письма в ЖЭТФ. — 2005. — Т. 82. — С. 544—548.
17. West, B. J. A new numerical method for surface hydrodynamics / B. J. West, K. A. Brueckner, R. S. Janda, D. M. Milder, R. L. Milton // J. Geophys. Res. — 1987. — Vol. 92. — P. 11803—11824.
18. Zakharov, V. E. New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface / V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, O. A. Vasilyev // Eur. J. Mech. B/Fluids. — 2002. — Vol. 21. — P. 283—291.
19. Cokelet, E. D. Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth // Phil. Trans. Roy. Soc. London A. — 1977. — Vol. 286. — P. 183—230.

20. *Clamond, D.* Accurate fast computation of steady two-dimensional surface gravity waves in arbitrary depth / D. Clamond, D. Dutykh // *J. Fluid Mech.* — 2018. — Vol. 844. — P. 491—518.
21. *Fenton, J. D.* A fifth-order stokes theory for steady waves // *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.* — 1985. — Vol. 111. — P. 216—234.
22. *Lautrup, B.* Stokes waves : [доп. материалы к *Physics of Continuous Matter : Exotic and Everyday Phenomena in the Macroscopic World.* — Second Edition. — New York : CRC Press, 2011]. — Режим доступа: <http://www.lautrup.nbi.dk/continuousmatter2/addenda/stokeswaves.pdf>. — Заг. с экрана.
23. *Dommermuth, D.* The initialization of nonlinear waves using an adjustment scheme // *Wave Motion.* — 2000. — Vol. 32. — P. 307—317.
24. *Krasitskii, V. P.* On reduced equations in the Hamiltonian theory of weakly nonlinear surface waves // *J. Fluid Mech.* — 1994. — Vol. 272. — P. 1—20.
25. *Badulin, S. I.* On two approaches to the problem of instability of short-crested waves / S. I. Badulin, V. I. Shrira, Ch. Kharif, M. Ioualalen // *J. Fluid Mech.* — 1995. — Vol. 303. — P. 297—326.
26. *Annenkov, S. Yu.* Sporadic wind wave horse-shoe patterns / S. Yu. Annenkov, V. I. Shrira // *Nonlin. Proc. Geophys.* — 1999. — Vol. 6. — P. 27—50.
27. *Johnson, R. S.* A modern introduction to the mathematical theory of water waves / R. S. Johnson. — Cambridge : Cambridge University Press, 1997. — 445 p.
28. *Dyachenko, A. I.* On the formation of Freak Waves on the surface of deep water / A. I. Dyachenko, V. E. Zakharov // *Письма в ЖЭТФ.* — 2008. — Т. 88. — С. 356—359.
29. *Слюняев, А. В.* Численное моделирование «предельных» солитонов огибающей гравитационных волн на глубокой воде // *ЖЭТФ.* — 2009. — Т. 136. — С. 785—796.
30. *Slunyaev, A.* Simulations and experiments of short intense envelope solitons of surface water waves / A. Slunyaev, G. F. Clauss, M. Klein, M. Onorato // *Phys. Fluids.* — 2013. — Vol. 25. — Art. 067105.
31. *Slunyaev, A.* Laboratory and numerical study of intense envelope solitons of water waves: generation, reflection from a wall and collisions / A. Slunyaev, M. Klein, G. F. Clauss // *Phys. Fluids.* — 2017. — Vol. 29. — Art. 047103.
32. *Slunyaev, A. V.* Group-wave resonances in nonlinear dispersive media: the case of gravity water waves // *Phys. Rev. E.* — 2018. — Vol. 97. — Art. 010202(R).
33. *Slunyaev, A.* On the incomplete recurrence of modulationally unstable deep-water surface gravity waves / A. Slunyaev, A. Dosaev // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* — 2019. — Vol. 66. — P. 167—182.
34. *Slunyaev, A. V.* On the highest non-breaking wave in a group: fully nonlinear water wave breathers vs weakly nonlinear theory / A. V. Slunyaev, V. I. Shrira // *J. Fluid Mech.* — 2013. — Vol. 735. — P. 203—248.
35. *Hasselmann, K.* Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP) / K. Hasselmann, T. P. Barnett, E. Bouws, H. Carlson, D. E. Cartwright, K. Enke, J. A. Ewing, H. Gienapp, D. E. Hasselmann, P. Kruseman, A. Meerburg, P. Muller, D. J. Olbers, K. Richter, W. Sell, H. Walden. — *Ergänzungsheft zur Deutschen Hydrographischen Zeitschrift. Reihe A(8⁰), Nr. 12.* — Hamburg : Deutsches Hydrographisches Institut, 1973. — 95 s.

36. *Слюняев, А. В.* Численное моделирование и анализ пространственно-временных полей аномальных морских волн / А. В. Слюняев, А. В. Сергеева // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. — 2012. — Т. 5, № 1. — С. 24—36.
37. *Sergeeva, A.* Rogue waves, rogue events and extreme wave kinematics in spatio-temporal fields of simulated sea states / A. Sergeeva, A. Slunyaev // *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* — 2013. — Vol. 13. — P. 1759—1771.
38. *Slunyaev, A.* Rogue events in spatiotemporal numerical simulations of unidirectional waves in basins of different depth / A. Slunyaev, A. Sergeeva, I. Didenkulova // *Nat. Hazards*. — 2016. — Vol. 84. — P. 549—565.
39. *Захаров, В. Е.* Устойчивость периодических волн на поверхности глубокой жидкости // *Журн. приклад. механики и техн. физики*. — 1968. — Т. 9. — С. 86—94.
40. *Слюняев, А. В.* Стохастическое моделирование однонаправленных интенсивных волн на глубокой воде в приложении к аномальным морским волнам / А. В. Слюняев, А. В. Сергеева // *Письма в ЖЭТФ*. — 2011. — Т. 94. — С. 850—858.
41. *Krogstad, H. E.* Interpretations and observations of ocean wave spectra / H. E. Krogstad, K. Trulsen // *Ocean Dynamics*. — 2010. — Vol. 60. — P. 973—991.
42. *Fedele, F.* Space-time waves and spectra in the northern Adriatic sea via a wave acquisition stereo system / F. Fedele, A. Benetazzo, G. Forristall // *Proc. ASME 30th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering (June 19–24, 2011, Rotterdam, The Netherlands)*. — 2011. — OMAE2011-49924. — P. 1—13.
43. *Салин, Б. М.* Комбинированный метод измерения трехмерных спектров волнения. II. Примеры использования основных схем измерений и анализ полученных результатов / Б. М. Салин, М. Б. Салин // *Изв. вузов. Радиофизика*. — 2015. — Т. 58, № 3. — С. 200—213.
44. *Taklo, T. M. A.* Measurement of the dispersion relation for random surface gravity waves / T. M. A. Taklo, K. Trulsen, O. Gramstad, H. E. Krogstad, A. Jensen // *J. Fluid Mech.* — 2015. — Vol. 766. — P. 326—336.
45. *Ивонин, Д. В.* Возможности радиолокационных навигационных систем X-диапазона для мониторинга прибрежного ветрового волнения / Д. В. Ивонин, В. А. Телегин, П. В. Чернышов, С. А. Мысленков, С. Б. Куклев // *Океанология*. — 2016. — Т. 56. — С. 647—658.
46. *Haudin, F.* Experimental study of three-wave interactions among capillary-gravity surface waves / F. Haudin, A. Cazaubie, L. Deike, T. Jamin, E. Falcon, M. Berhanu // *Phys. Rev. E*. — 2016. — Vol. 93. — Art. 043110.
47. *Simanesew, A.* Development of frequency-dependent ocean wave directional distributions / A. Simanesew, H. E. Krogstad, K. Trulsen, J. C. Nieto Borge // *Appl. Ocean Res.* — 2016. — Vol. 59. — P. 304—312.

**МОРСКИЕ БРЫЗГИ ПРИ СИЛЬНЫХ ВЕТРАХ:
МЕХАНИЗМЫ ГЕНЕРАЦИИ И РОЛЬ В МЕХАНИКЕ
И ТЕРМОДИНАМИКЕ УРАГАНОВ**

Ю. И. Троицкая

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород

В штормовых условиях атмосфера и океан являются многофазными: приводный слой атмосферы пропитан брызгами и дождевыми каплями, на поверхности воды присутствуют пенные области, а приповерхностный водный слой насыщен пузырьками воздуха. Это вызывает радикальные изменения процессов обмена океана и атмосферы, которые необходимо учитывать при построении моделей. Эмпирические данные о параметрах таких сред, полученные в натуральных условиях, характеризуются большими погрешностями. Лабораторное моделирование на крупных экспериментальных стендах помогает снизить эту неопределенность. В настоящей работе представлены результаты последних исследований многофазных сред на уникальной научной установке «Комплекс крупномасштабных геофизических стендов» ИПФ РАН.

Введение

Половина населения мира — около 3,2 миллиарда человек — занимают прибрежную полосу, 200 километров (120 миль), и испытывают негативное воздействие от штормов, формирующихся над океаном. Среди наиболее разрушительных природных катастроф доминируют тропические штормы и тайфуны. Самыми опасными морскими погодными явлениями считаются тропические циклоны, в которых скорость ветра может превышать 70 м/с. Они возникают и развиваются над океанами главным образом в тропической зоне, между 5 и 20 градусами широты. В то же время тропические циклоны могут оказывать значительное влияние на погоду умеренных и субтропических зон вследствие внетропического проникновения тропических циклонов. Наиболее разрушительным за последнее время ураганом такого типа стал супершторм Сенди, обрушившийся на восточное побережье США в конце октября 2012 года и приведший к гибели около 200 человек и ущербу более 80 млрд долларов. С внетропическим проникновением тропических циклонов связаны сильные шторма в Дальневосточных морях России. Интенсивные, быстро развивающиеся атмосферные вихри, сходные с тропическими циклонами по механизмам формирования и некоторым морфологическим признакам (теплое ядро, глубокая конвекция), называемые полярными ураганами, возникают в высоких широтах. Они часто наблюдаются при вторжениях холодного арктическо-

го воздуха над свободной ото льда поверхностью моря. В 80-е годы XX века полярные ураганы случались главным образом в западном секторе Арктики. Сокращение ледового покрова в последние годы приводит к тому, что полярные ураганы возникают вдоль всего Северного морского пути. Скорость ветра в полярных ураганах достигает 35—40 м/с, представляя угрозу для судоходства и нефтедобычи на шельфе.

Так называемые квазитропические циклоны могут появляться и в умеренных широтах. К ним относятся «медиканы», которые образуются в Средиземном море при состояниях атмосферы и океана, благоприятствующих глубокой конвекции. Подобные квазитропические циклоны изредка бывают и в Черном море. Скорость ветра при этом может превышать 30 м/с, соответствуя по шкале Саффира — Симпсона тропическому шторму и переходу к урагану категории 1.

Для Европейского континента, и в том числе для России, значительную угрозу представляют активные глубокие циклоны, которые особенно часто формируются в северо-восточной Атлантике в положительной фазе Северо-Атлантического колебания. Для них также характерны условия штормового и ураганного ветра: например, скорость ветра в урагане Святой Иуда в октябре 2013 года доходила до 53 м/с, что соответствует урагану категории 3 по шкале ураганов Саффира — Симпсона. В прибрежной зоне штормовой ветер вызывает чрезвычайно опасный штормовой нагон, который считается одним из наиболее разрушительных природных явлений и часто приводит к человеческим жертвам и многомиллионным убыткам. Так, тропический циклон Нургис в 2008 году унес более 100 тыс. жизней в Мьянме, тропический ураган Катрина 2005 году и шторм Сенди в 2012 году нанесли экономический ущерб 80 млрд долларов каждый. Штормовые нагоны представляют немалую опасность для Нидерландов, Великобритании, низменных областей Германии. В России штормовой нагон типичен для Невской губы, он вызывает регулярные наводнения в Санкт-Петербурге.

Большие значения скорости ветра и связанные с ними ветровые нагрузки — основной фактор наиболее разрушительных природных процессов: бурь, ураганов, смерчей, шквалов, штормов и тайфунов, поэтому к качеству моделирования штормовой погоды предъявляются высокие требования.

При построении численных моделей штормов и ураганов над морем критически важно корректно задать турбулентные потоки импульса, тепла и влаги между атмосферой и океаном. В частности, повышение точности моделей турбулентного обмена на границе атмосферы и океана является одним из приоритетов проекта NOAA, направленного на улучшение прогноза ураганов (<http://www.hurricanescience.org/science/forecast/models/modelskill/>).

В штормовых условиях атмосфера и океан становятся многофазными: приводный слой атмосферы насыщен брызгами и дождевыми каплями, на поверхности воды присутствуют пенные области, а приповерхностный водный слой пропитан пузырьками воздуха. Это вызывает радикальные изменения энергообмена океана и атмосферы, которые необходимо учитывать в моделях. Эмпирические данные о параметрах таких сред, полученные в натуральных условиях, характеризуются большими погрешностями. Например, отличия в концентрации брызг в приводном слое атмосферы, приводимой различными авторами, достигают шести порядков [1], модели генерации брызг практически неизвестны. Рассматриваются несколько механизмов, обусловленных брызгами, которые оказывают влияние на обмен теплом и импульсом [2—5] в приводном слое атмосферы. В то же время результаты расчетов определяются эмпирической функцией генерации брызг в приводном слое атмосферы, которая согласно оценкам различных авторов имеет разброс до трех порядков величины [6]. В связи с этим высоко ценятся лабораторные и численные эксперименты, направленные на моделирование процессов турбулентного обмена в двухфазной среде [7—11]. В настоящей статье рассказывается об исследовании механизмов генерации брызг при сильном ветре в лабораторных условиях, обсуждается их классификация и эффективность обнаруженных механизмов. На основании этих экспериментов строится функция генерации брызг и оценивается их вклад в турбулентные потоки импульса, тепла и энергии в штормовых условиях.

2. Лабораторные эксперименты

2.1. Лабораторная установка и результаты экспериментов

Для исследования, классификации и оценки эффективности механизмов генерации брызг были проведены эксперименты с использованием высокоскоростной видеосъемки на ветро-волновом канале Большого термостратифицированного бассейна ИПФ РАН. Канал воздушного потока сечением $0,4 \times 0,4$ м имеет длину над водной поверхностью 10 м, максимальная скорость воздушного потока в канале 25 м/с, при этом скорость ветра, приведенная к высоте 10 м, составляет 40 м/с. Подробное описание установки, принципов создания и управления воздушным потоком в ней приведено в работе [12]. Для характеристики приводного пограничного слоя использовалась динамическая скорость трения u_* , определяемая через вертикальный турбулентный поток импульса: $F_M = \rho_{\text{air}} u_*^2$, где ρ_{air} — плотность воздуха. В моделях «океан — атмосфера» F_M связан с динамической скоростью через коэффициент аэродинамического сопротивления $C_D = u_*^2 / U_{10}^2$ (здесь U_{10} — скорость ветра на высоте 10 м). В экспериментах динамическая скорость варьировалась от 0,9 до 1,5 м/с, что соответст-

вует скорости ветра U_{10} в натуральных условиях от 20 до 40 м/с (см. рис. 3, а в [13]). Видеосъемка осуществлялась с двух ракурсов: сбоку при скорости съемки 10000 кадров/с и сверху при скорости съемки 4500 кадров/с.

Теневые фотографии типичных событий, приводящих к генерации капель, показаны на рис. 1. Предложим следующую классификацию:

1) дробление жидких «пальцев» (1-й ряд фотоснимков).

В работе [14] было обнаружено, что в районе гребней обрушивающихся волн развиваются небольшие выступы воды, которые затем растягиваются в «пальцы» и разрываются на капли. В наших наблюдениях дробление каждого такого объекта приводит к генерации одной-двух капель диаметрами несколько миллиметров;

2) разрыв подводных пузырей (2-й ряд фотоснимков).

Подводные пузыри, формирующиеся у гребней обрушивающихся волн, всплывают из-за положительной плавучести и разрываются при достижении поверхности воды, генерируя брызги. Детальная модель такого разрыва была представлена в работе [15]. До последнего времени это явление считалось основным механизмом генерации брызг [15]. Однако наши видеозаписи неожиданно продемонстрировали его сравнительно низкую эффективность: только около 5 % наблюдаемых больших подводных пузырей достигало поверхности и лопалось с образованием брызг;

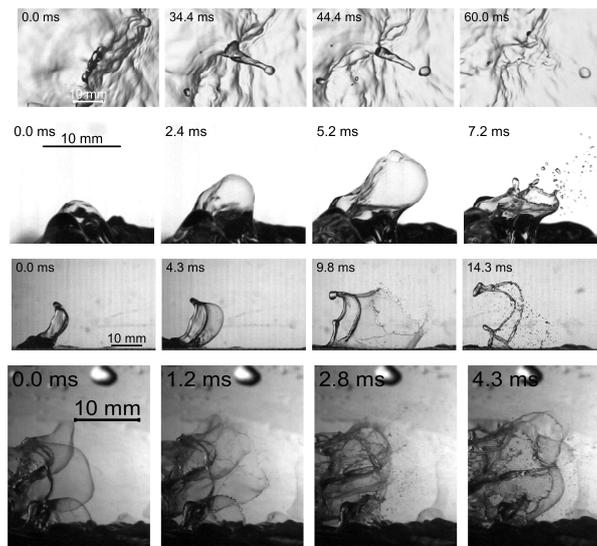


Рис. 1. Фотографии событий, сопровождающих генерацию брызг: 1-й ряд — дробление жидких «пальцев» (вид сверху); 2-й ряд — разрыв подводных пузырей (вид сбоку); 3-й ряд — формирование и разрыв «парашюта» (вид сбоку); 4-й ряд — формирование и разрыв «многокамерного парашюта» (вид сбоку)

3) дробление типа «парашют» (3-й ряд фотоснимков).

Это явление начинается с возникновения мелкомасштабного возвышения водной поверхности, развивающегося в «микропарус», который затем раздувается в «парашют», представляющий собой мембрану из водной пленки, окруженную более толстым «ободком», и разрывается, образуя сотни брызг. В инженерной гидродинамике данный механизм известен как режим дробления жидкости в газовом потоке типа «парашют» [16]. Ранее такой режим генерации брызг в лабораторном канале был описан в работе [17], однако его значимость в ураганных условиях не обсуждалась;

4) «многокамерный парашют» (4-й ряд фотоснимков).

В этом случае начальное возвышение поверхности воды трансформируется в сложный объект, представляющий собой «многокамерный парашют».

2.2. Статистика событий, приводящих к генерации брызг

На основе анализа скоростного видео была оценена эффективность обнаруженных механизмов генерации брызг. Для этого по результатам обработки более двух миллионов отдельных кадров было определено количество событий (жидких «пальцев», разрывов подводных пузырей и «парашютов»), происходящих в единицу времени на единице площади (рис. 2).

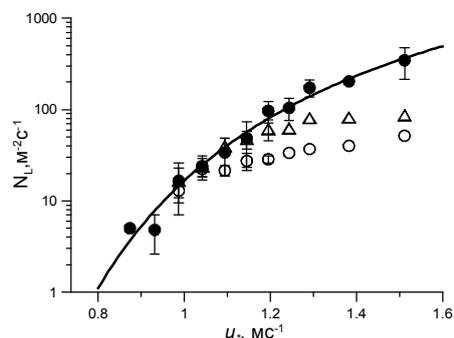


Рис. 2. Среднее количество типичных событий генерации капель в единицу времени на единицу площади в зависимости от u_* : незакрашенные кружки — разрывы подводных пузырей, незакрашенные треугольники — жидкие «пальцы», черные кружки — «парашюты»; сплошная линия — зависимость, полученная на основе распределения Гиббса (уравнение (4))

Из рисунка видно, что при динамической скорости трения ветра $u_* < 1$ м/с все три механизма имеют почти равную эффективность, но при $u_* > 1$ м/с количество разрывов подводных пузырей отстает от числа жидких «пальцев» и «парашютов». Заметим, что каждая «камера» «многокамерного парашюта» считалась отдельным объектом. Учитывая, что дробление жидких «пальцев» дает 1—2 капли, а дробление типа «парашют» дает десятки капель на каждое событие, можно сделать вывод,

что этот последний механизм является абсолютно доминирующим. Активация данного механизма происходит при динамической скорости трения ветра примерно 0,9 м/с, соответствующей скорости ветра на высоте 10 м примерно 20 м/с (см., например, [18]). Это приблизительно соответствует силе ветра в 8 баллов по шкале Бофорта, когда согласно описанию сопутствующих явлений отмечается изменение режима генерации брызг.

Для описания статистики количества событий дробления типа «парашют» использовался феноменологический подход, основанный на методах статистической физики. Была предложена модель, основанная на методе Гиббса. При этом гребни волн, которые потенциально могут трансформироваться в «парашюты», а затем в брызги, рассматриваются как «термодинамическая подсистема», находящаяся в равновесии с системой «ветер — волны», представляющей собой «термостат». В этом случае вероятность того, что подсистема находится в состоянии с энергией E , определяется каноническим распределением Гиббса, т. е. вероятность того, что энергия подсистемы мембран находится в диапазоне $[E, E + dE]$, равна

$$dW = A \exp(-E/\beta) dE. \quad (1)$$

Здесь константа $A = 1/\beta$ определяется из условия нормировки вероятности на единицу.

Количество «парашютов», возникающих в рассматриваемой подсистеме в единицу времени на единице площади, является некоторой функцией от энергии подсистемы — $n(E)$. В свою очередь, среднее число «парашютов», возникающих в единицу времени на единице площади, можно получить, интегрируя $n(E)dE$ по всем значениям энергии, превышающим порог генерации E_0 , с учетом выражения для вероятности (1), т. е.

$$N = \int_{E_0}^{\infty} \frac{n(E)}{\beta} e^{-\frac{E}{\beta}} dE. \quad (2)$$

Разложение $n(E)$ вблизи значения $E = E_0$ дает

$$n(E) = n(E_0) + \alpha(E - E_0) + \dots,$$

где E_0 и α являются внутренними параметрами «квазитермодинамической подсистемы», не зависящими от параметра «термостата» β . Учитывая, что при пороговом значении для начала генерации $n(E_0) = 0$, получаем из (2)

$$N = \alpha \beta e^{-\frac{E_0}{\beta}}. \quad (3)$$

Здесь β — параметр «термостата», т. е. системы «ветер — волны», которая, в свою очередь, характеризуется динамической скоростью u_* и разгоном.

В условиях фиксированного разгона в наших экспериментах можно рассматривать β как функцию u_* . Для ее получения мы воспользовались известной аналогией Буссинеска между турбулентными пульсациями скорости и тепловым движением молекул в газе. Для молекулярных движений β пропорциональна температуре термостата, определяемой средней кинетической энергией молекул. В рассматриваемой задаче аналогом температуры является плотность кинетической энергии турбулентных пульсаций. В пограничном слое вблизи поверхности последняя пропорциональна u_*^2 , т. е. $\beta = \gamma u_*^2$. Представляя две новые константы в виде $U_0 = \sqrt{E_0/\gamma}$; $N_0 = \alpha E_0$, получаем окончательно для выражения (3)

$$N(u_*) = N_0 \frac{u_*^2}{U_0^2} \exp\left(-\frac{U_0^2}{u_*^2}\right), \quad (4)$$

где $U_0 = 2$ м/с, $N_0 = 3,73 \cdot 10^3$ м⁻²·с⁻¹ определены на основе экспериментальных данных, представленных на рис. 2. Как видно из рисунка, полученная зависимость хорошо описывает экспериментальные результаты.

На основе обработки видеозаписей также были исследованы размеры «парашютов», характеризующихся их радиусами R , и их время жизни τ . Оказалось, что плотность вероятности их распределения по R хорошо описывается гамма-распределением:

$$P_n(x) = \frac{n^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-nx} \quad (5)$$

при $n = 8$, где $x = R/\langle R \rangle$.

Средние значения $\langle R \rangle$ и $\langle \tau \rangle$ имеют порядок 10^{-2} м и 10^{-5} с соответственно и убывают с увеличением скорости по степенным законам: $\langle R \rangle = 9,6 u_*^{-1}$, $\langle \tau \rangle = 7,7 u_*^{-2}$, где u_* выражено в метрах в секунду, $\langle R \rangle$ — в миллиметрах и $\langle \tau \rangle$ — в миллисекундах.

2.3. Перенос на натурные условия

Важную проблему представляет перенос этих результатов на натурные условия. Главным отличием натуральных и лабораторных условий является ветровой разгон — протяженность водной поверхности, над которой дует ветер. В натуральных условиях разгон обычно выражают через обратный параметр возраста волнения $\Omega = U_{10}/c_p$, где c_p — фазовая скорость волны с частотой ω_p , соответствующей пику в спектре волнения. Прямые измерения в работе [19] при ураганных ветрах показали, что $\Omega = 2,5 \div 3,5$, в лабораторных условиях $\Omega \approx 30$.

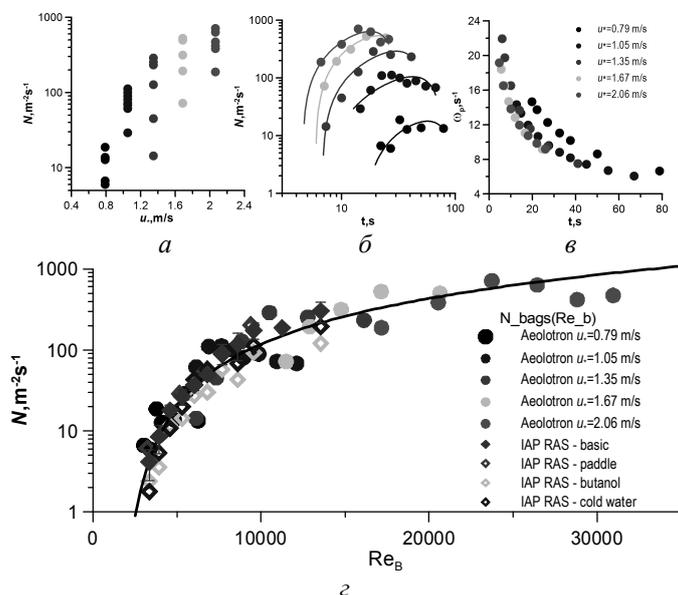


Рис. 3. Зависимость числа событий фрагментации по типу «парашют» (на единицу площади за единицу времени) от динамической скорости (а), от времени (эквивалент разгона) (б) и от Re_B (г); зависимость частоты спектрального пика волн от времени (в)

Из размерных параметров, которые определяют состояние поверхности моря под действием ветра, а именно динамической скорости, частоты пика волнения, а также ускорения свободного падения и вязкости можно составить безразмерную комбинацию $Re_B = u_*^2 / \nu \omega_p$ — эффективное число Рейнольдса поверхности океана, находящегося под действием ветра, которая согласно [24] определяет все сложные мелкомасштабные процессы на поверхности. Полученное в лабораторных условиях количество событий, вызывающих генерацию брызг (фрагментации жидких «пальцев», разрывов всплывающих пузырьков и дробления по типу «парашют»), можно выразить через это число, однако остается вопрос, насколько найденная зависимость соответствует натурным условиям. В настоящее время дать ответ невозможно из-за отсутствия натурных данных. Однако разгон волн в лабораторных условиях может быть значительно увеличен в кольцевом канале. В кольцевом канале аналогом пространственного разгона является время развития волнения, при этом степень развития волн можно по-прежнему характеризовать с помощью параметра возраста волнения, который выражается через частоту спектрального пика. В 50-х годах

XX века на базе Черноморского отделения Морского гидрофизического института в пос. Кацивели был создан кольцевой штормовой бассейн. Значительно позже аналогичный бассейн меньшего размера был построен в университете Гейдельберга в Германии, он получил название Аэолотрон.

В экспериментах на канале Аэолотрон изучалась зависимость числа событий фрагментации по типу «парашют» (на единицу площади за единицу времени) от динамической скорости ветра и времени (рис. 3, а, б). Частота пика в спектре волнения также зависела от времени (рис. 3, в). Из рисунка 3, а, б видно, что при определенной скорости ветра разброс в числе событий фрагментации по типу «парашют» составляет около двух порядков вследствие зависимости от времени. В то же время если представить эти данные в виде функции от Re_B , то они ложатся на одну кривую (см. рис. 3, г). На эту же кривую ложатся и данные, полученные на канале ИПФ РАН (другая установка!). Аппроксимация этой кривой функцией

$$N = 2,58 \cdot 10^{-4} Re_B^{3/2} \exp\left(-\frac{6,93 \cdot 10^5}{Re_B^{3/2}}\right) \quad (6)$$

дает универсальную формулу, которая может быть использована в натуральных условиях.

3. Функция генерации брызг

Зная статистику «парашютов», можно построить функцию генерации брызг (Sea Spray Generation Function, SSGF) dF/dr , представляющую собой количество брызг радиусом r , инжектируемых с единицы площади поверхности воды в единицу времени в результате описанного выше доминирующего механизма. Для этого необходима информация о том, как генерируются брызги при дроблении отдельного «парашюта». Как можно видеть на рис. 1, это происходит вследствие двух процессов:

- 1) разрыва жидкой пленки при раздувании «парашюта» (рис. 1, 9,8 мс), который приводит к образованию капель с характерным радиусом 100 мкм;
- 2) дробления «ободка», остающегося после разрыва жидкой пленки (рис. 1, 14,3 мс), который генерирует «гигантские» капли с характерным радиусом 1000 мкм.

Для описания первого процесса использовалась его аналогия с генерацией брызг при разрыве всплывающего пузыря, которая была подробно изучена в работе [15]. Согласно [15], распределение по размерам капель, образующихся в результате разрыва пузыря с радиусом R , описывается гамма-распределением (5) при $n = 11$, а среднее суммарное количество

капель от разрыва пузыря $N_{\text{film drops}}(R)$ и средний радиус капли $\langle r \rangle(R)$ являются степенными функциями от радиуса R , которые были получены в результате аппроксимации данных исследования [15]: $\langle r \rangle(R) \sim R^{4/3}$, $N_{\text{film drops}}(R) \sim R^{4/3}$.

Для описания второго процесса, дробления «ободка», была использована аналогия с процессом вторичного дробления капель жидкости по типу «парашют» в потоках газа, когда также происходит разрыв жидкой пленки и возникновение «ободка». Детальное экспериментальное исследование [20] было использовано для оценки характерного размера капель, образующихся при дроблении «ободка». По данным [20] средний размер капли пропорционален размеру «парашюта» с коэффициентом 0,068, а среднее суммарное количество капель, образующихся при разрыве «ободка», $N_{\text{rim drops}} = 8,3$. «Ободок», остающийся после разрыва мембраны, является

разновидностью жидкой нити, толщина которой связана с размером «парашюта». Согласно [21], распределение по размерам капель, образующихся вследствие дробления жидкой нити, описывается гамма-распределением (5) с $n = 4$.

Функция генерации брызг может быть найдена как свертка функции генерации «парашютов» и функции распределения брызг от одного «парашюта» [22]:

$$\frac{dF(r, u_*)}{dr} = N \left(A_1 \left(\frac{r}{\theta} \right)^{7,3} e^{-5,2 \sinh\left(\frac{3}{7} \ln \frac{r}{\theta}\right)} + A_2 \left(\frac{r}{\Theta} \right)^{4,5} e^{-3,94 \sinh\left(\frac{1}{2} \ln \frac{r}{\Theta}\right)} \right), \quad (7)$$

где $\theta = 0,001(\langle R_2 \rangle(u_*))^{4/3} L^{-1/3}$; $\Theta = 0,0021\langle R_2 \rangle(u_*)$; $\langle R_2 \rangle(u_*) = 9,6u_*^{-1}$;

$$L = 2 \cdot 10^4 \text{ мм}; A_1 = \frac{3,3 \cdot 10^{-9}}{L} \left(\frac{\rho_w g L^2}{\sigma} \right)^{1,18}; A_2 = \frac{1,5 \cdot 10^{-4} N_{\text{rim drops}}}{\Theta}.$$

Рисунок 4 показывает наличие у функции генерации двух пиков, соответствующих каплям, образующимся из пленки и из «ободка». Отметим важную особенность полученных функций. Видно, что средний размер «пленочных» и «ободочных» капель убывает с ростом скорости ветра, т. е. чем сильнее ветер, тем более мелкую «водяную пыль» он создает.

Полученная таким образом функция генерации брызг была верифицирована на основе сопоставления с имеющимися данными как лабораторных (рис. 4, а), так и натуральных измерений (рис. 4, б).

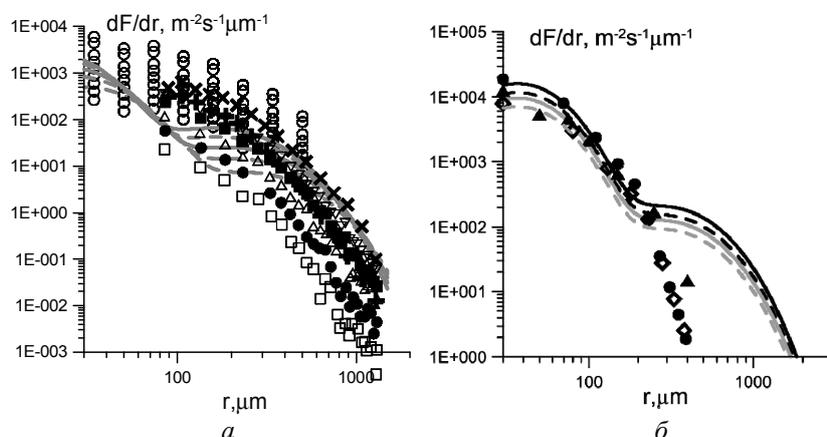


Рис. 4. Сравнение функции генерации брызг по формуле (7) (линии) с эмпирическими функциями, предложенными Iida на основе адаптации данных из [2] для лабораторных условий (а); динамическая скорость трения варьировалась между 1 и 1,5 м/с с шагом 0,1 м/с. Сравнение найденной нами функции генерации брызг (линии) для диапазона $\Omega = 2,5 \div 3,5$ с эмпирическими данными натуральных измерений [6, 10, 23] для $U_{10} = 30$ м/с (б)

Рисунок 4, б показывает хорошее согласие между нашей функцией генерации и функцией генерации брызг, полученной в работах [6, 10, 23], в интервале радиусов капли $30 \text{ мкм} < r < 300 \text{ мкм}$. Расхождение этих функций при $r > 300 \text{ мкм}$, по-видимому, объясняется тем, что трудно наблюдать в натуральных условиях очень крупные капли, которые редко долетают до измерительных инструментов, располагающихся, как правило, на высоте более 10 м над поверхностью воды.

Хорошее согласие полученной нами функции генерации как с натурными, так и с лабораторными измерениями подтверждает гипотезу о доминирующей роли дробления типа «парашют» в образовании брызг при штормовом и ураганном ветре. Важно отметить, что этот механизм предсказывает генерацию значительного числа «гигантских» капель, образующихся в результате дробления «ободка». Оценки говорят, что для механизма дробления типа «парашют» эти «гигантские» капли с радиусом, превышающим 300 мкм, обеспечивают более 90 % от потока массы брызг, который в основном определяет потоки импульса и тепла из-за аэрозоля.

Итак, анализ последовательности кадров высокоскоростного видео показал, что основным механизмом генерации капель в приводном слое атмосферы при штормовом и ураганном ветре является дробление типа «парашют». Активация этого процесса происходит при скорости ветра приблизительно 20 м/с, что соответствует скорости ветра 8 баллов по шка-

ле Бофорта. На основе общих принципов статистической физики построена статистика возникновения «парашютов» и выведена функция генерации брызг, которая оказалась в хорошем согласии с данными как известного лабораторного, так и натуральных экспериментов.

4. Роль брызг в переносе импульса между атмосферой и океаном при ураганном ветре

Вклад дробления типа «парашют» в поток импульса в приводном пограничном слое атмосферы определяется двумя факторами. Во-первых, он связан с начальной стадией этого явления, до образования брызг, F_{Mb} , когда «парашюты» выглядят как микропаруса (с типичным размером около 1 см) и становятся препятствиями для приводного ветра. Во-вторых, капли в процессе их генерации из-за дробления «парашюта» отбирают импульс у воздушного потока, создавая поток импульса, связанный с брызгами, F_{Md} .

Для оценки вклада первого фактора в аэродинамическое сопротивление водной поверхности необходимо определить силу, действующую на одиночный «парашют», являющийся препятствием для воздушного потока. Анализ отдельных кадров высокоскоростного видео позволил исследовать эволюцию «парашютов» во времени и их характерные геометрические размеры. В частности, было показано, что размеры «парашютов», а также смещение их центра представляют собой линейные функции времени [25]. Это, в свою очередь, означает, что их элементы (жидкая пленка и «ободок») совершают прямолинейное и равномерное движение. Следовательно, существует равновесие между аэродинамическим давлением и поверхностным натяжением. В рамках упрощенной модели «парашют» рассматривается как полусферическая пленка радиусом $R(t)$. Тогда сила сопротивления со стороны «парашюта» может быть вычислена интегрированием дифференциального давления, разности с внутренней и внешней части $p_1 - p_2$, по площади поверхности пленки S . Дифференциальное давление определяется разностью капиллярных сил, действующих на внешней, выпуклой, и на внутренней, вогнутой, поверхности:

$$(p_1 - p_2)|_S = \frac{4\sigma}{R(t)}. \quad (8)$$

Тогда мгновенная сила сопротивления «парашюта»

$$f(t) = \iint_S (p_1 - p_2) ds = \iint_S \frac{4\sigma}{R(t)} ds = 2\pi^2 \sigma R(t). \quad (9)$$

Если в фиксированный момент времени t на поверхности области площадью ΔS присутствует $\Delta N(t)$ «парашютов» и каждый из них действует на воздушный поток с силой $f(t)$, то полная мгновенная сила, действующая на воздушный поток со стороны этой области, эквивалентна сумме сил

каждого индивидуального парашюта: $\Delta F(t) = \sum_{i=1}^{\Delta N(t)} f_i(t)$. Однако эта величина является сильно флуктуирующей во времени. Средняя сила за время ΔT , превышающее характерное время жизни «парашютов»,

$$\langle \Delta F(t) \rangle = \frac{1}{\Delta T} \int_t^{t+\Delta T} \sum_{i=1}^{\Delta N(t)} f_i(t) dt = 4\pi\sigma \frac{1}{\Delta T} \int_t^{t+\Delta T} \sum_{i=1}^{\Delta N(t)} R_i(t) dt. \quad (10)$$

Очевидно, что вклад отдельного «парашюта» в силу в правой части (10) есть $\int_t^{t+\Delta T} R_i(t) dt = \bar{R}_i \tau_i$, где \bar{R}_i — средний радиус «парашюта» за время жизни τ_i . После сегментации «парашютов» по характерному времени жизни τ_i и средним радиусам \bar{R}_i определяемое ими поверхностное сдвиговое напряжение

$$F_{Mb} = \frac{\langle \Delta F(t) \rangle}{\Delta S} = 2\pi^2 \sigma \langle \bar{R} \tau \rangle N(u_*, \Omega), \quad (11)$$

где N есть среднее значение количества «парашютов», генерируемых в единицу времени с удельной площади.

Зависимость коррелятора $\langle \bar{R} \tau \rangle$, входящего в (11), от u_* была получена на основе обработки кадров высокоскоростного видео, по которым для каждого «парашюта» определялись его начальный (R_1) и конечный (R_2) размеры и время жизни от возникновения до начала разрыва пленки. С учетом линейного роста во времени геометрических размеров «парашюта» $\bar{R} = (R_1 + R_2)/2$. При этом средний размер «парашюта» и время его жизни оказались убывающими степенными функциями динамической скорости: $\langle \bar{R} \rangle \sim u_*^{-1}$, $\langle \tau \rangle \sim u_*^{-2}$, а коррелятор

$$\langle \bar{R} \tau \rangle = 64,4 u_*^{-3}. \quad (12)$$

Подстановка (6) и (12) в (11) дает

$$F_{Mb} = 4\pi\sigma 2,58 \cdot 10^{-4} \text{Re}_B^{3/2} \exp\left(-\frac{6,93 \cdot 10^5}{\text{Re}_B^{3/2}}\right) e^{-\frac{U_0^2}{u_*^2}} \frac{\lambda}{u_*^3}, \quad (13)$$

где $U_0 = 2$ м/с, $N_0 = 3,73 \cdot 10^3 \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$, $\lambda = 64,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4 \cdot \text{с}^{-2}$.

Отметим, что касательное напряжение F_{Mb} определяется числом «парашютов», возникающих в единицу времени на единице площади, с одной стороны, и их размерами и временем жизни, с другой стороны. С ростом скорости ветра наблюдается рост количества «парашютов» и уменьшение

их размеров и времени жизни. В результате F_{Mb} имеет тенденцию к насыщению с увеличением скорости ветра (см. рис. 5, *a*).

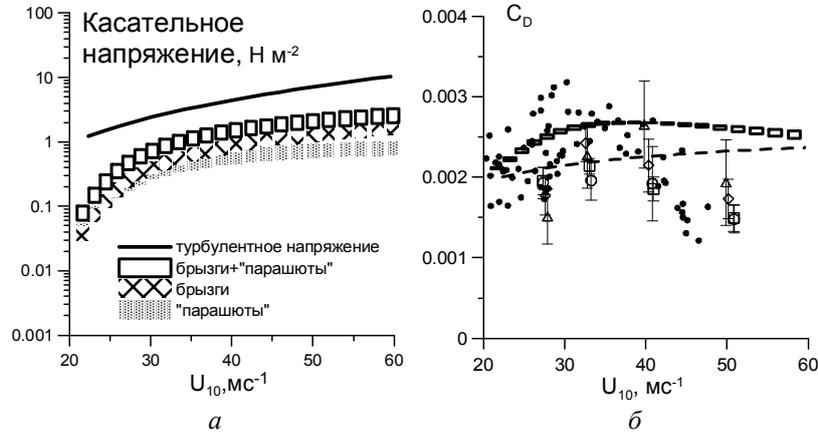


Рис. 5. Вклад в поверхностное касательное напряжение, связанный с «парашютами», каплями и прямым турбулентным переносом, в зависимости от U_{10} , для значений параметра возраста волнения Ω в диапазоне 2,5—3,5 (*a*). Рассчитанный в рамках модели коэффициент сопротивления C_D как функция скорости ветра U_{10} при $\Omega = 2,5 \div 3,5$ (*б*). Пунктирная линия — C_D из [18]; квадраты, ромбы, треугольники и кружки — экспериментальные данные из [13]; черные кружки — экспериментальные данные из [26]

Основной вклад в поток импульса, связанный с брызгами, который определяется импульсом, получаемым каплями из воздушного потока в процессе их возникновения, F_{Md} , вносят капли, образующиеся при разрушении «ободка» «парашюта». Их скорости равны измеренным по кадрам скоростного видео скоростям смещения краев «парашютов» $\langle u \rangle$, которые связаны с динамической скоростью воздушного потока:

$$\langle u \rangle = 1,96 + 1,21 u_* \quad (14)$$

Определенный таким образом поток импульса, обусловленный брызгами, может быть представлен как

$$F_{Md} = \rho_w \int_0^\infty \frac{dF(r, u_*)}{dr} \frac{4\pi r^3}{3} \langle u \rangle dr \quad (15)$$

Аналогично F_{Mb} зависимость величины F_{Md} от скорости ветра определяется противоположными тенденциями: при увеличении скорости ветра число капель (см. уравнение (6)) растет, а размер капель убывает пропорционально среднему размеру «парашютов». Результатом является аналогичная F_{Mb} тенденция к насыщению функции $F_{Md}(u_*)$ (см. рис. 5, *a*). Строго го-

вора, выражение (15) дает оценку сверху для учета вклада брызг в сопротивление, создаваемое поверхностью, потому что, падая вниз, капли могут частично обеспечить передачу импульса в нижние слои, приводя к ускорению потока окружающего воздуха.

Полное сдвиговое напряжение в пограничном слое при ураганных ветрах определяется тремя основными факторами: сопротивлением формы поверхности, обусловленной волнами F_{Mwave} , потоком импульса, связанным с брызгами F_{Md} , и аэродинамическим сопротивлением «парашютов» F_{Mb} :

$$F_M = F_{Mw} + F_{Md} + F_{Mb} .$$

Для оценки F_{Mw} использовался закон сопротивления из [18] для данных, полученных при скоростях ветра менее 25 м/с, когда эффект брызг, очевидно, незначителен:

$$F_{Mw} = \rho_a [0,051(U_{10} - 8) + 0,27]^2 . \quad (16)$$

Окончательно коэффициент сопротивления для нейтрально стратифицированного атмосферного пограничного слоя может быть найден исходя из определения $C_{DN} = F_M / (\rho_a U_{10}^2)$. Поскольку компонента касательного напряжения, обусловленная сопротивлением «парашютов» и брызг, имеет тенденцию к насыщению при увеличении скорости ветра (см. рис. 5, а), то коэффициент немонотонно зависит от скорости ветра.

Дополнительное снижение коэффициента сопротивления при сильном ветре может быть обусловлено влиянием взвешенных капель на статическую устойчивость приводного слоя атмосферы, которое приводит к подавлению турбулентности [2, 3, 27]. Для рассмотрения этого эффекта был обобщен подход, предложенный в [2, 3, 27], с учетом распределения капель по размерам. Тогда уравнение сохранения концентрации капель радиусом r имеет вид

$$K_s(z) \frac{\partial S(z, r)}{\partial z} + V_f(r) S(z, r) = 0 , \quad (17)$$

где $S(z, r)$ — объемная концентрация капель радиусом r , $K_s(z)$ — коэффициент турбулентной диффузии капель и $V_f(r)$ — скорость гравитационного осаждения капель, для которой использовалась формула Стокса с учетом конечного числа Рейнольдса, хотя в турбулентных течениях эта величина может значительно меняться (см. [28]). Для расчетов мы воспользовались программным обеспечением, имеющимся в свободном доступе [29].

Для баланса кинетической энергии турбулентных флуктуаций по аналогии с [5—7] использовалось стационарное уравнение

$$\frac{dU}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z} \Phi_M \left(\frac{z}{L} \right) , \quad (18)$$

где L является аналогом масштаба Монина — Обухова, введенным для описания эффекта статической устойчивости приводного слоя воздуха за счет взвешенных капель:

$$L = \frac{u_*^3}{\kappa g (\rho_w / \rho_a) \langle sw \rangle},$$

где $\kappa = 0,4$ — постоянная Кармана, ρ_w / ρ_a — отношение плотностей воды и воздуха, $\langle sw \rangle$ — поток объемной концентрации капель:

$$\langle sw \rangle = - \int K_s(z) \frac{\partial S(z, r)}{\partial z} dr = \int V_f(r) S(z, r) dr.$$

Аналогично [2, 3, 27] использовалась следующая аппроксимация для Φ_M :

$$\Phi_M \left(\frac{z}{L} \right) = 1 + b \frac{z}{L},$$

где b — константа, равная 5 (см. [30]). Тогда (18) можно переписать в виде

$$\frac{dU}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z} \left(1 + \beta \frac{\rho_w \kappa g z}{\rho_a u_*^3} \int V_f(r) S(z, r) dr \right). \quad (19)$$

В предположении $K_s = \kappa u_* z$ уравнение (17) переходит в следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial S(z, r)}{\partial z} + \frac{V_f(r)}{\kappa u_* z} S(z, r) \left(1 + \beta \frac{\rho_w \kappa g z}{\rho_a u_*^3} \int V_f(r_1) S(z, r_1) dr_1 \right) = 0. \quad (20)$$

Аналогично [2, 3, 27] система (19), (20) решалась при z от $z = z_s$ — уровня генерации брызг, за который принимается уровень обрушения гребней волн (см. [2]). Согласно [23]

$$z_s = 0,635 H_s; \quad H_s = 0,018 \Omega^{-1,5} U_{10}^2 / g. \quad (21)$$

Здесь H_s — значительная высота волнения.

Уравнение (20) решалось с граничными условиями баланса между потоками брызг вверх и вниз (см. объяснение в [28]):

$$S(z, r) \Big|_{z=z_s} = \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{dF}{dr} \frac{1}{V_f(r)}.$$

Интегрирование уравнения (19) от z_s до текущего z с учетом постоянства концентрации брызг при $z < z_s$ [28] дает

$$U(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} + \beta \frac{\rho_w g}{\rho_a u_*^2} \int_{z_s}^z dz_1 \int V_f(r) S(z_1, r) dr. \quad (22)$$

Высота шероховатости z_0 связана с коэффициентом сопротивления нейтрально стратифицированного атмосферного пограничного слоя и является иной формой для его представления:

$$z_0 = H_{10} \cdot e^{-\frac{\kappa}{\sqrt{C_{DN}}}}$$

Окончательно выражение для коэффициента сопротивления C_D , модифицированного с учетом взвешенных частиц, имеет следующий вид:

$$C_D = \frac{C_{DN}}{\left(1 + \beta \frac{\rho_w g}{\rho_a u_*^2} \sqrt{C_{DN}} \int_{z_s}^{\infty} dz_1 \int V_f(r) S(z_1, r) dr\right)^2} \quad (23)$$

Зависимость C_D от U_{10} , показанная на рис. 5, б, хорошо согласуется с имеющимися на этот момент экспериментальными данными.

5. Роль брызг в переносе тепла между атмосферой и океаном при ураганном ветре

Согласно современным представлениям [31] интенсивность ураганов определяется потоком энтальпии влажного воздуха из океана в атмосферу, а не явного и скрытого тепла по отдельности. Вклад морских брызг в чистый поток энтальпии (net enthalpy flux) исследован в рамках концепции «возвращающихся» капель [32]. В работе [32] доказано, что капли, без остатка испарившиеся в атмосфере, не вносят вклада в поток энтальпии из атмосферы в океан, поскольку скрытое тепло испарения полностью компенсируется явным теплом, извлекаемым из атмосферы для испарения капель. В связи с этим чистый поток энтальпии из океана в атмосферу может быть обеспечен только той частью капель, которая падает в воду. Очевидно, что такие возвращаемые капли должны быть достаточно велики, и большие капли, порождаемые механизмом дробления типа «парашют», этому требованию удовлетворяют. Здесь будут приведены оценки их вклада в поток энтальпии из океана в атмосферу при ураганном ветре. Удельная энтальпия влажного воздуха определяется как суперпозиция явного и скрытого тепла:

$$k = (1 - q)c_p T_a + q(L_v + c_{pv} T_a),$$

где q — удельная влажность воздуха, c_p — удельная теплоемкость сухого воздуха при постоянном давлении, L_v — скрытая теплота парообразования, T_a — температура воздуха, а c_{pv} — удельная теплоемкость водяного пара при постоянном давлении.

Полный поток энтальпии из океана в атмосферу состоит из двух компонент: турбулентного потока H_{kt} и потока, связанного с брызгами, H_{ks} . Турбулентный поток H_{kt} обычно выражается балк-формулой

$$H_{kt} = C_{k0} U_{10} (k_{10} - k_s), \quad (24)$$

где C_{k0} — эмпирический коэффициент переноса энтальпии, практически независимый от скорости ниже 30 м/с (см. [28]) и равный 0,0011—0,0012, k_{10} и k_s — значения удельной энтальпии на высоте 10 м и на уровне моря.

Следуя [32], оценим поток энтальпии, связанный с брызгами, как поток явного тепла, определяемый разностью между температурой поверхности океана и температурой капли при ее падении в воду, T_w . Принимая во внимание, что испарившаяся часть капли не вносит вклада в чистый поток энтальпии из океана в атмосферу, мы вычисляем поток явного тепла Q_s , передаваемого в атмосферу только той частью капли, которая падает в воду. Тогда, используя уравнения микрофизики капли [33—36], получаем

$$Q_s(r) = \frac{4\pi r_f^3}{3} \rho_w c_{pw} (T_w - T_{eq}) (1 - \exp(-\tau_f / \tau_T)),$$

$$r_f = r_{eq} + (r_0 - r_{eq}) \exp(-\tau_f / \tau_r), \quad (25)$$

$$\tau_f = \frac{z_s}{V_f(r)}.$$

Здесь c_{pw} — удельная теплоемкость воды при постоянном давлении; T_{eq} — температура капли при термическом равновесии, ниже, чем T_w , из-за испарения капель; τ_f — время нахождения капли в воздухе над поверхностью воды; τ_T и τ_r — время релаксации температуры и радиуса капли соответственно; r_f — радиус капли во время падения в воду; $V_f(r)$ — скорость гравитационного оседания и z_s — высота генерации брызг, определяемая уравнением (21). Параметры в (25) рассчитаны по свободным кодам [29].

На рисунке 6 показаны зависимости от радиуса характерных времен эволюции капли в воздушном потоке: τ_R , τ_f и τ_T . Видно, что для больших капель с радиусами $r > 100$ мкм $\tau_R \gg \tau_f$, т. е. объем капли практически не меняется за время падения в воду. В то время как τ_T меньше или сравнимо с τ_f . Это означает, что капли успевают достичь равновесной температуры без значительного изменения объема. Согласно концепции возвращающихся капель [2], именно при таких условиях капли вносят значительный вклад в перенос энтальпии из океана в атмосферу.

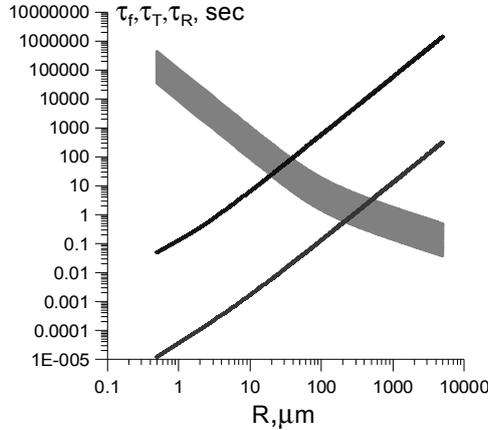


Рис. 6. Зависимости от радиуса характерного времени эволюции капли в воздушном потоке: τ_R (верхняя кривая), τ_f (серая полоса) и τ_T (нижняя кривая). Фоновые параметры: $U_{10} = 30\div 60$ м/с, $T_w = 25$ °С, $T_{air} = 27,5$ °С, относительная влажность RH = 96 %

С использованием построенной функции генерации капель вклад капель в поток энтальпии получим следующим образом:

$$H_{ks} = \rho_w \int_0^{\infty} \frac{dF(r, u_*)}{dr} Q_S dr. \quad (26)$$

Полный поток энтальпии $H_k = H_{kt} + H_{ks}$, а коэффициент обмена энтальпией, приведенный к нейтральной стратификации атмосферы, может быть найден из определения $C_{kN} = H_k / (\rho_a U_{10} (k_{10} - k_s))$.

Эффект устойчивой стратификации атмосферы, связанный с присутствием капель, может быть учтен так же, как коэффициент сопротивления, тогда

$$C_k = \frac{C_{kN}}{\left(1 + \beta \frac{\rho_w g}{\rho_a u_*^2} \sqrt{C_{DN}} \int_{z_s}^{\infty} dz_1 \int V_f(r) S(z_1, r) dr \right)^2}. \quad (27)$$

Эта зависимость C_k от U_{10} , возрастающая при скорости ветра выше 35—40 м/с, показана на рис. 7, а. Отсюда следует, что отношение коэффициентов обмена, C_K/C_D (рис. 7, б), увеличивается и при скорости ветра 35—40 м/с превышает 0,75 — нижний предел для реалистичного предсказания типичных скоростей ветра, которых согласно [32] ураган может достичь при наблюдаемых параметрах атмосферы и океана (рис. 7, б).

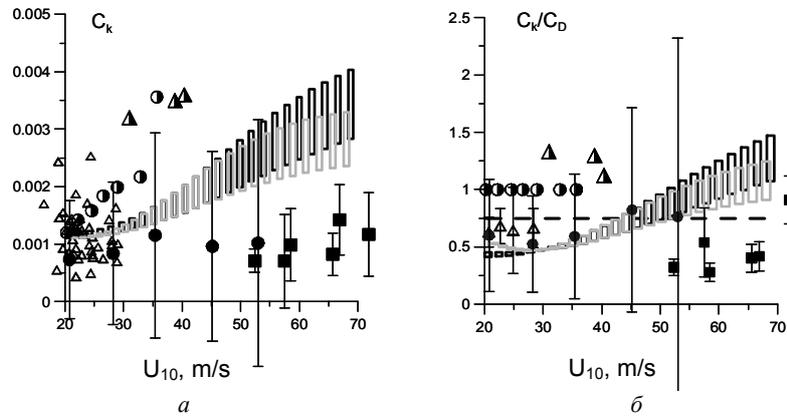


Рис. 7. Зависимость коэффициента переноса энтальпии C_k от U_{10} , рассчитанного в рамках настоящей модели (а), и отношение коэффициентов C_k/C_D (б) для Ω от 2,5 до 3,5. Экспериментальные данные: треугольники [40], кружки [41]

Следует отметить, что эти оценки дают оценку сверху потока энтальпии и коэффициента обмена из-за того, что мы пренебрегаем воздействием капель на профили температуры и влажности в атмосферном пограничном слое. Учет этого эффекта может привести к заметному уменьшению вклада капель, как это обсуждается в [37, 38]. Однако точную оценку этого эффекта осложняет ряд неопределенностей. Наиболее существенной является неопределенность начальных скоростей инжектируемых с поверхности воды капель, которые оказывают существенное влияние на потоки, связанные с брызгами (см., например, обсуждение в [39, 40]).

6. Выводы

Анализ последовательности кадров высокоскоростного видео показал, что основным механизмом генерации капель, срываемых с гребней волн при штормовом и ураганном ветре, является дробление типа «парашют». Активация этого процесса происходит при скорости ветра приблизительно 20 м/с, что соответствует скорости ветра 8 баллов по шкале Бофорта. На основе общих принципов статистической физики построена статистика возникновения «парашютов» и выведена функция генерации брызг, которая оказалась в хорошем согласии с данными как известного лабораторного, так и натурных экспериментов.

Механизм генерации брызг путем дробления типа «парашют» вносит заметный вклад в аэродинамическое сопротивление поверхности воды при ураганном ветре. При этом аэродинамическое сопротивление определяется вкладом трех факторов. Во-первых, «парашюты», имеющие размеры 1—2 см, создают заметное сопротивление воздушному потоку. Во-вторых,

вклад в касательное напряжение ветра вносит эффект ускорения воздушным потоком жидких объемов в процессе их преобразования из возвышений на поверхности воды в капли, летящие в потоке воздуха. Оба эти фактора вызывают увеличение касательного напряжения ветра, которое, однако, имеет тенденцию к насыщению с ростом скорости ветра, поскольку увеличение числа «парашютов» и капель компенсируется снижением вклада отдельных объектов в аэродинамическое сопротивление из-за уменьшения их размеров. Третий фактор, влияющий на аэродинамическое сопротивление, связан с эффектом стратификации воздушного потока по причине присутствия левитирующих капель. С ростом скорости ветра этот фактор приводит к снижению турбулентного напряжения, прежде всего, из-за роста концентрации капель в воздушном потоке. Комбинация всех трех факторов приводит к немонотонной зависимости коэффициента аэродинамического сопротивления от скорости ветра, обнаруженной экспериментально в ряде метеорологических и океанографических наблюдений.

Крупные капли, порождаемые фрагментацией «парашютов», вносят большой вклад в поток тепла. Они значительно увеличивают поток энthalпии при ураганном ветре. Сочетание падающей зависимости коэффициента аэродинамического сопротивления C_D и растущей зависимости коэффициента переноса энthalпии C_K от скорости ветра при условиях урагана обеспечивает растущую зависимость отношения C_K/C_D , которое становится больше 0,75 — минимального значения, необходимого согласно [31] для поддержания ураганного ветра в условиях типичных тропических океана и атмосферы.

Литература

1. *Andreas, E. L.* A review of the sea spray generation function for the open ocean // Atmosphere-Ocean Interactions / edited by W. Perrie. — Vol. 1. — Billerica : WIT Press, 2002. — P. 46.
2. *Makin, V. K.* A note on drag of the sea surface at hurricane winds // Boundary Layer Meteorol. — 2005. — Vol. 115, № 1. — P. 169—176.
3. *Kudryavtsev, V. N.* On the effect of sea drops on the atmospheric boundary layer // J. Geophys. Res. — 2006. — Vol. 111. — Art. C07020.
4. *Andreas, E. L.* Spray stress revised // J. Phys. Oceanogr. — 2004. — Vol. 34. — P. 1429—1440.
5. *Kudryavtsev, V. N.* Impact of ocean spray on the dynamics of the marine atmospheric boundary layer / V. N. Kudryavtsev and V. K. Makin // Boundary-Layer Meteorology. — 2011. — Vol. 140. — P. 383—410.
6. *Andreas, E. L.* A new sea spray generation function for wind speeds up to $32 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ // J. Phys. Oceanogr. — 1998. — Vol. 28. — P. 2175—2184.
7. *Fairall, C. W.* Investigation of the physical scaling of sea spray spume droplet production / C. W. Fairall, M. L. Banner, W. L. Peirson, W. Asher, and R. P. Morison // J. Geophys. Res. Ocean. — 2009. — Vol. 114. — Art. C10001.

8. *Veron, F.* Sea spray spume droplet production in high wind speeds / F. Veron, C. Hopkins, E. L. Harrison, and J. A. Mueller // *Geophys. Res. Lett.* — 2012. — Vol. 39. — Art. L16602.
9. *Richter, D. H.* Momentum transfer in a turbulent, particle-laden Couette flow / D. H. Richter & P. P. Sullivan // *Physics of Fluids.* — 2013. — Vol. 25. — Art. 053304.
10. *Fairall, C. W.* The effect of sea spray on surface energy transports over the ocean / C. W. Fairall, J. D. Kepert, and G. J. Holland // *Glob. Atmos. Ocean Syst.* — 1994. — Vol. 2. — P. 121—142.
11. *Andreas, E. L.* A bulk turbulent air–sea flux algorithm for high-wind, spray conditions / E. L. Andreas [et al.] // *J. Phys. Oceanography.* — 2008. — Vol. 38, № 7. — P. 1581—1596.
12. *Troitskaya, Y. I.* Laboratory and theoretical modeling of air–sea momentum transfer under severe wind conditions / Y. I. Troitskaya, D. A. Sergeev, A. A. Kandaurov, G. A. Baidakov, M. A. Vdovin, V. I. Kazakov // *J. Geophys. Res. Ocean.* — 2012. — Vol. 117. — Art. C00J21.
13. *Powell, M. D.* Reduced drag coefficient for high wind speeds in tropical cyclones // M. D. Powell, P. J. Vickery, T. A. Reinhold // *Nature.* — 2003. — Vol. 422. — P. 279—283.
14. *Koga, M.* Direct production of droplets from breaking wind-waves – its observation by a multi-colored overlapping exposure photographing technique // *Tellus.* — 1981. — Vol. 33. — P. 552—563.
15. *Lhuissier, H.* Bursting bubble aerosols / H. Lhuissier, E. Villermaux // *J. Fluid Mech.* — 2012. — Vol. 696. — P. 5—44.
16. *Gelfand, B. E.* Droplet breakup phenomena in flows with velocity lag // *Prog. Energ. Combust. Sci.* — 1996. — Vol. 22. — P. 201—265.
17. *Veron, F.* Sea spray spume droplet production in high wind speeds / F. Veron, C. Hopkins, E. Harrison, J. A. Mueller // *Geophys. Res. Lett.* — 2012. — Vol. 39. — Art. L16602.
18. *Foreman, R. J.* Revisiting the definition of the drag coefficient in the marine atmospheric boundary layer / R. J. Foreman & S. Emeis // *J. Phys. Oceanogr.* — 2010. — Vol. 40. — P. 2325—2332.
19. *Wright, C. W.* Hurricane directional wave spectrum spatial variation in the open ocean / C. W. Wright, E. J. Walsh, D. Vandemark, W. B. Krabill, A. W. Garcia, S. H. Houston, S. T. Murillo, M. D. Powell, P. G. Black, and E. D. Mark // *J. Phys. Oceanogr.* — 2001. — Vol. 31. — P. 2472—2488.
20. *Chou, W.-H.* Temporal properties of secondary drop breakup in the bag breakup regime / W.-H. Chou, G. M. Faeth // *Int. J. Multiph. Flow.* — 1998. — Vol. 24. — P. 889—912.
21. *Marmottant, P.* On spray formation / P. Marmottant, E. Villermaux // *J. Fluid Mech.* — 2004. — Vol. 498. — P. 73—111.
22. *Troitskaya, Y.* “Bag-breakup” spume droplet generation mechanism at hurricane wind. Part I : Spray generation function / Y. Troitskaya, A. Kandaurov, O. Ermakova, D. Kozlov, D. Sergeev, and S. Zilitinkevich // *J. Phys. Oceanogr.* — 2018. — Vol. 48, № 9. — P. 2167—2188. — URL: <https://doi.org/10.1175/JPO-D-17-0104.1>.
23. *Zhao, D.* New sea spray generation function for spume droplets / D. Zhao, Y. Toba, K. Sugioka, S. Komori // *J. Geophys. Res.* — 2006. — Vol. 111. — P. C02007.

24. *Toba, Y.* A parameter describing overall conditions of wave breaking, white-capping, sea-spray production and wind stress / Y. Toba and M. Koga // *Oceanic Whitecaps* / E. C. Monahan and G. MacNiocaill (eds. — Dordrecht : D. Reidel Publishing Company, 1986. — P. 37—47.
25. *Troitskaya, Y.* “Bag-breakup” spume droplet generation mechanism at hurricane wind. Part II : Contribution to momentum and enthalpy transfer / Y. Troitskaya, O. Druzhinin, D. Kozlov, and S. Zilitinkevich // *J. Phys. Oceanogr.* — 2018. — Vol. 48, № 9. — P. 2189—2207. — URL: <https://doi.org/10.1175/JPO-D-17-0105.1>.
26. *Jarosz, E.* Bottom-up determination of air-sea momentum exchange under a major tropical cyclone / E. Jarosz, D. A. Mitchell, D. W. Wang, and W. J. Teague // *Science*. — 2007. — Vol. 315. — P. 1707—1709.
27. *Lykossov, V. N.* Atmospheric and oceanic boundary layer physics // *Wind stress over the ocean* / eds. I. S. F. Jones and Y. Toba. — Cambridge : Cambridge University Press, 2002. — P. 54—81.
28. *Veron, F.* Ocean spray // *Annu. Rev. Fluid Mech.* — 2015. — Vol. 47. — P. 507—538.
29. *Andreas, E. L.* An algorithm for fast microphysical calculations that predict the evolution of saline droplets. — 2013. — URL: http://people.nwra.com/resumes/andreas/free_software/Fast_Microphys_V1.1.zip.
30. *Dyer, A. J.* A review of flux-profile relationships // *Boundary-Layer Meteorology*. — 1974. — Vol. 7. — P. 363—372.
31. *Emanuel, K. A.* Sensitivity of tropical cyclones to surface exchange coefficients and a revised steady-state model incorporating eye dynamics // *J. Atmos. Sci.* — 1995. — Vol. 52. — P. 3969—3976.
32. *Andreas, E. L.* Effects of sea spray on tropical cyclone intensity / E. L. Andreas, K. A. Emanuel // *J. Atmos. Sci.* — 2001. — Vol. 58. — P. 3741—3751.
33. *Andreas, E. L.* Time constants for the evolution of sea spray droplets // *Tellus*. — 1990. — Vol. 42B. — P. 481—497.
34. *Andreas, E. L.* Sea spray and the turbulent air-sea heat fluxes // *J. Geophys. Res.* — 1992. — Vol. 97. — P. 11429—11441.
35. *Andreas, E. L.* The temperature of evaporating sea spray droplets // *J. Atmos. Sci.* — 1995. — Vol. 52. — P. 852—862.
36. *Andreas, E. L.* Approximation formulas for the microphysical properties of saline droplets // *Atmospheric Research*. — 2005. — Vol. 75. — P. 323—345.
37. *Bao, J. W.* Numerical simulations of air-sea interaction under high wind conditions using a coupled model : a study of hurricane development / J. W. Bao, J. Wilczak, J. Choi & L. Kantha // *Mon. Weather Rev.* — 2000. — Vol. 128. — P. 2190—2210.
38. *Mueller, J. A.* Impact of sea spray on air-sea fluxes. Part II : Feedback effects / J. A. Mueller & F. Veron // *J. Phys. Oceanogr.* — 2014. — Vol. 44. — P. 2835—2853.
39. *Troitskaya, Y.* On the effect of sea spray on the aerodynamic surface drag under severe winds / Y. Troitskaya, E. Ezhova, I. Soustova & S. Zilitinkevich // *Ocean Dyn.* — 2016. — Vol. 66. — P. 659—669.
40. *Richter, D. H.* An assessment of the flux profile method for determining air-sea momentum and enthalpy fluxes from dropsonde data in tropical cyclones / D. H. Richter, R. Bohac & D. P. Stern // *J. Atmos. Sci.* — 2016. — Vol. 73. — Art. JAS-D-15-0331.1.
41. *Black, P. G.* Air-sea exchange in hurricanes : synthesis of observations from the coupled boundary layer air-sea transfer experiment / P. G. Black [et al.] // *Bull. Am. Meteorol. Soc.* — 2007. — Vol. 88. — P. 357—374.

**Реконструкция
сложных динамических систем**



**НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЫ:
МЕТОД ЭМПИРИЧЕСКОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ
СЛОЖНЫХ СИСТЕМ***

*А. М. Фейгин, А. С. Гаврилов, Е. М. Лоскутов,
Д. Н. Мухин, А. Ф. Селезнев*

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород

В статье представлен новый метод реконструкции сложных пространственно распределенных систем по наблюдаемым временным рядам, основанный на поиске нелинейных многообразий, описывающих главную часть изменчивости наблюдаемой системы и при этом учитывающих динамическую природу реконструируемой системы — нелинейных динамических мод. Данный метод применен к анализу климатических временных рядов за последние 150 лет. Найденные главные нелинейные моды изменчивости климата на годовых и декадных масштабах включают такие явления, как годовой цикл, Эль-Ниньо Южное колебание, Тихоокеанское декадное колебание, проявляющиеся в различных регионах земного шара. В частности, подтверждено четыре климатических перехода, связанных со сменой фазы Тихоокеанского декадного колебания, имевших место в XX веке. Проведенный анализ взаимосвязей различных регионов на основе найденных мод показал рост нелинейности этих связей во второй половине XX века.

Введение

В настоящее время задача эмпирической реконструкции динамической системы, т. е. реконструкции фазового пространства и законов эволюции системы по данным наблюдений, является актуальной во многих активно развивающихся областях знаний, таких как изучение живых систем и исследование климата Земли. Это связано как с ростом качества методов измерения и количества извлекаемой информации (как правило, речь идет о достаточно высоком пространственном и временном разрешении рассматриваемого объекта), так и с быстрым увеличением вычислительных мощностей и появлением соответствующих методов машинного обучения.

Основным преимуществом эмпирических методов моделирования является их нацеленность на воспроизведение имеющихся данных. Вследст-

* Настоящая статья написана по материалам лекции «Прогностические эмпирические модели сложных систем: метод построения и приложение к исследованию климата», прочитанной А. М. Фейгиным на предыдущей школе «Нелинейные волны — 2016», с учетом новых результатов, полученных за прошедшее время и обнародованных в серии оригинальных докладов на школе «Нелинейные волны — 2018».

вие этого становится необязательным использование модельных уравнений, параметризующих конкретные процессы (в частности, эволюцию системы с пространственными и временными масштабами, не разрешаемыми моделью). Это делает их наиболее востребованными в тех случаях, когда уравнения, описывающие исследуемое явление, до конца не известны либо не могут быть корректно применены. Например, такими являются многие процессы, протекающие в климатической системе Земли.

Как правило, требующие анализа наблюдаемые данные представляют собой временные ряды, измеренные с дискретным шагом по времени в каждой точке некоторой пространственной сетки. При этом, как правило, количество узлов сетки (т. е. размерность D пространства, в котором задано значение наблюдаемой характеристики в конкретный момент времени) очень велико, полная система является сложной, мультимасштабной, а длительность измеренных рядов ограничена. В этих условиях адекватная полная реконструкция закона эволюции системы по имеющимся данным невозможна, поскольку количества временных отсчетов недостаточно для того, чтобы статистически значимо покрыть соответствующее системе высокоразмерное многообразие в фазовом пространстве. Можно показать, что допустимая размерность многообразия, которое может быть реконструировано по ряду длиной N , логарифмически зависит от N и заведомо меньше размерности исходного пространства переменных при сколь угодно реальном N . Одним из возможных путей решения данной проблемы является эмпирическое отыскание переменных, описывающих главные (энергетически наиболее значимые) процессы, характеризующие разрешаемыми временными масштабами. Эти процессы представляют ту часть системы, которая доступна для эмпирической реконструкции по имеющимся данным. По сути, выделение таких переменных представляет собой эмпирическую редукцию размерности данных. О новом методе решения задачи редукции размерности, применимом, в частности, к климатическим данным, пойдет речь ниже.

Одним из наиболее известных и широко применяемых способов редукции размерности, который мы будем использовать для оценки эффективности нового метода, является разложение данных по базису *эмпирических ортогональных функций* (ЭОФ), основанное на широко известном *методе главных компонент* (МГК) [1, 2]. Он состоит в переходе к новым переменным — *главным компонентам* (ГК) — посредством проекции исходных данных на собственные векторы пространственной матрицы ковариаций $\mathbf{C} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T$, где \mathbf{x}_n — вектор-столбец наблюдаемых данных размерностью D (набор всех узлов пространственной сетки) в момент дискретного времени n , $n = 1, \dots, N$:

$$p_{in} = \mathbf{v}_i^T \mathbf{x}_n. \quad (1)$$

Здесь p_{in} — значение i -й ГК в момент времени n , \mathbf{v}_i — i -й собственный вектор-столбец, имеющий единичную норму, представляющий собой пространственную структуру, на которую проектируются исходные данные, и называемый ЭОФ. Соответствующие собственные значения при этом равны вариациям ГК и выстроены в порядке убывания. Они характеризуют долю суммарной вариации (среднего квадрата отклонений от среднего значения) исходных временных рядов, описываемую ГК. При этом временные ряды ГК не коррелируют друг с другом по времени, а структуры ЭОФ ортогональны в пространстве.

Редукция размерности данных с помощью ЭОФ состоит в том, что в качестве переменных, представляющих систему, выбираются лишь несколько (d) ГК, в то время как общее их число равно числу узлов пространственной сетки. В итоге исходные данные представляются следующим образом:

$$\mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^d \mathbf{v}_i p_{in} + \mathbf{r}_n, \quad (2)$$

где первое слагаемое — главная часть разложения, фактически описываемая в d -мерном подпространстве, образуемом главными ЭОФ, а \mathbf{r}_n — остаток разложения. При этом можно показать [1], что для любого d ЭОФ-разложение соответствует максимально возможной вариации главной части и минимально возможной вариации остатка.

Отметим, что существует множество других методов редукции размерности, основанных на подобном ЭОФ-разложению линейном преобразовании переменных [3—15]. Наряду с неоспоримой простотой численной реализации этих методов, линейность заложенного в них преобразования координат является их очевидным недостатком: они не способны в явном виде учесть нелинейность связей между различными наблюдаемыми переменными. Такая связь, очевидно, является общим свойством сложных систем (в частности, климатической системы), что может ограничивать эффективность применения линейных методов в целом ряде задач.

Среди существующих методов нелинейной редукции размерности можно выделить две большие группы методов. Первая группа основана на использовании линейного МГК в специальном пространстве, которое можно представить как результат определенного нелинейного преобразования исходных переменных [16—21]. Основным недостатком этих методов — отсутствие в явном виде обратного преобразования из пространства найденных ГК в пространство исходных переменных. Другая группа методов нелинейной редукции [22—25] основана на построении главного нелинейного многообразия [22], когда явно находятся и скрытые переменные (нелинейные ГК), и соответствующее обратное преобразование. При этом поиск нелинейного многообразия, вообще говоря, представляет собой некорректную обратную задачу, имеющую множество возможных решений,

поэтому в различные методы закладываются различные виды регуляризации решения, т. е. априорная информация о системе. Естественно, в результате получаемое конкретное решение зависит от заложенной априорной информации. В данной статье будет представлен новый метод нелинейной редукции размерности с помощью разложения на нелинейные динамические моды [26—28], в котором в качестве априорной информации учитывается достаточно общее и физически адекватное условие — гладкость получаемых ГК, т. е. наличие у временных рядов ГК некоторого временного масштаба, оптимальная величина которого также находится эмпирически.

1. Нелинейные динамические моды

Из выражения (2), типичного для линейных методов редукции размерности, ясно, что оно описывает d -мерное линейное многообразие в исходном пространстве, на которое проецируется по тому или иному правилу наблюдаемый временной ряд $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$. При этом векторы $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$ являются параметрами, задающими это многообразие, а ГК представляют собой результат проекции данных на него. Заметим, что выбор размерности d , как правило, не входит в метод разложения и возлагается на пользователя.

Каждая компонента $\mathbf{v}_i p_{in}$ в выражении (2) представляет собой векторный временной ряд, линейно зависящий от скалярного ряда i -й ГК p_{i1}, \dots, p_{iN} , т. е. координаты этой компоненты являются линейно связанными друг с другом. Отсюда очевидно, что линейные методы по построению не могут эффективно учесть возможные нелинейные связи между различными компонентами ряда \mathbf{x} . Естественным обобщением выражения (2), способным преодолеть указанный недостаток, является следующий вид разложения:

$$\mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^d \mathbf{f}_i(p_{in}) + \mathbf{r}_n. \quad (3)$$

В отличие от (2), здесь каждое слагаемое $\mathbf{f}_i(p_{in})$ обозначает нелинейную векторную функцию \mathbf{f}_i от скалярного аргумента p_{in} , т. е. нелинейное отображение некоторого скалярного временного ряда p_{i1}, \dots, p_{iN} скрытой переменной в пространство исходных переменных. Таким образом, компоненты вектора $\mathbf{p}_n = (p_{1n}, p_{2n}, \dots, p_{dn})$ представляют собой соответствующие моменту n координаты на d -мерном нелинейном многообразии, определяемом отображениями $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_d$. Это представление может хорошо описывать данные, формируемые аддитивными нелинейными откликами на скалярные сигналы, и является более общим, чем любое линейное представление*.

* Отметим, что при этом оно, вообще говоря, не описывает произвольное d -мерное многообразие.

Можно показать [1], что при традиционном ЭОФ-разложении компоненты $\mathbf{v}_i p_{in}$ могут быть найдены последовательно, одна за другой, с помощью пошаговой процедуры: на i -м шаге решается задача минимизации вариации i -го остатка разложения одновременно по аргументам \mathbf{v}_i и p_{i1}, \dots, p_{iN} (фактически решается задача аппроксимации данных в предположении, что текущий остаток разложения — белый гауссов шум). Аналогичная пошаговая схема применима к разложению (3).

1. Сначала находится первая компонента на основе аппроксимации данных \mathbf{x}_n с помощью неизвестных отображения \mathbf{f}_1 и скалярного временного ряда p_{11}, \dots, p_{1N} в предположении гауссовости и дельта-коррелированности по времени остатка \mathbf{r}_n (предлагаемый алгоритм байесовой аппроксимации описан ниже):

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{f}_1(p_{1n}) + \mathbf{r}_{1n}. \quad (4)$$

2. Далее делается вторая итерация, в которой полученный на первой итерации остаток \mathbf{r}_{1n} играет роль данных \mathbf{x}_n , и с ним проделывается та же процедура, что и в первой итерации, по поиску второй компоненты \mathbf{f}_2 и p_{21}, \dots, p_{2N} (по аналогии с выражением (4)).

3. Далее берется остаток после второй итерации, с ним проделывается следующая итерация по поиску следующей компоненты и т. д.

Кроме того, традиционное ЭОФ-разложение сфокусировано на максимизации доли вариации исходных временных рядов, захваченной получаемыми линейными ГК. При этом не производится разделение наблюдаемой изменчивости системы по временным масштабам: информация о динамике на различных временных масштабах оказывается перемешанной в различных ГК. В предлагаемом методе нелинейного разложения временной масштаб каждой нелинейной ГК будет явно учтен: в рамках байесова подхода будут находиться как оптимальная сложность нелинейной функции \mathbf{f}_i , так и оптимальный временной масштаб нелинейной ГК. В результате предлагаемое разложение должно существенно лучше разделять временные масштабы и соответствующие им подсистемы. Полученные данным способом на основе описанной итерационной схемы компоненты $\mathbf{f}_i(p_{in})$ будем называть *нелинейными динамическими модами* (НДМ) [27].

Заметим, что благодаря оптимизации сложности и временного масштаба НДМ возможна ситуация, когда на некотором шаге нулевое решение $\mathbf{f}_i(p_{in}) = 0$ является оптимальным (в частности, более оптимальным, чем обычное ЭОФ-решение). Это означает, что при данных априорных предположениях статистически значимые НДМ отсутствуют и НДМ-разложение закончено. В этом случае к остаткам может быть применено любое другое разложение (например, ЭОФ-разложение).

1.1. Параметризация НДМ

В этом и следующем разделах рассмотрим одну итерацию поиска НДМ. Для удобства выкладок при формулировании алгоритма будем использовать выражение (4), в котором опустим у \mathbf{f} , p и \mathbf{r} первый индекс, обозначающий номер НДМ:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{f}(p_n) + \mathbf{r}_n. \quad (5)$$

Здесь \mathbf{f} — искомое нелинейное отображение, а p_n — значение искомой ГК, временной ряд которой обозначается теперь p_1, \dots, p_N , в момент дискретного времени n .

Итак, на этой итерации мы имеем остаток от предыдущей итерации в качестве входных данных \mathbf{x}_n . Первая возникающая проблема при поиске НДМ — чрезвычайно большая размерность D вектора \mathbf{x}_n (в частности, в климатических приложениях, которые будут рассмотрены), что делает прямую задачу аппроксимации практически нереализуемой численно. Поэтому начальным шагом является предварительная редукция размерности входного ряда \mathbf{x}_n (выражение (5)) с помощью обычного ЭОФ-поворота: $y_{in} = \mathbf{v}_i^T \mathbf{x}_n$.

После этого в пространстве нескольких главных линейных компонент строится НДМ, параметризованная с помощью полиномов Эрмита:

$$y_{in} = \sum_{j=1}^m a_{ji} w_j(p_n) + \sigma_f \xi_{in}, \quad i = 1, \dots, K. \quad (6)$$

Здесь $\{w_j(p_n)\}_{j=0}^{\infty}$ — базис полиномов Эрмита, нормированных на единицу (как будет указано ниже, именно этот базис наиболее удобен в данном случае, хотя использование любого другого базиса также возможно); a_{ji} — набор $K \cdot (m + 1)$ коэффициентов для K полиномов степени m , который будет также обозначаться как матрица \mathbf{a} ; $\xi_{1n}, \dots, \xi_{Kn}$ — дельта-коррелированные гауссовы шумы с нулевым средним и единичной дисперсией, а σ_f — их амплитуда. В данной параметризации учтена возможность того, что только часть главных ЭОФ являются нелинейно связанными посредством искомой НДМ. Для остальных ГК строится тривиальная модель, в которую НДМ непосредственно не входит:

$$y_{in} = \sigma_i \xi_{in}, \quad i = K + 1, \dots, D. \quad (7)$$

На основе полного обратного ЭОФ-поворота $\mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^D \mathbf{v}_i y_{in}$ легко видеть, что выражения (6) и (7) соответствуют модели в форме (5), в которой функция \mathbf{f} задает одномерное нелинейное многообразие (т. е. одномерную кривую), лежащее в подпространстве K главных линейных компонент.

1.2. Байесов подход к поиску НДМ

В рамках байесова подхода [29] ценовая функция для обучения выбранной модели НДМ, т. е. поиска коэффициентов полинома \mathbf{a} , временного ряда нелинейной ГК p_1, \dots, p_N , а также неизвестных параметров $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_f; \sigma_{K+1}, \dots, \sigma_D)$, представляет собой плотность вероятности (ПВ) неизвестных переменных модели при условии наблюдаемых данных $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$. Обучение состоит в поиске максимума данной ПВ по неизвестным переменным $(\mathbf{a}; p_1, \dots, p_N; \boldsymbol{\sigma})$. Согласно теореме Байеса, данная ПВ может быть выражена следующим образом:

$$P(\mathbf{a}; p_1, \dots, p_N; \boldsymbol{\sigma} | \mathbf{X}) \propto P(\mathbf{X} | \mathbf{a}; p_1, \dots, p_N; \boldsymbol{\sigma}) \cdot P_{pr}(p_1, \dots, p_N) P_{pr}(\mathbf{a}) P_{pr}(\boldsymbol{\sigma}). \quad (8)$$

Здесь $P(\mathbf{X} | \mathbf{a}; p_1, \dots, p_N; \boldsymbol{\sigma})$ — функция правдоподобия, т. е. вероятность того, что данные \mathbf{X} сгенерированы моделью (5) при конкретных значениях параметров $(\mathbf{a}; p_1, \dots, p_N; \boldsymbol{\sigma})$. Она может быть легко написана на основе уравнений модели (6), (7) и предположений о дельта-коррелированности и гауссовости остатков (см. работы [26—28]) и здесь не приводится. Ее максимум достигается при минимальном значении вариации остатка. Однако ключевым элементом в байесовом подходе является задание априорных ПВ для неизвестных параметров, т. е. требуемых свойств решения, благодаря знанию которых происходит также регуляризация задачи.

Главное априорное предположение, которое будет сделано для НДМ, состоит в явном учете динамической природы получаемых нелинейных ГК p_1, \dots, p_N , а именно в требовании наличия связи каждого значения p_n с предшествующим по времени значением p_{n-1} . Мы будем использовать априорную ПВ для p_1, \dots, p_N в следующем виде:

$$P_{pr}(p_1, \dots, p_N) \propto \exp \left[-\frac{1}{2} p_1^2 - \frac{1}{2\sigma_p^2} \sum_{n=2}^N (p_n - b p_{n-1})^2 \right], \quad (9)$$

$$b = e^{-1/\tau}, \quad \sigma_p = \sqrt{1 - b^2}.$$

Можно показать [26], что ПВ (9) определяет ансамбль реализаций длиной N красного шума с единичной дисперсией и временем автокорреляции τ , имеющего оператор эволюции $p_n = b p_{n-1} + \sigma_p \eta_n$, где η_n — белый гауссов шум. Несмотря на общность такого априорного предположения, оно позволяет ограничить класс получаемых решений за счет исключения коротких временных масштабов (меньше τ) из рассмотрения. Другими словами, априорная ПВ (9) предполагает существование оператора эволюции для временного ряда ГК, действующего в определенном диапазоне временных масштабов, что является априорным базовым свойством реконструируемой динамической системы. В то же время введение данно-

го априорного множителя в выражение (9) осуществляет регуляризацию операции проецирования данных на соответствующее одномерное многообразие.

Несмотря на условие $\sigma_p^2 + b^2 = 1$, ПВ (9) не исключает случая с бесконечно малой вариацией временного ряда и связанного с этим вырождения в задаче поиска НДМ. Поэтому целью априорной ПВ для коэффициентов полинома \mathbf{a} является снятие этого вырождения при сохранении максимальной общности априорно допустимых форм искомого нелинейного многообразия. Идея выбора данной ПВ состоит в том, что она должна обеспечивать модели возможность воспроизводить матрицу ковариаций исходных данных \mathbf{X} , а также быть инвариантной по отношению к ортогональному повороту базиса полиномов в (6). Можно показать [27, 28], что при использовании базиса нормированных полиномов Эрмита и благодаря некоррелированности линейных ГК, в пространстве которых строится модель (6), накладываемые на априорную ПВ для коэффициентов \mathbf{a} условия приводят к следующему выражению для ПВ:

$$P_{pr}(\mathbf{a}) = \prod_{j=0}^m \prod_{i=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_i/(m+1)}} \exp\left(-\frac{|a_{ji}|^2}{2\lambda_i/(m+1)}\right), \quad (10)$$

где $\lambda_i = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_{in}$ — вариации линейных ГК (собственные значения матрицы ковариаций) из выражения (6). Удобство использования базиса нормированных полиномов Эрмита состоит в том, что инвариантная мера красного шума, определяемого выражением (9), оказывается равной весу, с которым эти полиномы ортогональны [27, 28].

Что касается априорного распределения параметров \mathbf{u} , рассматриваемая задача аппроксимации по ним хорошо регуляризована: можно показать, что для каждого набора \mathbf{a} и p_1, \dots, p_N существует единственное решение \mathbf{u} . Поэтому априорное распределение $P_{pr}(\mathbf{y})$ берется однородным в некотором достаточно широком интервале значений и на результат максимизации (8) не влияет.

Можно заметить, с учетом всех сделанных утверждений и определений, что в главное уравнение модели НДМ (6) и в выражение для ценовой функции (8) входят три параметра, выбор которых до сих пор остался не определенным: временной масштаб τ нелинейных ГК, степень полинома m и параметр предварительной редукции K (количество линейных ГК, в пространстве которых строится НДМ). В рамках байесова подхода эти параметры называются гиперпараметрами или структурными параметрами. Они определяют допустимую сложность модели и ансамбль допустимых решений. Ясно, что при слишком простой модели (например, $m = 1$) точность аппроксимации данных с помощью НДМ будет слишком плохой

и модель может по построению не учесть важные свойства, содержащиеся в исходных данных; если же модель, наоборот, чересчур сложна (например, очень большая степень m), то модель опишет наблюдаемые данные с очень хорошей точностью, воспроизведя при этом и реализацию шума, присутствующего в данных. В результате нелинейное многообразие будет иметь сложную форму и не будет иметь физического смысла, так как оно полностью зависит от реализации шума в системе (такая модель называется переобученной). Поэтому необходимо найти оптимальные значения параметров, при которых модель НДМ не слишком проста, но и не является переобученной. В рамках байесова подхода эта задача может быть решена с помощью байесова критерия оптимальности, называемого байесовой обоснованностью или усредненным правдоподобием [27, 29]. Она характеризует вероятность модели с фиксированными структурными параметрами (τ , m , K) и произвольными параметрами ($\mathbf{a}; p_1, \dots, p_N; y$) сгенерировать наблюдаемый временной ряд \mathbf{X} и выражается усредненной по параметрам ($\mathbf{a}; p_1, \dots, p_N; y$) правой частью выражения (8):

$$P(\mathbf{X}|\mathbf{f}, m, K) = \int_{\mathbf{a}; p_1, \dots, p_N; y} P(\mathbf{X}|\mathbf{a}; p_1, \dots, p_N; y) \cdot P_{pr}(p_1, \dots, p_N) P_{pr}(\mathbf{a}) P_{pr}(y). \quad (11)$$

Оптимальными значениями считаются τ , m , K , которые максимизируют вероятность (11).

Точное вычисление интеграла (11) является чрезвычайно трудоемкой задачей из-за большой размерности пространства подынтегральных аргументов и сложного устройства подынтегрального выражения (наличия, вообще говоря, нескольких локальных максимумов). В качестве оценки данного интеграла будем использовать наибольшее из значений, полученных методом Лапласа, т. е. интегрированием в окрестности того или иного локального максимума подынтегрального выражения, показатель экспоненты которого разложен в ряд до второго порядка (подробнее см. [27]). Данная оценка является более общей, чем широко используемый тривиальный предельный случай оценки байесовой обоснованности, называемый критерием Шварца [30].

Заметим, что локальные максимумы выражения (8) совпадают с локальными максимумами подынтегрального выражения в (11). На основе этого, опуская технические детали, приведем простой алгоритм, реализующий поиск одной НДМ.

1. Генерируется случайный набор структурных параметров (τ , m , K).
2. Генерируются случайные значения ($\mathbf{a}; p_1, \dots, p_N; y$) и, отталкиваясь от этих значений, производится максимизация логарифма выражения (8) квазиградиентным методом. Таким образом, находится один из локальных максимумов выражения (8).

3. Вычисляется байесова обоснованность (1) для данного набора (t, m, K) на основе найденных значений $(\mathbf{a}; p_1, \dots, p_N; y)$, соответствующих максимуму (8).

4. Шаги 1—3 повторяются нужное количество раз.

5. Из полученного ансамбля решений в качестве оптимального выбирается решение $(\mathbf{a}; p_1, \dots, p_N; y)$, найденное при структурных параметрах (ϕ, m, K) , соответствующих максимальному значению байесовой обоснованности. Это решение и есть НДМ.

Наиболее ресурсоемкий в данном алгоритме шаг максимизации 2. Как правило, для достижения ответа требуется достаточно большое число итераций, включающих такую максимизацию (шаг 4). Достоинством предложенного алгоритма является возможность его использования в режиме параллельных вычислений. Более детально подробности метода НДМ и алгоритма для их вычислений изложены в работах [26—28].

2. Главные нелинейные моды климатической изменчивости на интервале 1981—2014 годов

Естественная («внутренняя») изменчивость играет ключевую роль в отклике климата на различные внешние форсинги, в частности эмиссии CO_2 . Существуют внутренние моды климатической системы, такие как Эль-Ниньо Южное колебание (ЭНЮК), Тихоокеанское декадное колебание (ТДК), Атлантическое мультидекадное колебание, которые проявляются как в региональном, так и в глобальном климате и оказывают сильное влияние на глобальную среднюю температуру земной поверхности. Так, в недавних работах [31, 32] указывается, что естественная декадная изменчивость (с масштабами около одного или нескольких десятилетий) существенно модулирует рост глобальной средней температуры. В частности, по мнению авторов работы [31], замедление глобального потепления 1998—2015 годов [33] связано с наступлением отрицательной фазы Тихоокеанского декадного колебания, что также сместило изменчивость ЭНЮК в сторону доминирования условий Ла-Нинья (холодной фазы ЭНЮК). В настоящее время ясно, что корректное моделирование естественной изменчивости чрезвычайно важно для оценки будущего поведения глобального климата. В то же время воспроизведение декадной изменчивости существующими климатическими моделями по-прежнему не является достаточно надежным [31, 34].

Как отмечено во введении, эмпирический подход является альтернативным способом исследования климатической системы. В данном разделе моды естественной изменчивости климата в 1981—2015 годах выделяются на основе НДМ-разложения спутниковых данных измерений поверхностной температуры Мирового океана. Фактически, находится низкораз-

мерный эмпирический базис для реконструкции фазового пространства динамической системы, захватывающий главные свойства наблюдаемой динамики климата.

2.1. Наблюдаемые данные и результат их НДМ-разложения

Для анализа были взяты временные ряды ежемесячного поля температуры поверхности океана (ТПО) NOAA OI.v2 [35], покрывающие поверхность Земли с разрешением 1×1 градус, на 33-летнем интервале с ноября 1981 года по октябрь 2014 года. В результате размерность наблюдаемого поля данных составила $D = 44219$ (число узлов пространственной сетки, приходящихся на поверхность океана).

В результате НДМ-разложения этих данных с помощью метода, описанного в разд. 1, было найдено три главные нелинейные моды (четвертая НДМ оказывается равной нулю — см. вводную часть разд. 1). Соответствующие им временные ряды $p(t)$ представлены на рис. 1, *a* (см. вклейку между с. 208 и 209) в порядке убывания энергии, т. е. захваченной ими доли вариации ТПО (сверху вниз). Толщина линии на этом рисунке соответствует 95%-ному байесову доверительному интервалу, характеризующему неопределенность оценки скрытого состояния $p(t)$. Остаток, который не описывается тремя найденными НДМ, был разложен на обычные ЭОФ, учитывающие линейные связи между временными рядами. Сравнивая вариацию ТПО, захватываемую тремя НДМ, с вариацией, захватываемой обычными линейными ГК, полученными посредством проекции данных ТПО на главные ЭОФ, можно видеть, что три НДМ описывают около 85 % полной вариации ТПО, что примерно соответствует вариации шести линейных ГК (см. рис. 1, *б*, демонстрирующий кумулятивную вариацию, захватываемую соответствующим количеством НДМ). Рисунок 1, *в* показывает вклад каждой НДМ в линейные ГК. Видно, что каждой НДМ соответствует определенная фракция линейных ГК. При этом суммарно вовлеченными в нелинейное разложение оказываются примерно 20 линейных ГК. Определяемое ими подпространство содержит всю нелинейность, которая может быть извлечена из данных ТПО с помощью НДМ-разложения.

Поскольку для каждой i -й НДМ найдена соответствующая функция \mathbf{f}_i , отображающая скалярный временной ряд $p_i(t)$ в пространство наблюдаемых переменных ТПО, мы имеем возможность визуализировать временные ряды НДМ в географических координатах. Такая визуализация полученных НДМ 1—3 представлена на рис. 2, *a—в* для января 1992 года (см. вклейку), а также в виде анимационного файла, демонстрирующего весь наблюдаемый временной интервал и доступного по интернет-ссылке: media.nature.com/original/nature-assets/srep/2015/151022/srep15510/extref/srep15510-s2.gif (работа [27]). Кроме того, на рис. 2, *г* и в указанном анимационном файле изображен остаток от НДМ-разложения.

Первая мода осциллирует с периодом 1 год, отражая годовой ход, имеющийся в данных ТПО. Вторая и третья моды имеют более длинные временные масштабы, по порядку величины соответствующие масштабам изменчивости ЭНЮК и ТДК. Вторая мода очевидным образом связана с ЭНЮК: она возбуждается с соответствующим знаком во время эпизодов Эль-Ниньо и Ла-Нинья (см., например, рис. 2, на котором изображен момент времени, соответствующий эпизоду Эль-Ниньо 1992 года). В остатке разложения (см. рис. 2, z и анимационный файл) присутствуют масштабы меньше 1 года; в рамках процедуры НДМ-разложения его оптимальным описанием является описание в виде шума.

2.2. Анализ главных мод

Проведем более детальный анализ вклада найденных НДМ в изменчивость ТПО в различных географических регионах, а также соответствующих этим НДМ климатических явлений. С этой целью рассмотрим различные индексы, основанные на аномалиях ТПО (АТПО) — временных рядах ТПО, в которых из значения в каждом месяце вычтено среднее значение за этот месяц. В табл. 1 приведены индексы, соответствующие различным регионам в Северном полушарии и связанные с глобальным климатом: Nino 3.4 [36] — основанный на ТПО индекс ЭНЮК, PDO (Pacific Decadal Oscillation) — индекс ТДК, определяемый как проекция данных на главную ЭОФ АТПО в северной части Тихого океана [37], NTA (North Tropical Atlantic) — средняя температура в северной тропической Атлантике [38], IOD (Indian Ocean Dipole) — индийский океанический диполь [39]. Также в табл. 1 добавлен индекс NA (North Atlantic), определяемый средней ТПО в северном Атлантическом океане.

Таблица 1

Индексы, вычисленные по полю ТПО, реконструированному с помощью НДМ

Индекс	Регион	Описание	Корреляция с АТПО-индексом
Nino 3.4	[5° S — 5° N; 190° E — 120° W]	Среднее по региону	0,88
PDO	[20° N — 60° N; 140° E — 120° W]	Проекция на главную ЭОФ АТПО в регионе	0,75
NTA	1. [6° N — 18° N; 60° W — 20° W] 2. [6° N — 10° N; 20° W — 10° W]	Среднее по объединению регионов 1 и 2	0,74
NA	[45° N — 70° N; 60° W — 0° W]	Среднее по региону	0,73
IOD	1. [10° S — 10° N; 50° E — 70° E] 2. [0° N — 10° N; 90° E — 110° E]	Разница между средними по регионам 1 и 2	0,38

Каждый из этих индексов был вычислен согласно приведенному в таблице 1 определению для каждой из трех НДМ. Наиболее интенсивная (первая) НДМ дает вклад в виде почти периодического, слабо модулированного сигнала в каждый из индексов. Он соответствует годовому ходу — отклику климата на периодическое внешнее воздействие, обусловленное вращением Земли вокруг Солнца, с периодом 1 год. Существенно, что процедура НДМ позволила полностью отделить годовой ход от остальных данных: анализ фурье-спектров второй и третьей мод показывает, что гармоники сигнала с периодом 1 год в них отсутствуют. Заметим, что это произошло естественным образом, т. е. никаких специальных периодических условий в процедуру разложения не закладывалось. В качестве подтверждения на рис. 3, а (см. вклейку) показана разность между средним вкладом первой НДМ в ТПО в зимние месяцы и средним вкладом первой НДМ в ТПО в летние месяцы. Получающийся паттерн, очевидно, представляет собой пространственный паттерн годового хода.

В левой части рис. 4 (см. вклейку) цветными линиями представлены индексы, реконструированные на основе комбинаций НДМ, дающих наибольшие корреляции с соответствующими оригинальными индексами (черный цвет), основанными на наблюдаемых данных АТПО. Соответствующие коэффициенты корреляции представлены в правом столбце таблицы 1. Фиолетовые столбцы в правой части рис. 4 показывают корреляции индексов, реконструированных по разным НДМ (среднегодовой периодический сигнал был удален из первой НДМ перед расчетом корреляции), с соответствующими оригинальными индексами. Для сравнения на этих же рисунках синими прозрачными столбцами показаны корреляции различных линейных ГК (после удаления из них среднегодового сигнала) с оригинальными индексами. Из рис. 4 видно, что вторая НДМ является доминирующей в изменчивости ЭНЮК: она обеспечивает очень высокую корреляцию (0,88) с исходным индексом Nino 3.4. Фактически, не полностью описанными ею остались лишь два достаточно больших по амплитуде события Эль-Ниньо 1982/83 и 1997/98 годов. Эти события оказались частично учтенными уже в первой НДМ, корреляция которой с индексом Nino 3.4 составила 0,5. Аналогичная ситуация в регионе NA: вторая НДМ имеет гораздо больший вклад в этот регион, чем другие НДМ. Изменчивость двух других рассмотренных индексов — PDO и NTA — наряду со второй НДМ существенно определяется третьей НДМ. Эти две моды вместе объясняют существенную часть изменчивости АТПО в обоих регионах. При этом динамика в Индийском океане отражена НДМ-разложением не так хорошо: реконструкция с помощью полученных НДМ дает корреляцию лишь 0,38 с оригинальным индексом IOD.

Тем не менее вклады линейных ГК в рассматриваемые регионы распределены по многим ГК, как это видно из правой половины рис. 4 (см. вклейку). Например, есть как минимум три ГК, одинаково значимых для

динамики ЭНЮК, а также множество ГК, дающих вклад в индексы PDO и атлантические регионы. Очевидно, это является результатом линейности ЭОФ-разложения, приводящей к смешиванию различных мод в полученных ГК в случае, когда нелинейность существенна.

2.3. Климатический переход 1997—1998 годов

Наиболее интересным событием на анализируемом интервале является событие Эль-Ниньо 1997—1998 годов — одно из наиболее сильных за время наблюдения (см. поведение индекса Niño 3.4 на рис. 4). Существует интересная гипотеза о том, что это событие сыграло решающую роль в переключении климата в отрицательную фазу ТДК с последующим изменением сценария глобального потепления [31]: вскоре после этого события рост температуры атмосферы замедлился. Перед этим событием происходило потепление атмосферы с середины 1970-х годов во время положительной фазы ТДК. Так, было показано, что во время отрицательной фазы ТДК значительная часть тепла уходит в глубину океана, предотвращая нагрев атмосферы [31]. В то же время ледники продолжают таять, а уровень океана расти [40], указывая на то, что глобальное потепление продолжается. Таким образом, изменился лишь режим потепления, что, по-видимому, есть результат собственной динамики климатической системы.

Данный климатический переход проявился во второй НДМ в виде резкого изменения (скачка) в ее временном ряде $p(t)$ (см. рис. 1, *a*), имеющего масштаб, сравнимый с одним годом, и происходящего как раз во время Эль-Ниньо 1997—1998 годов. В индексе PDO и двух Атлантических индексах, реконструированных по данной НДМ, это отражается в виде резкого изменения среднего значения индекса (см. рис. 4). Проверить, что данное событие ассоциируется со сменой фазы ТДК, можно убедившись, что вторая НДМ, в которой наблюдается переход, воспроизводит паттерн ТДК. Для этого были вычислены пространственно распределенные средние вклады второй НДМ в ТПО за интервалы времени до и после перехода, затем построена разность двух полученных паттернов. В результате на рис. 3, *b* отчетливо виден характерный паттерн отрицательной фазы ТДК в Тихоокеанском регионе в полном соответствии с рис. 9 из работы [31], на котором показана аналогичная разность для полного поля температуры атмосферы. Таким образом, можно заключить, что пространственно-временная структура второй НДМ, описываемой одним скалярным сигналом, подтверждает гипотезу о причине климатического перехода [31].

2.4. Возможность детектирования дальних связей

Нахождение главных одномерных многообразий (кривых) в пространстве наблюдаемых переменных позволяет исследовать дальние связи — связи между пространственно разнесенными регионами планеты. В самом

деле, вторая НДМ описывает примерно 7 % полной вариации изменчивости ТПО. Если исключить из рассмотрения годовой цикл, содержащийся в первой НДМ и имеющий вклад около 78 %, получится, что вторая НДМ описывает около 27 % АТПО (в данном случае АТПО трактуются как результат вычитания первой НДМ из данных ТПО). При этом данная мода ставит в соответствие динамику во всех узлах географической сетки точкам на одномерной кривой, поэтому различные точки земного шара, и следовательно, регионы и климатические индексы, оказываются связанными посредством этой моды.

На рис. 5 (см. вклейку) точками показаны кривые, соответствующие второй НДМ. Они определяют доминирующее совместное поведение региона Niño 3.4 и других рассмотренных регионов. Каждая из них состоит из двух ветвей: одна ветвь соответствует интервалу времени до смены фазы ТДК, другая — после этого перехода. Видно, что переход существенно меняет данные связи. Добавление третьей НДМ приводит к небольшому «размытию» этих связей, однако их основная форма сохраняется. Тонкие линии на рис. 5 соответствуют связям, полученным в результате реконструкции с помощью суммы второй и третьей НДМ, которые вместе описывают около 30 % вариации АТПО.

3. Многомерные нелинейные динамические моды

Несмотря на свою очевидную полезность, описанный в предыдущем разделе метод НДМ-разложения имеет определенные недостатки. Во-первых, как было отмечено в разд. 1, форма разложения (3) не описывает произвольное нелинейное многообразие ввиду заложенной в нее аддитивности искомым одномерных НДМ. В частности, для используемой в предложенном алгоритме полиномиальной параметризации НДМ это означает, что в финальном разложении (3) неизбежно будут отсутствовать «перекрестные» нелинейные слагаемые, пропорциональные $p_{in}^{m_i} p_{jn}^{m_j}$. Понятно, что учет таких слагаемых, обеспечивающих более общую форму параметризации нелинейной связи ГК, описывающих состояние низкоразмерной подсистемы, с переменными, задающими состояние системы в целом, может более полно отражать свойства исследуемой системы и тем самым повысить точность ее реконструкции.

Во-вторых, даже для формы разложения (3) предложенная итерационная схема поиска НДМ (вводная часть разд. 1) не идеальна. Дело в том, что при поиске очередной НДМ в процедуре никак не учитывается наличие следующих НДМ, потому что остаток на каждой итерации полагается гауссовым белым шумом. В результате следующие НДМ, вообще говоря, могут влиять на текущую искомую НДМ и, как следствие, на результат полного разложения, автоматически уменьшая описываемую суммарно

всеми модами долю полной изменчивости. Это представляется особенно важным в тех случаях, когда законы динамики разных НДМ не независимы, что проявляется в схожести разных НДМ по величине захватываемой вариации или по описываемым временным масштабам.

Указанные недостатки могут быть преодолены путем следующего обобщения формы разложения (3):

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{f}(\mathbf{p}_n) + \mathbf{r}_n. \quad (12)$$

Здесь, в отличие от разложения (3), различные нелинейные ГК ищутся совместно в виде векторного временного ряда $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N$, имеющего размерность d . Нелинейная векторная функция \mathbf{f} представляет собой нелинейное отображение сразу всех искомым нелинейных ГК в пространство исходных переменных. При этом, как и ранее, компоненты вектора \mathbf{p}_n представляют собой соответствующие моменту n координаты на d -мерном нелинейном многообразии, определяемом теперь единым отображением \mathbf{f} , параметризуемым с помощью универсального аппроксиматора на основе многомерных полиномов Эрмита. Полное слагаемое $\mathbf{f}(\mathbf{p}_n)$ будем называть *многомерной нелинейной динамической модой* (МНДМ).

Алгоритм поиска МНДМ аналогичен итерации поиска одной НДМ: проводится байесова оптимальная аппроксимация данных \mathbf{x}_n с помощью неизвестных отображения \mathbf{f} и временного ряда $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N$ в предположении гауссовости и дельта-коррелированности по времени остатка \mathbf{r}_n . В частности, изложенные в разд. 1.1 и 1.2 шаги остаются прежними с точностью до следующих модификаций.

Во-первых, во всех выражениях скалярные величины p_n заменяются на векторы \mathbf{p}_n . Соответствующее априорное ограничение (9) на эти нелинейные ГК принимает вид

$$P_{pr}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \propto \prod_{i=1}^d \exp \left[-\frac{1}{2} p_{i1}^2 - \frac{1}{2\sigma_{pi}^2} \sum_{n=2}^N (p_{in} - b_i p_{i,n-1})^2 \right], \quad (13)$$

$$b_i = e^{-1/\tau_i}, \quad \sigma_{pi} = \sqrt{1 - b_i^2}.$$

Можно видеть, что в данную априорную ПВ для каждой нелинейной ГК заложен свой временной масштаб τ_i , который будет объектом оптимизации. Поэтому в выражении (11) скалярная величина τ заменяется на вектор временных масштабов $\Phi = (\tau_1, \dots, \tau_d)$.

Во-вторых, величина m , характеризовавшая степень полинома, по аналогии с τ , заменяется на вектор $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d)$, где m_i обозначают степени полинома \mathbf{f} по аргументу p_{in} — i -й компоненте вектора \mathbf{p}_n . Соответственно число $m + 1$ в априорной ПВ (10) меняется на зависящее от \mathbf{m} количество коэффициентов многомерного полинома.

Таким образом, сформулированный алгоритм поиска МНДМ, который будет применен в следующем разделе, является обобщением процедуры поиска одномерных НДМ. Отметим, что данный алгоритм еще более ресурсоемкий, главным образом из-за резкого увеличения количества получающихся перекрестных коэффициентов многомерного полинома с ростом размерности нелинейного многообразия d и степеней полинома. Задача оптимизации вычислительного алгоритма, и в том числе вида аппроксимирующей функции, становится важным шагом в данном направлении.

4. Использование двумерных мод для анализа изменчивости климата на интервале 1870—2014 годов

В данном разделе метод МНДМ применяется для анализа временных рядов ТПО на различных временных интервалах, связанных с динамикой ТДК, начиная с конца XIX века и заканчивая настоящим временем. В частности, с помощью МНДМ исследуются паттерны дальних связей ЭНЮК, соответствующие различным циклам ТДК за последние 145 лет, находятся моменты смены фазы ТДК и реконструируются соответствующие глобальные паттерны ТДК. На основе адаптивных свойств МНДМ показывается, что дальние связи ЭНЮК с различными регионами становятся существенно нелинейными начиная со второй половины XX века.

4.1. Используемые данные и характеристики МНДМ

Нами использовались данные реанализа ТПО из базы HadISST1 [41], представляющие собой временные ряды протяженностью 145 лет (с 1870 по 2014 год), измеренные с шагом 1 месяц на дискретной пространственной сетке с разрешением 2×2 градуса. В отличие от случая короткого временного ряда ТПО, рассмотренного в разд. 2, в этих данных присутствуют сигналы с большими временными масштабами (тренды), связанные как с глобальным потеплением, так и с собственной изменчивостью климата. Наличие этих трендов существенно влияет на построение нелинейных мод, описывающих динамику системы на декадных и межгодовых временных масштабах. Применение описанного выше алгоритма поиска МНДМ путем построения не зависящего от времени многообразия по данному временному ряду становится затруднительным, поэтому МНДМ находились по шести 33-летним перекрывающимся фрагментам полного 145-летнего временного ряда ТПО, причем последний фрагмент совпадал с временным рядом, рассмотренным в разд. 2. Ясно, что таким образом можно уменьшить влияние трендов и лучше разрешить динамику системы на временных масштабах ТДК и ЭНЮК.

Напомним, что в разд. 2 был получен набор одномерных НДМ для интервала с 1981 по 2014 год, которые находились независимо друг от друга

в рамках последовательной процедуры. При этом наиболее информативными оказались две главные моды, одна из которых была ассоциирована с сезонным циклом, а вторая — с изменчивостью, связанной с ЭНЮК и ТДК. В контексте изложенных в разд. 3 недостатков последовательного метода разложения на одномерные НДМ обратим внимание на то, что изображенные на рис. 1, *a* временные ряды скрытых переменных первой и второй НДМ выглядят связанными друг с другом: имеются очевидные скачки как фазы, так и амплитуды в почти периодических временных рядах первой НДМ, которые происходят во время сильных событий Эль-Ниньо 1982/83 и 1997/98 годов, в результате чего корреляция вклада первой НДМ в индекс Niño 3.4 с этим индексом оказывается около 0,5. Этот факт можно интерпретировать как проявление связанной динамики ЭНЮК и годового цикла и в то же время указанных выше недостатков одномерного НДМ-разложения. Таким образом, можно ожидать, что эмпирическая реконструкция этих мод может быть более адекватной при построении общего многомерного нелинейного многообразия.

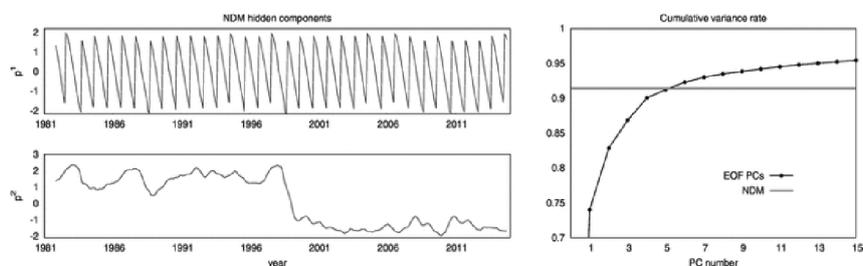


Рис. 6. Двумерная МНДМ, найденная по фрагменту временного ряда ТПО с 1981 по 2014 год: *слева* — временные ряды скрытых переменных НДМ (верхний ряд описывает сезонный цикл, нижний ряд — главный режим аномалий ТПО); *справа* — доля дисперсии, захваченная двумерной МНДМ (прямая линия), которая сравнивается с соответствующей дисперсией, захваченной ведущими ЭОФ (кривая с точками)

На рис. 6 изображены временные ряды скрытых переменных p_{1n} и p_{2n} двумерной МНДМ, построенной по последнему фрагменту рассматриваемого временного ряда. Аналогично результатам одномерного НДМ-разложения сезонный цикл присутствует главным образом в первой компоненте моды p_{1n} , в то время как изменчивость ЭНЮК проявляется во второй компоненте p_{2n} , которая также отражает смену фазы ТДК в 1997—1998 годах. Заметим, что полученная двумерная МНДМ описывает примерно 91 % вариации данных, что больше, чем суммарная вариация, описываемая пятью ведущими ЭОФ или тремя одномерными НДМ (около 90 %), которые для этих данных совпадают с изображенными на рис. 1, *a* и поэтому не приведены. Благодаря одновременной реконструкции двух

скрытых переменных энергия перераспределится между временными рядами p_{1n} и p_{2n} более оптимально, что привело к лучшему захвату вариации наблюдаемых данных построенной двумерной МНДМ. Кроме того, в результате многомерной декомпозиции исчезли сильные сбои фазы и амплитуды во временном ряду первой компоненты МНДМ (см. рис. 6).

Важной особенностью полученной двумерной МНДМ является структура полиномиальной функции \mathbf{f} в уравнении (12). Оказывается, часть этой функции, зависящая от перекрестных членов (см. разд. 3), близка к нулю. Иными словами, функция \mathbf{f} может быть представлена как сумма двух полиномиальных функций от одной переменной: $\mathbf{f}(\mathbf{p}_n) = \mathbf{f}_1(p_{1n}) + \mathbf{f}_2(p_{2n})$. Кроме того, данное свойство функции \mathbf{f} справедливо для всех 33-летних фрагментов рассматриваемого ряда ТПО. Это позволяет отделить вклад компоненты p_{2n} от вклада годового цикла в наблюдаемых данных. Таким образом, данные, полученные после вычитания части годового цикла $\mathbf{x}_n - \mathbf{f}_1(p_{1n})$, могут рассматриваться как временные ряды АТПО.

4.2. Реконструкция смены фаз ТДК

В верхней части рис. 7 (см. вклейку) показаны временные ряды скрытых переменных p_{2n} , соответствующие МНДМ по шести рассмотренным 33-летним фрагментам временного ряда ТПО: 1870—1902, 1887—1920, 1906—1939, 1930—1963, 1961—1994 и 1981—2014. Как видно, для четырех из этих фрагментов во второй компоненте МНДМ наблюдается переход, аналогичный переходу, ассоциирующемуся со сменой фазы ТДК и упоминаемому в разд. 2, что позволяет предположить связь найденных четырех переходов с ТДК.

В самом деле, связь между этими МНДМ-компонентами и ТДК очевидна из сравнения их временных рядов с временными рядами индекса PDO. В нижней части рис. 7 показаны индекс PDO, рассчитанный по наблюдаемым временным рядам АТПО, а также индексы PDO, реконструированные с помощью нелинейного преобразования временного ряда скрытой переменной p_{2n} . Такая реконструкция делается с помощью функции $\mathbf{f}_2(p_{2n})$ (см. разд. 4.1), которая отображает сигнал p_{2n} в пространство данных. После этого индекс PDO рассчитывается в соответствии с определением [37] путем проецирования данных на главную ЭОФ, рассчитанную по АТПО, как указано в табл. 1. В индексе прослеживается выраженная мультидекадная изменчивость ТДК и четко видны все переходы, проявляющиеся в виде резких скачков индекса между эпохами, характеризующимися либо отрицательными, либо положительными фазами ТДК. Таким образом, можно заключить, что выявленные с помощью двумерных МНДМ четыре климатических перехода в XX веке действительно связаны с изменениями

фазы ТДК. В 1925 и 1976 годах это переходы от отрицательной к положительной фазе ТДК, в 1949 и 1998 годах — обратные переходы. Эти результаты согласуются с работой [42], за исключением перехода в конце 1940-х годов, который в данной работе был отнесен к 1946-му, а не к 1949 году. Кроме того, переходы в 1925 и 1976 годах согласуются с результатами работы [37].

Общепринятый способ визуализации глобального паттерна ТПО, ассоциирующегося с климатическим переходом, заключается в вычислении разницы между ТПО, усредненной за некоторый промежуток времени до и после перехода, либо наоборот (см. пример в разд. 2). Такие паттерны были построены для АТПО, реконструированных на основе временных рядов p_{2n} (рис. 8, *слева*, см. вклейку). Как видно из рисунка, они практически идентичны паттернам, вычисленным для АТПО по наблюдаемому временному ряду (рис. 8, *справа*). Характерная форма глобального ТДК-подобного паттерна в Тихом океане имеет место для всех четырех рассмотренных переходов, тем самым подтверждая, что эти переходы в глобальном поведении ТПО действительно связаны с поведением ТДК. Тем не менее паттерны в различные периоды не полностью одинаковы, особенно для периода 1930—1963, где теплые аномалии ТПО в разнице между положительной и отрицательной фазой ТДК имеют большую протяженность в южной части Тихого океана, но необычно малы вдоль западного побережья Северной Америки. Такая картина, вероятно, связана с менее выраженным переходом ТДК в 1949 году по сравнению с другими переходами и, следовательно, большей неопределенностью во времени этого перехода, оцениваемом с помощью МНДМ.

4.3. Анализ дальних связей различных регионов в 1870—2014 годах

В табл. 2 представлены доля суммарной вариации АТПО, захваченная МНДМ-компонентой p_{2n} для разных фрагментов временного ряда, и оптимальные значения степеней полинома, соответствующих первой и второй компонентам МНДМ. Видно, что в зависимости от фрагмента от 30 до 42 % вариации АТПО описывается одним скалярным временным рядом скрытой переменной p_{2n} . Это значит, что по аналогии с разд. 2 данная компонента двумерной МНДМ связывает временные ряды аномалий ТПО в разных местах земного шара посредством нелинейной функции $\mathbf{f}_2(p_{2n})$ от скалярного сигнала и таким образом описывает глобальную систему нелинейных дальних связей АТПО.

Как видно из табл. 2, оптимальная степень полинома m_2 , задающего функцию $\mathbf{f}_2(p_{2n})$, меняется от единицы до четырех для разных фрагментов временного ряда.

Таблица 2

Характеристики МНДМ, найденных по различным фрагментам ряда

Параметры	Фрагмент					
	1870— 1902	1887— 1920	1906— 1939	1930— 1963	1961— 1994	1981— 2014
Доля вариации АТПО	0,41	0,4	0,35	0,3	0,36	0,42
$m_1; m_2$	7; 1	9; 2	9; 2	9; 4	9; 4	9; 4

С целью интерпретации картины дальних связей удобно рассмотреть карту значений коэффициентов корреляции между временными рядами компоненты $f_2(p_{2n})$ в каждой точке пространственной сетки и соответствующими временными рядами исходного поля АТПО. Эти корреляции (рис. 9) указывают на вклад компоненты p_{2n} во временные ряды АТПО в различных регионах. Как видно из рисунка, они неравномерно распределены по земному шару.

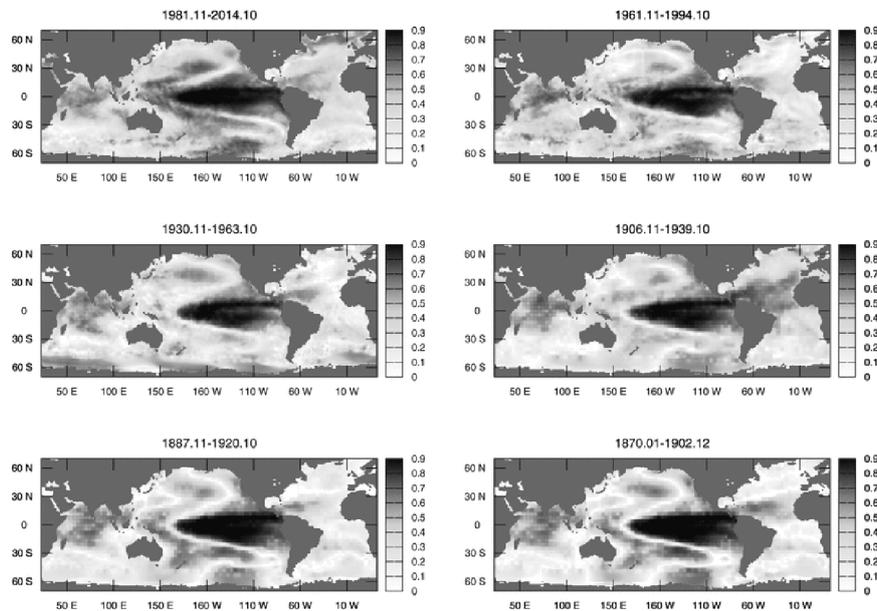


Рис. 9. Коэффициенты корреляции временных рядов второй компоненты МНДМ $f_2(p_{2n})$ и АТПО, рассчитанные в каждой точке пространственной сетки для различных фрагментов временного ряда

Ясно, что для всех фрагментов временного ряда наибольший вклад второй компоненты МНДМ приходится на тропическую область Тихого океана: наибольшие значения корреляции наблюдаются в области, связан-

ной с изменчивостью ЭНЮК (см. рис. 9). В частности, данные корреляции в регионе Nino 3.4 намного больше, чем в других местах земного шара. Тем не менее МНДМ также вносит значительный вклад в регионы ТДК, Индийского океана (IO) и южной части Тихого океана (SO) (см. рис. 9 и табл. 3). Из рис. 10 (см. вклейку), на котором изображены указанные в табл. 3 индексы и их МНДМ-реконструкции на каждом фрагменте, видно, что высокие значения корреляции МНДМ / ТДК в регионе ЭНЮК (индекс Nino 3.4) означают почти идеальную реконструкцию межгодовой изменчивости Эль-Ниньо / Ла-Нинья по МНДМ. Исходя из этого, можно интерпретировать корреляционные распределения на рис. 9 как схему дальних связей ЭНЮК: чем выше корреляции в определенной области, тем сильнее связь динамики в этой области с изменчивостью ЭНЮК.

Таблица 3

Корреляции между индексами, реконструированными на основе МНДМ, и индексами, вычисленными на основе данных АТПО

Индекс	Фрагмент					
	1870— 1902	1887— 1920	1906— 1939	1930— 1963	1961— 1994	1981— 2014
Nino 3.4	0,96	0,96	0,96	0,95	0,94	0,96
PDO	0,71	0,78	0,7	0,75	0,66	0,71
IO	0,71	0,78	0,8	0,79	0,74	0,68
SO	0,69	0,72	0,72	0,63	0,71	0,8
AMO	0,4	0,25	0,83	0,3	0,28	0,74

Примечание: Индексы Nino 3.4 и PDO определены в табл. 1, индексы IO, SP, AMO определяются как среднее значение в регионах (30° S — 30° N; 40° E — 100° E), (45° S — 60° N; 100° W — 150° W), (0° N — 75° N; 0° W — 80° W) соответственно.

Из рис. 9, 10 и табл. 3 следует, что МНДМ указывает на тесную связь между регионами ЭНЮК, ТДК и южной частью Тихого океана. Это согласуется с известной гипотезой о наличии в Тихом океане связей между тропиками и субтропиками, обуславливаемых «атмосферным мостом», который передает сигнал ЭНЮК за пределы тропического пояса, а также посредством сигналов, распространяющихся вдоль экватора (на более длинных временных масштабах) и через низкоширотные атмосферные возмущения [43]. Из рис. 9 также видно, что в последние десятилетия сила этих связей возросла как для региона ТДК, так и для региона в южной части Тихого океана: для последнего фрагмента временного ряда корреляции данных и МНДМ-реконструкции в этих регионах выше, чем для всех предыдущих фрагментов.

Другим регионом, который тесно связан с динамикой тропического Тихого океана, является Индийский океан. Такая дальняя связь обусловлена вызываемыми ЭНЮК искажениями циркуляции Уолкера [44], а также

океаническими нисходящими волнами Россби, распространяющимися в Индийском океане [45]. В свою очередь, изменчивость Индийского океана может влиять на динамику Эль-Ниньо / Ла-Нинья в результате изменения касательного напряжения зонального ветра в западной части Тихого океана [46]. Паттерн МНДМ на рис. 9 демонстрирует стабильные, почти неизменные связи между ЭНЮК и Индийским океаном на всех рассматриваемых фрагментах временного ряда.

Аналогично анализу, представленному в разд. 2.4, структура дальних связей, выявленных с помощью МНДМ, может быть изучена путем построения реконструированных индексов PDO, SO и IO в зависимости от индекса Niño 3.4 (рис. 11, на вклейке). В таком представлении различные фазы ТДК соответствуют различным ветвям одномерных кривых, визуализирующих вторую компоненту МНДМ. Видно, что до 1961 года ветви фаз ТДК близки к линейным функциям, однако затем на двух последних фрагментах временного ряда нелинейность кривых и расстояние между ветвями заметно увеличиваются. Интересно, что на двух последних фрагментах временного ряда структура выявленных зависимостей ЭНЮК — ТДК и ЭНЮК — IO не изменяется качественно. Связь между ЭНЮК и АТПО в южной части Тихого океана (индекс SO), согласно найденной МНДМ, перестает зависеть от фазы ТДК в последние десятилетия: желтая кривая, соответствующая последнему фрагменту 1981—2014 годов, выглядит почти как однозначная функция на графике ЭНЮК — SO.

Как видно из индекса Атлантической мультидекадной осцилляции (АМО), изображенного на рис. 10, найденная МНДМ крайне незначительно проявляется в Атлантическом океане. В основном это связано с низкой корреляцией между МНДМ и изменчивостью ТПО в Атлантике на межгодовых временных масштабах. Тем не менее, как видно из рис. 8, 10, МНДМ отражает некоторые особенности декадной изменчивости АМО. Таким образом, аппарат МНДМ, вообще говоря, может быть полезен и для эмпирического исследования дальних связей с большими временными масштабами между ТПО в Атлантическом и Тихом океанах с учетом ограничений вследствие сравнительно короткой для таких масштабов длины рассматриваемых в настоящей работе фрагментов (33 года).

Заключение

В данной статье был представлен новый метод эмпирической редукции размерности многомерных (пространственно распределенных) временных рядов — НДМ-разложение. Каждая нелинейная динамическая мода учитывает такие факторы, присущие сложным динамическим системам, как нелинейность связей между пространственно разнесенными временными рядами и динамическая природа получаемых новых переменных. В результате главные динамические свойства исходной системы могут

быть реконструированы на основе небольшого количества НДМ, т. е. в пространстве низкой размерности. Представлен сравнительно быстрый итеративный алгоритм поиска НДМ как набора одномерных нелинейных многообразий и более ресурсоемкий, но и более адекватный способ построения НДМ в виде единого многомерного нелинейного многообразия.

В результате применения метода НДМ к анализу ТПО получены временные ряды для реконструкции климатической системы, описывающие такие явления, как годовой цикл, Эль-Ниньо Южное колебание, Тихоокеанское декадное колебание. Приведенные результаты на основе независимого анализа данных измерений подтверждают ряд имеющихся гипотез о причинах наблюдаемой динамики климатической системы. В частности, с помощью НДМ получено подтверждение четырех климатических переходов в XX веке, связанных с изменением фазы Тихоокеанского декадного колебания. Кроме того, аппарат двумерных НДМ позволяет сделать выводы о дальних связях в климате Земли и их эволюции. Показано, что структура дальних связей, определяемых Эль-Ниньо Южным колебанием, стала существенно нелинейной, начиная с 60-х годов XX века.

Работа выполнена при поддержке программы президиума РАН № 51 «Изменение климата: причины, риски, последствия, проблемы адаптации и регулирования» (проект 0035-2018-0024).

Литература

1. *Jolliffe, I. T.* Principal component analysis / I. T. Jolliffe. — 2nd ed. — New York [etc.] : Springer, 1986. — URL: <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1904-8>. — Springer series in statistics.
2. *Preisendorfer, R. W.* Principal component analysis in meteorology and oceanography / R. W. Preisendorfer ; ed. C. D. Mobley. — Amsterdam [etc.] : Elsevier, 1988. — 440 p.
3. *Iglesia, M. D. de la.* Principal dynamical components / M. D. de la Iglesia, E. G. Tabak // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 2013. — Vol. 66, iss. 1. — P. 48—82. — URL: <https://doi.org/10.1002/cpa.21411>.
4. *DelSole, T.* Optimally persistent patterns in time-varying fields // Journal of the Atmospheric Sciences. — 2001. — Vol. 58, iss. 11. — P. 1341—1356. — URL: [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(2001\)058<1341:OPPITV>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(2001)058<1341:OPPITV>2.0.CO;2).
5. *DelSole, T.* Average predictability time. Part II : Seamless diagnoses of predictability on multiple time scales / T. DelSole, M. K. Tippett // Journal of the Atmospheric Sciences. — 2009. — Vol. 66, iss. 5. — P. 1188—1204. — URL: <https://doi.org/10.1175/2008JAS2869.1>.
6. *DelSole, T.* Average predictability time. Part I : Theory / T. DelSole, M. K. Tippett // Journal of the Atmospheric Sciences. — 2009. — Vol. 66, iss. 5. — P. 1172—1187. — URL: <https://doi.org/10.1175/2008JAS2868.1>.
7. *Hasselmann, K.* PIPs and POPs : the reduction of complex dynamical systems using principal interaction and oscillation patterns // Journal of Geophysical Research. — 1988. — Vol. 93, iss. D9. — P. 11015—11021. — URL: <https://doi.org/10.1029/JD093iD09p11015>.

8. *Hannachi, A.* Empirical orthogonal functions and related techniques in atmospheric science : a review / A. Hannachi, I. T. Jolliffe, D. B. Stephenson // *International Journal of Climatology*. — 2007. — Vol. 27, iss. 9. — P. 1119—1152. — URL: <https://doi.org/10.1002/joc.1499>.
9. *Ghil, M.* Advanced spectral methods for climatic time series / M. Ghil, M. R. Allen, M. D. Dettinger [et al.] // *Reviews of Geophysics*. — 2002. — Vol. 40, iss. 1. — P. 3-1—3-41. — URL: <https://doi.org/10.1029/2000RG000092>.
10. *Kwasniok, F.* The reduction of complex dynamical systems using principal interaction patterns // *Physica D : Nonlinear Phenomena*. — 1996. — Vol. 92, iss. 1/2. — P. 28—60. — URL: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(95\)00280-4](https://doi.org/10.1016/0167-2789(95)00280-4).
11. *Kwasniok, F.* Reduced atmospheric models using dynamically motivated basis functions // *Journal of the Atmospheric Sciences*. — 2007. — Vol. 64, iss. 10. — P. 3452—3474. — URL: <https://doi.org/10.1175/JAS4022.1>.
12. *Pires, C. A. L.* Independent subspace analysis of the sea surface temperature variability: non-Gaussian sources and sensitivity to sampling and dimensionality / C. A. L. Pires, A. Hannachi // *Complexity*. — 2017. — Vol. 2017. — P. 1–23. — URL: <https://doi.org/10.1155/2017/3076810>.
13. *Pires, C. A. L.* Separation of the atmospheric variability into non-Gaussian multidimensional sources by projection pursuit techniques / C. A. L. Pires, A. F. S. Ribeiro // *Climate Dynamics*. — 2017. — Vol. 48, iss. 3/4. — P. 821—850. — URL: <https://doi.org/10.1007/s00382-016-3112-9>.
14. *Vejmelka, M.* Non-random correlation structures and dimensionality reduction in multivariate climate data / M. Vejmelka, L. Pokorná, J. Hlinka, D. Hartman, N. Jajcay, M. Paluš // *Climate Dynamics*. — 2015. — Vol. 44, iss. 9—10. — P. 2663—2682. — URL: <https://doi.org/10.1007/s00382-014-2244-z>.
15. *Storch, H. von.* Principal oscillation patterns : a review / H. von Storch, G. Bürger, R. Schnur, J.-S. von Storch // *Journal of Climate*. — 1995. — Vol. 8, iss. 3. — P. 377—400.
16. *Scholkopf, B.* Nonlinear component analysis as a kernel eigenvalue problem / B. Scholkopf, A. Smola, K. R. Muller // *Neural Comp.* — 1998. — Vol. 10, 5. — P. 1299—1319.
17. *Berry, T.* Time-scale separation from diffusion-mapped delay coordinates / T. Berry, J. R. Cressman, Z. Gregurić-Ferenček, and T. Sauer // *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. — 2013. — Vol. 12, iss. 2. — P. 618—649. — URL: <https://doi.org/10.1137/12088183X>.
18. *Coifman, R. R.* Diffusion maps / R. R. Coifman, S. Lafon // *Applied and Computational Harmonic Analysis*. — 2006. — Vol. 21, № 1. — P. 5—30. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.acha.2006.04.006>.
19. *Ross, I.* ENSO dynamics in current climate models: an investigation using nonlinear dimensionality reduction / I. Ross, P. J. Valdes, S. Wiggins // *Nonlinear Processes in Geophysics*. — 2008. — Vol. 15, № 2. — P. 339—363. — URL: <https://doi.org/10.5194/npg-15-339-2008>.
20. *Hannachi, A.* 20th century intraseasonal Asian monsoon dynamics viewed from Isomap / A. Hannachi, A. G. Turner // *Nonlinear Processes in Geophysics*. — 2013. — Vol. 20, № 5. — P. 725—741. — URL: <https://doi.org/10.5194/npg-20-725-2013>.

21. *Gámez, A. J.* Nonlinear dimensionality reduction in climate data / A. J. Gámez, C. S. Zhou, A. Timmermann, J. Kurths // *Nonlinear Processes in Geophysics*. — 2004. — Vol. 11, № 3. — P. 393—398. — URL: <https://doi.org/10.5194/npg-11-393-2004>.
22. *Hastie, T.* Principal curves and surfaces : Ph. D. dissertation / Trevor Hastie ; Stanford Linear Accelerator Center, Stanford University, 1984. — URL: <http://www.slac.stanford.edu/cgi-wrap/getdoc/slac-r-276.pdf>.
23. *Tan, S.* Reducing data dimensionality through optimizing neural network inputs / S. Tan, M. L. Mayrovouniotis // *AIChE Journal*. — 1995. — Vol. 41, № 6. — P. 1471—1480. — URL: <https://doi.org/10.1002/aic.690410612>.
24. *Kramer, M. A.* Nonlinear principal component analysis using autoassociative neural networks // *AIChE Journal*. — 1991. — Vol. 37, № 2. — P. 233—243. — URL: <https://doi.org/10.1002/aic.690370209>.
25. *Jia, F.* Non-linear principal components analysis for process fault detection / F. Jia, E. B. Martin, A. J. Morris // *Computers & Chemical Engineering*. — 1998. — Vol. 22. — P. S851—S854. — URL: [https://doi.org/10.1016/S0098-1354\(98\)00164-1](https://doi.org/10.1016/S0098-1354(98)00164-1).
26. *Gavrilov, A.* Method for reconstructing nonlinear modes with adaptive structure from multidimensional data / A. Gavrilov, D. Mukhin, E. Loskutov, E. Volodin, A. Feigin, J. Kurths // *Chaos : an Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2016. — Vol. 26, № 12. — Art. 123101. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.4968852>.
27. *Mukhin, D.* Principal nonlinear dynamical modes of climate variability / D. Mukhin, A. Gavrilov, A. Feigin, E. Loskutov, J. Kurths // *Scientific Reports*. — 2015. — № 5. — Art. 15510. — URL: <https://doi.org/10.1038/srep15510>.
28. *Mukhin, D.* Nonlinear reconstruction of global climate leading modes on decadal scales / D. Mukhin, A. Gavrilov, E. Loskutov, A. Feigin, J. Kurths // *Climate Dynamics*. — 2018. — Vol. 51, № 5/6. — P. 2301—2310. — URL: <https://doi.org/10.1007/s00382-017-4013-2>.
29. *Jeffreys, H.* *Theory of probability* / H. Jeffreys. — Oxford : Clarendon Press, 1998.
30. *Schwarz, G.* Estimating the dimension of a model // *The Annals of Statistics*. — 1978. — Vol. 6, № 2. — P. 461—464. — URL: <https://doi.org/10.1214/aos/1176344136>.
31. *Trenberth, K. E.* An apparent hiatus in global warming? / K. E. Trenberth, J. T. Fasullo // *Earth's Future*. — 2013. — Vol. 1, № 1. — P. 19—32. — URL: <https://doi.org/10.1002/2013EF000165>.
32. *DelSole, T.* A significant component of unforced multidecadal variability in the recent acceleration of global warming / T. DelSole, M. K. Tippett, J. Shukla // *Journal of Climate*. — 2011. — Vol. 24, № 3. — P. 909—926. — URL: <https://doi.org/10.1175/2010JCLI3659.1>.
33. *Easterling, D. R.* Is the climate warming or cooling? / D. R. Easterling, M. F. Wehner // *Geophysical Research Letters*. — 2009. — Vol. 36, № 8. — Art. L08706. — URL: <https://doi.org/10.1029/2009GL037810>.
34. *England, M. H.* Recent intensification of wind-driven circulation in the Pacific and the ongoing warming hiatus / M. H. England, S. McGregor, P. Spence [et al.] // *Nature Climate Change*. — 2014. — Vol. 4, № 3. — P. 222—227. — URL: <https://doi.org/10.1038/nclimate2106>.
35. *Reynolds, R. W.* An improved in situ and satellite SST analysis for climate / R. W. Reynolds, N. A. Rayner, T. M. Smith, D. C. Stokes, W. Wang // *Journal of Climate*. — 2002. — Vol. 15, № 13. — P. 1609—1625.

36. *Trenberth, K. E.* The definition of El Niño // *Bulletin of the American Meteorological Society*. — 1997. — Vol. 78, № 12. — P. 2771—2777.
37. *Chao, Y.* Pacific interdecadal variability in this century's sea surface temperatures / Y. Chao, M. Ghil, J. C. McWilliams // *Geophysical Research Letters*. — 2000. — Vol. 27, № 15. — P. 2261—2264. — URL: <https://doi.org/10.1029/1999GL011324>.
38. *Penland, C.* Prediction of tropical Atlantic sea surface temperatures using linear inverse modeling / C. Penland, L. Matrosova // *Journal of Climate*. — 1998. — № 1992. — P. 483—496.
39. *Saji, N. H.* A dipole mode in the tropical Indian Ocean / N. H. Saji, B. N. Goswami, P. N. Vinayachandran, T. Yamagata // *Nature*. — 1999. — Vol. 401, № 6751. — P. 360—363. — URL: <https://doi.org/10.1038/43854>.
40. *Trenberth, K. E.* Tracking Earth's energy / K. E. Trenberth, J. T. Fasullo // *Science*. — 2010. — Vol. 328, № 5976. — P. 316—317. — URL: <https://doi.org/10.1126/science.1187272>.
41. *Rayner, N. A.* Global analyses of sea surface temperature, sea ice, and night marine air temperature since the late nineteenth century / N. A. Rayner, D. E. Parker, E. B. Horton [et al.] // *J. Geophys. Res.* — 2003. — Vol. 108, № D14. — Art. 4407. — URL: <https://doi.org/10.1029/2002JD002670>.
42. *Deser, C.* Pacific interdecadal climate variability : linkages between the Tropics and the North Pacific during boreal winter since 1900 / C. Deser, A. S. Phillips, J. W. Hurrell // *Journal of Climate*. — 2004. — Vol. 17, № 16. — P. 3109—3124.
43. *Liu, Z.* Atmospheric bridge, oceanic tunnel, and global climatic teleconnections / Z. Liu, M. Alexander // *Reviews of Geophysics*. — 2007. — Vol. 45, № 2. — Art. RG2005. — URL: <https://doi.org/10.1029/2005RG000172>.
44. *Lau, N.-C.* Atmosphere – ocean variations in the Indo-Pacific sector during ENSO episodes / N.-C. Lau, M. J. Nath // *Journal of Climate*. — 2003. — Vol. 16, № 1. — P. 3—20.
45. *Xie, S.-P.* Structure and mechanisms of south Indian ocean climate variability / S.-P. Xie, H. Annamalai, F. A. Schott, J. P. McCreary // *Journal of Climate*. — 2002. — Vol. 15, № 8. — P. 864—878.
46. *Kug, J.-S.* Role of the ENSO – Indian Ocean coupling on ENSO variability in a coupled GCM / J.-S. Kug, T. Li, S.-I. An, I.-S. Kang, J.-J. Luo, S. Masson, T. Yamagata // *Geophysical Research Letters*. — 2006. — Vol. 33, № 9. — Art. L09710. — URL: <https://doi.org/10.1029/2005GL024916>.

**СИНХРОНИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ
РЕГУЛЯЦИИ КРОВООБРАЩЕНИЯ:
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

А. С. Караваев^{1,2}, *Е. И. Боровкова*^{1,2}, *А. Е. Руннова*³, *А. Р. Киселев*^{1,4},
*М. О. Журавлев*¹, *В. И. Пономаренко*^{1,2}, *М. Д. Прохоров*², *А. Е. Храмов*³,
*А. А. Короновский*¹, *Б. П. Безручко*^{1,2}

¹ Саратовский национальный исследовательский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского

² Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН

³ Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина

⁴ Саратовский государственный медицинский университет им. В. И. Разумовского

В статье представлены результаты экспериментального исследования и математического моделирования взаимодействия функциональных систем организма. В экспериментах с дыханием, частота которого изменяется по известному закону, на основе анализа сигналов электрокардиограмм, фотоплетизмограмм и скальповых электроэнцефалограмм рассматривается синхронизация контуров регуляции кровообращения. Учет особенностей временных реализаций реальных процессов лег в основу предложенной математической модели сердечно-сосудистой системы.

Введение

Исследования сложных многокомпонентных систем реального мира, как правило, сопровождаются последовательным совершенствованием модельных представлений, с позиций которых рассматривается объект. Стартуя от качественных структурных схем, по мере получения новых знаний модели развиваются, усложняются, формализуются, претендуя не только на качественное, но и на количественное описание наблюдаемых явлений. При этом эксперимент и моделирование дополняют и направляют друг друга — математическая модель, реконструируемая по временным рядам наблюдаемых, предлагает прогноз поведения объекта и выбор тактики эксперимента [1], а временные реализации динамических переменных адекватной модели выступают в роли заместителя величин, недоступных непосредственному экспериментальному наблюдению (скрытых переменных). Количественное сопоставление динамики моделей и моделируемых объектов позволяет уточнить структуру и параметры модельных уравнений объекта или указывает на необходимость модернизации представлений об устройстве и особенностях функционирования исследуемой системы [2].

Человеческий организм — это сложнейший ансамбль взаимодействующих нелинейных элементов, обменивающихся с окружающим миром веществом, энергией и информацией. В терминах радиофизики и нелинейной динамики он представляет собой открытую существенно нелинейную пространственно распределенную динамическую систему с высокой размерностью, возможности объективного изучения устройства отдельных элементов которой и связей между ними крайне ограничены. Большая часть динамических переменных является скрытой и недоступной непосредственному наблюдению в эксперименте [3]. Каждый шаг в понимании особенностей устройства и функционирования элементов организма потенциально полезен для совершенствования диагностических и лечебных методик.

Последние десятилетия ведущие позиции в структуре смертности и инвалидизации населения, в том числе трудоспособного возраста, в развитых странах мира занимают заболевания сердечно-сосудистой системы (ССС) [4]. Эффективными направлениями снижения уровня смертности и уменьшения тяжести последствий от заболеваний ССС считаются развитие и внедрение методов экспресс-диагностики патологических изменений в амбулаторных и домашних условиях и персонализация терапии выявленных патологий [5]. Но большинство современных подходов медицинской диагностики опирается на выявление уже произошедших патологических изменений, которые обнаруживаются с помощью дорогостоящих инструментальных методов, требующих привлечения к проведению исследования высококвалифицированного медицинского персонала: различных видов ультразвуковой и рентген-диагностики, магниторезонансной томографии и других. Перспективным направлением ранней экспресс-диагностики является анализ функциональных нарушений работы организма, одним из чувствительных признаков возникновения которых являются изменения динамики элементов регуляции кровообращения [6, 7]. Согласно современным представлениям функциональные нарушения часто предшествуют патологическим поражениям органов, являясь их причиной или ранним предвестником [7, 8]. Оперативное выявление функциональных нарушений организма доступными не только клиническому специалисту методами требует развития специализированных подходов, в том числе внедрения знаний и разработок современной радиофизики и нелинейной динамики.

До последнего времени фактически единственным методом анализа состояния контуров регуляции кровообращения являлись методы, основанные на спектральном и статистическом анализе сигнала variability сердечного ритма (характерной для здоровых людей изменчивости длительности интервалов между последовательными сердечными сокращениями). Эти подходы были предложены Р. М. Баевским и В. В. Пари-

ным в середине XX века и стали результатом развития космической медицины [6]. Методы показали свою эффективность в биофизических исследованиях, решении фундаментальных задач физиологии, в медицинской диагностике и терапии патологий сердечно-сосудистой системы и других систем организма [7]. В основе этих методов лежит расчет средней мощности колебаний контуров регуляции сердечного ритма, оцениваемой с помощью спектрального анализа. В последние годы появились методы, позволяющие получать важную дополнительную информацию о работе этих контуров. В частности, нами было предложено выявлять и количественно характеризовать фазовую синхронизацию между ними [9, 10], в том числе при воздействии дыхания, частоту которого испытуемый задает во время активных экспериментов по известному закону [9, 11]. Развитие на основе таких подходов диагностических методов стало возможным благодаря полученным знаниям о характере динамики исследуемых контуров регуляции и разработке специализированных методов анализа экспериментальных данных, максимально учитывающих априорную информацию об исследуемых системах [9, 12].

В данной статье представлены результаты экспериментального исследования и математического моделирования синхронизации элементов регуляции кровообращения [13]. Результаты были получены нашим научным коллективом, включающим физиков и коллег-кардиологов, в ходе многолетних совместных исследований. На наш взгляд, эти результаты позволили сделать определенный шаг в изучении ССС.

1. Объект исследования

Объектом исследования является ССС человека. С точки зрения решаемых задач исследуемый объект описывается структурной схемой, представленной на рис. 1. Сердце сокращается благодаря автоколебательным свойствам специализированных клеток — пейсмейкеров. Изолированное (от нервов) сердце демонстрирует почти периодические колебания с характерной частотой около 1 Гц. Однако нормальное функционирование организма требует гибкой регуляции кровоснабжения различных органов при изменении уровня физической и умственной нагрузки. Для этого частота сердечных сокращений (ЧСС) и тонус гладких мышц — вазомоторов, расположенных в стенках артериальных сосудов, непрерывно регулируются. Такую регуляцию обеспечивает вегетативная (автономная) нервная система в виде симпатического (блок 3, 4 на рис. 1) и парасимпатического (6 на рис. 1) отделов. Каждый из этих отделов представлен различными нервными волокнами и управляющими центрами, расположенными в головном мозге. Активность элементов симпатического отдела проявляется в сигналах ССС на характерных частотах около 0,1 Гц, парасимпатического — около 0,3 Гц (см. рис. 1).

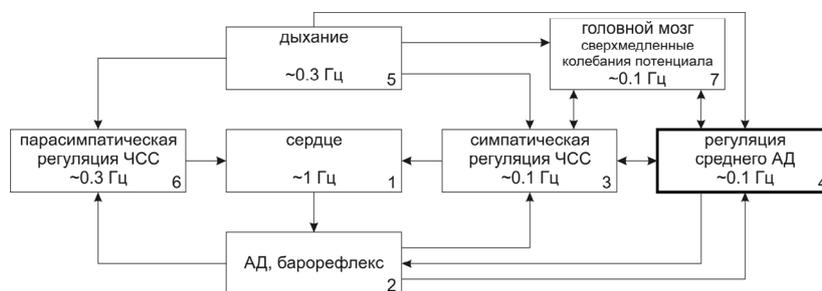


Рис. 1. Структурная схема ССС.

В блоках приведены характерные частоты основных процессов

Сформированное в результате работы сердца артериальное давление (АД) воздействует на артериальные барорецепторы — чувствительные клетки, расположенные в стенках сосудов и «измеряющие» АД (2 на рис. 1). Барорецепторы посылают по нервным волокнам сигналы, передавая информацию об уровне АД контуру парасимпатической регуляции ЧСС (6 на рис. 1), контуру симпатической регуляции ЧСС (3 на рис. 1) и контуру симпатической регуляции тонуса артериальных сосудов, который обеспечивает регуляцию среднего уровня АД (4 на рис. 1). Существенное влияние на функционирование контуров регуляции (3, 4 и 6 на рис. 1) оказывает процесс дыхания, имеющий в покое характерную частоту около 0,3 Гц. Контуры регуляции находятся во взаимодействии с регуляторными центрами, расположенными в головном мозге, их активность проявляется в сигналах электроэнцефалограммы на характерных частотах около 0,1 Гц (7 на рис. 1).

Экспериментальные исследования, представленные в статье, концентрируются преимущественно на изучении особенностей динамики контуров регуляции ЧСС и среднего АД (блоки 3 и 4 на рис. 1).

2. Синхронизация контуров регуляции кровообращения дыханием

При исследовании связанности и синхронизованности элементов сложных систем в условиях недостатка априорной информации об их устройстве и организации взаимодействия элементов постановка активных экспериментов с воздействием на исследуемую систему внешним сигналом, параметры которого изменяются по известному закону, позволяет существенно повысить достоверность исследований [14]. При изучении динамики контуров регуляции ЧСС и среднего АД, демонстрирующих у людей характерные частоты колебаний около 0,1 Гц, в качестве такого известного внешнего воздействия может использоваться сигнал дыхания, частота которого изменяется во время эксперимента в пределах 0,1 Гц [15].

2.1. Организация экспериментальных исследований

В исследовании были зарегистрированы сигналы 25 практически здоровых лиц (6 женщин и 19 мужчин) в возрасте от 18 до 32 лет. Средний возраст составил 22 года.

У всех испытуемых проводилась одновременная регистрация электрокардиограммы (ЭКГ), записи дыхания с помощью термисторного ороназального датчика и фотоплетизмограммы (ФПГ). ФПГ представляла собой сигнал кровенаполнения сосудов конечностей, записываемый с пальца оптическим датчиком в инфракрасном диапазоне (датчик включал светодиод и фототранзистор, регистрирующий интенсивность света, прошедшего через ткани пальца). Использовался многоканальный электроэнцефалограф-анализатор ЭЭГА-21/26 «Энцефалан-131-03», модель 10, с комплектом стандартных датчиков (НПКФ «Медиком-МТД», Россия). Эксперимент проводился с линейно меняющимся по частоте дыханием от 0,05 до 0,25 Гц в течение 25 минут в положении сидя. Моменты, в которые испытуемый должен был делать вдох, обозначались звуковыми сигналами, инициируемыми с линейно нарастающей в указанном диапазоне частотой специальной компьютерной программой. Выдох осуществлялся испытуемым произвольно.

Регистрация сигналов ЭКГ, ФПГ и дыхания производилась с частотой дискретизации 250 Гц при 14-разрядном разрешении.

Из ЭКГ предварительно выделялась последовательность R-R-интервалов — кардиоинтервалограмма — последовательность длительностей интервалов между сердечными сокращениями. Из-за непостоянства частоты сердцебиения значения в ряде R-R-интервалов расположены неэквидистантно (на различных расстояниях во времени). Для преобразования полученного неэквидистантного ряда в эквидистантный осуществлялась его интерполяция кубическими сплайнами и перевыборка значений через равные промежутки времени с частотой 5 Гц в соответствии с рекомендациями, приведенными в работах [15, 16]. Колебания, отражающие активность исследуемых регуляторных подсистем, выделялись из сигналов эквидистантной кардиоинтервалограммы и ФПГ, регистрируемых одновременно с сигналом дыхания. Для этого временные реализации (оцифрованные сигналы) фильтровались в полосе 0,05—0,25 Гц, что позволяло выделить из экспериментальных данных составляющие, связанные с активностью анализируемых контуров регуляции [17]. Реализация ФПГ перевыбиралась до частоты дискретизации 5 Гц.

2.2. Методы анализа синхронизации

В настоящее время известен целый ряд методов диагностики фазового и частотного захвата, которые успешно применялись в том числе для анализа сигналов биологической природы. Однако так как анализируются

нелинейные зашумленные и сильно нестационарные сигналы, т. е. сигналы, статистические свойства которых (в частности, основная частота сигнала дыхания) достаточно быстро меняются во времени, то требуется особо аккуратное применение специализированных методов анализа. Для повышения достоверности параллельно использовались несколько подходов:

- диаграмма частотного захвата — зависимость положения основной частотной составляющей сигналов контуров регуляции от основной частоты дыхания; рассчитывается с помощью построения скелетонов вейвлет-преобразования с вейвлетом Морле [16, 18];

- расчет и построение синхрограмм Ψ : откладываются значения свернутой фазы одного процесса в моменты времени, когда свернутая фаза второго процесса принимает фиксированное значение [19];

- расчет в скользящих окнах предложенной в исследовании [20] численной меры синхронизованности — коэффициента фазовой когерентности γ : амплитуды первой фурье-моды распределения свернутой разности мгновенных фаз. Данная методика сопровождалась оценкой статистической значимости с помощью суррогатных данных.

Статистическая значимость определялась с помощью генерации ансамбля суррогатных данных с тестированием нулевой статистической гипотезы о несвязанных процессах авторегрессии. Для этого генерировался ансамбль суррогатных данных, сохраняющих периодограммы сигналов, но разрушающих связи между сигналами — суррогаты AAFT (Amplitude Adjusted Fourier Transform) [21].

Для последних двух методик необходимо выделение из экспериментальных сигналов их мгновенных фаз. Целесообразность перехода к анализу мгновенных фаз была показана ранее в целом ряде работ при анализе в том числе данных биологической природы [14], так как мгновенная фаза более чувствительна к внешнему воздействию, чем амплитуда. В данной задаче выделение из экспериментальных сигналов рядов мгновенных фаз осуществлялось с помощью преобразования Гильберта — широкополосного фазовращателя на $-\pi/2$ [9, 14]. По определению, мгновенная фаза непрерывно нарастает во времени, увеличиваясь на 2π за мгновенный период. Для построения синхрограмм и расчета коэффициента фазовой когерентности удобнее использовать свернутые мгновенные фазы (взятые по модулю 2π).

2.3. Анализ синхронизации контуров регуляции кровообращения

Особенности индивидуальной и совместной динамики исследуемых контуров регуляции до сих пор являются предметом дискуссии. Автоколебательный характер контура регуляции среднего АД (блок 4 на рис. 1) отмечался многими исследователями [22]. При этом ряд работ предлагает активность контура регуляции ЧСС (блок 3 на рис. 1) рассматривать в ка-

честве пассивного отклика на воздействие контура регуляции среднего АД [23]. Вместе с тем в ряде исследований получены свидетельства об автоколебательном характере колебаний обоих контуров [24]. В данном разделе синхронизация каждого из этих двух исследуемых контуров сигналом дыхания используется в качестве инструмента изучения характера динамики контуров.

На рис. 2 представлены типичные результаты диагностики синхронизованности для одного из испытуемых с помощью методов, рассмотренных в разделе 2.2. Левый столбец иллюстрирует результаты применения трех методов диагностики синхронизованности для сигнала кардиоинтервалограммы, правый — для ФПГ. Из представленных на рисунке графиков

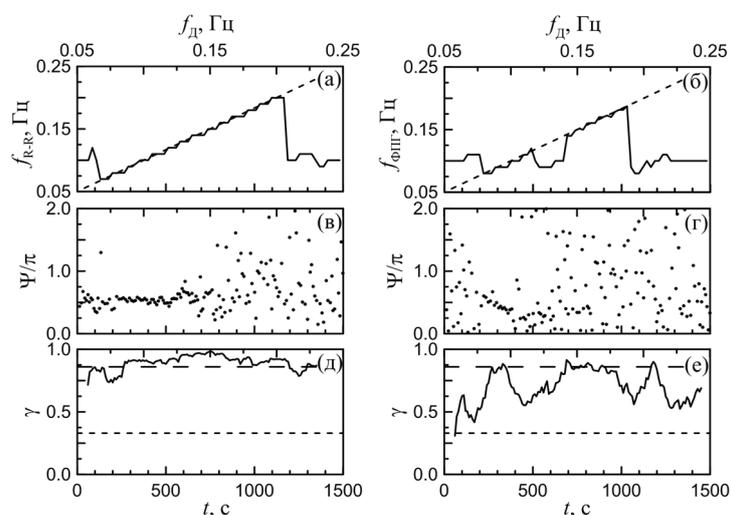


Рис. 2. Результаты диагностики синхронизованности в ходе обработки записей испытуемого № 1, демонстрирующие более широкий интервал синхронизации контура регуляции ЧСС, чем контура регуляции среднего АД: *a, б* — диаграммы частотного захвата дыханием кардиоинтервалограммы и ФПГ соответственно; f_d — основная частота в спектре сигнала дыхания; f_{R-R} — основная частота в спектре кардиоинтервалограммы; $f_{ФПГ}$ — основная частота в спектре фотоплетизмограммы (значения, лежащие вблизи биссектрисы (отмечена пунктиром), соответствуют синхронному поведению); *в, г* — синхрограммы, построенные для тех же сигналов; *д, е* — значения коэффициента фазовой когерентности, рассчитанного в скользящих окнах. Короткий пунктир отмечает критический 95%-й уровень значимости, рассчитанный при проверке нулевой гипотезы о несвязанных процессах авторегрессии. Длинный пунктир отмечает критический 95%-й уровень значимости, рассчитанный при проверке нулевой гипотезы о несинхронизованных системах; таким образом, значения, превышающие эту линию, с вероятностью 0,95 указывают на наличие значимой синхронизации

хорошо видно, что все используемые методы уверенно диагностируют длительные участки фазового и частотного захвата дыханием 0,1 Гц ритмов исследуемых контуров. При этом длительность интервала синхронизации в кардиоинтервалограмме составляет порядка 1000 с (при диагностике с помощью спектрального оценивания и расчета коэффициента фазовой когерентности — рис. 2, а, д), а суммарная длина интервалов синхронизации в ФПГ примерно вдвое меньше (рис. 2, б, е). Качественный анализ синхрограмм (рис. 2, в, з) подтверждает эти выводы.

В 10 экспериментах в сигнале контура регуляции ЧСС были выявлены значимо более широкие интервалы синхронизации, чем в контуре регуляции среднего АД, в 6 экспериментах наблюдались противоположные результаты, в 9 случаях значимо различить длительности интервалов синхронизации не удалось [11].

Таким образом, можно сделать вывод в пользу гипотезы об автоколебательном характере обоих исследуемых контуров регуляции и подтвердить известные экспериментальные результаты [24].

3. Синхронизация низкочастотных ритмов электроэнцефалограмм

Упоминания о наблюдениях медленных колебаний электрических потенциалов (ритмы с периодом более 1 с), регистрируемых на поверхности головы, встречаются уже в работах изобретателя электроэнцефалографии Ханса Бергера [25]. Однако на протяжении многих лет основное внимание исследователей привлекало прежде всего анализ более высокочастотных ритмов (тета, альфа, гамма и бета) в электроэнцефалограммах (ЭЭГ). Вместе с тем целый ряд исследователей отмечают важность изучения колебаний дельта-диапазона частот (0—4 Гц) в ЭЭГ при диагностике патологий головного мозга, исследовании патологических поведенческих реакций, развитии фундаментальных представлений об организации автономной нервной системы [26, 27].

Ряд работ свидетельствует, что сверхмедленные колебания потенциала (СМКП) ЭЭГ — составляющие с частотами ниже 0,5 Гц — являются отражением активности центров регуляции кровообращения (блок 7 на рис. 1) [26, 27]. Несмотря на важность проблемы, до последнего времени не удавалось продвинуться в исследованиях особенностей динамики центров регуляции кровообращения, расположенных в головном мозге, а бодрствующие здоровые люди практически не изучались [27]. Наиболее успешные результаты получены в [28] благодаря применению нелинейных методов анализа многоканальных записей анестезированных собак.

Ниже представлены полученные нами результаты исследования явления захвата частот и фаз слабо изученных СМКП ЭЭГ при воздействии

дыхания, частота которого менялась так же, как и в экспериментах, рассмотренных в разделе 2.3.

Экспериментальные данные. В исследованиях принимали участие 10 здоровых мужчин (в возрасте 18—32 года). У всех испытуемых, кроме сигналов дыхания, ЭКГ и ФПГ, регистрировалась поверхностная 19-электродная ЭЭГ с расстановкой электродов в соответствии со стандартной схемой «10—20». В остальном схема эксперимента была аналогична схеме исследования, описанного в разделе 2.2.

Эксперименты с дыханием с линейно нарастающей частотой. Типичные записи нескольких каналов ЭЭГ, ФПГ и их вейвлет-спектры представлены на рис. 3. Пунктирная линия на вейвлет-спектрах (рис. 3, б, г, е) соответствует закону изменения частоты процесса дыхания. Из рисунка видно, что основные частоты сигналов электроэнцефалографического

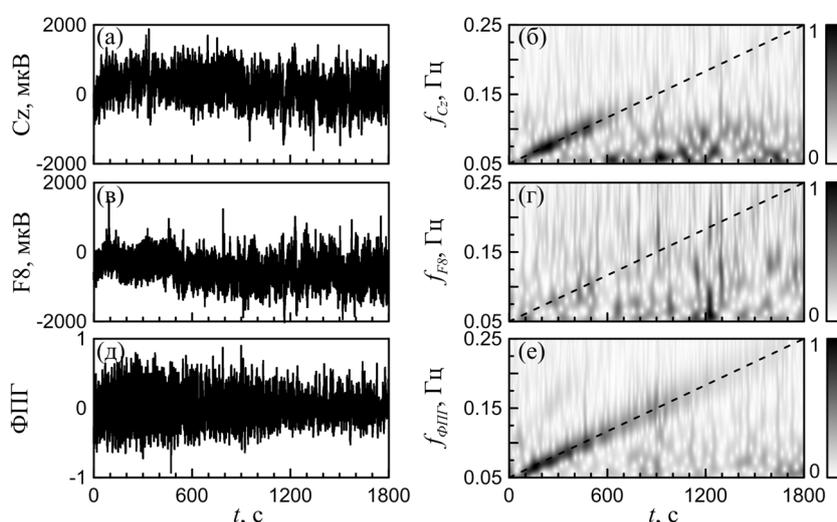


Рис. 3. Примеры записей отведений ЭЭГ и ФПГ и их вейвлет-спектров для испытуемого № 1. Временные реализации сигналов: *a* — отведение Cz, *б* — отведение F8, *д* — ФПГ (в условных единицах). Нормированные на максимальное значение вейвлет-спектры сигналов: *б* — отведение Cz, *г* — отведение F8, *е* — ФПГ. Диагональной пунктирной линией на вейвлет-спектрах отмечена зависимость частоты сигнала дыхания от времени

затылочного отведения Cz и ФПГ следуют за частотой внешнего сигнала в некотором интервале частот около характерной частоты контуров регуляции деятельности ССС (около 0,1 Гц), а затем наблюдается скачкообразное изменение основной частоты анализируемых сигналов. Такая картина типична для генераторов, находящихся под внешним воздействием, частото-

та которого нарастает, позволяя наблюдать режим захвата частот колебаний, а затем скачкообразный срыв синхронизации после выхода частоты воздействующего сигнала за границы кнола синхронизации. Для испытуемого № 1 признаков захвата частот колебаний в лобном отведении ЭЭГ F8 по вейвлет-спектрам не наблюдается.

В ходе проведенного исследования всех испытуемых был выполнен попарный анализ сигналов для выявления синхронизации между процессом дыхания и отведениями ЭЭГ, а также процессом дыхания и сигналом ФПГ с помощью описанных в разделе 2.2 методов. Кроме них, использовался специализированный метод детекции фазовой синхронизации в условиях воздействия сигнала изменяющейся частоты, основанный на анализе поведения мгновенных фаз колебаний, выделенных с помощью вейвлета, масштабный коэффициент которого (имеющий смысл центральной частоты полосы пропускания полосового фильтра) следовал за частотой изменения воздействующего сигнала [18].

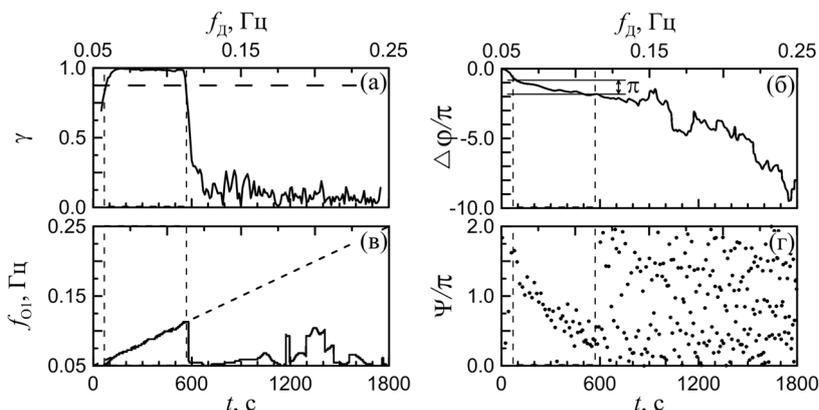


Рис. 4. Результаты анализа захвата фаз и частот колебаний СМКП отведения О1 испытуемого № 5 сигналом дыхания с линейно нарастающей во времени частотой: *a* — коэффициент фазовой когерентности (горизонтальная пунктирная линия — 95%-ный критический уровень); *б* — разность мгновенных фаз колебаний, выделенная с помощью вейвлета Морле (отмечен участок, соответствующий примерно линейному падению разности фаз на π радиан); *в* — зависимость основной частоты f_{01} в спектре СМКП отведения О1 ЭЭГ от частоты дыхания f_d (диагональный пунктир — значение f_d в каждый момент времени); *г* — синхрограмма. Вертикальные пунктирные линии обозначают диагностированный интервал синхронизации вблизи собственной частоты колебаний, где γ остается выше уровня значимости

Типичный пример результатов анализа представлен на рис. 4. Из рисунка видно, что разнородные методы анализа, использующие разные способы введения фаз, дают близкие результаты определения границ интервала

захвата частот порядка 1:1 (примерно от 80 до 560 с). В ходе количественного анализа проведено сопоставление длительностей интервалов захвата фаз порядка 1:1, на которых значения коэффициента γ были значимы (рис. 4, *a*).

Наиболее длительный интервал синхронизации, составивший 674 с, был диагностирован у испытуемого № 8 в отведении О1.

Средняя длительность интервалов синхронизации по всем отведениям всех испытуемых насчитывала (177 ± 127) с (приведено со стандартным отклонением).

Анализ распределения длительности захвата фаз по отведениям указывает на то, что в среднем эффект захвата фаз колебаний дельта-ритмов головного мозга сигналом дыхания более выражен в затылочных отведениях, что согласуется с известными представлениями о локализации центров регуляции в продолговатом мозге [29].

Таким образом, проведенный анализ данных первой серии активных экспериментов с дыханием с линейно нарастающей частотой позволил впервые выявить интервалы захвата фаз и частот ритмов дельта-диапазона ЭЭГ дыханием с линейно нарастающей во времени частотой в различных отведениях испытуемых [30].

4. Моделирование синхронизации контура регуляции в математической модели ССС

Основное внимание в данном разделе уделено процессам регуляции ЧСС и среднего АД.

Несмотря на значительный интерес к проблеме и большое количество известных работ, окончательные представления об устройстве и особенностях функционирования регуляторных контуров до сих пор не сформулированы. Ряду исследователей удалось формализовать известные представления в виде математических моделей. Как правило, эти модели учитывают основной сердечный ритм, регуляцию частоты сердечного ритма, регуляцию тонуса артерий и эффект «артериального виндкесселя», описывающий инерционные свойства сосудов. Ниже представлена предложенная нами математическая модель ССС, учитывающая эффекты, выявленные в ходе экспериментальных исследований.

4.1. Математическая модель ССС

Модель ССС, предложенная в работе [31], дает достаточно подробное описание взаимодействия регуляторных систем, формализованное в виде системы дифференциальных уравнений. Барорефлекторная регуляция тонуса артериальных сосудов моделируется в этой работе (и большинстве

других известных работ по моделированию ССС) в виде линейных релаксаторов с запаздыванием. Вместе с тем на основании результатов натуральных экспериментов целый ряд исследователей указывает на относительно автономный и автоколебательный характер контура регуляции среднего АД [22]. Такой характер динамики этого контура подтверждается также результатами наших экспериментальных исследований [9, 11], которые обсуждались выше. Нами была предложена математическая модель ССС, структура которой близка к структуре модели, используемой в работе [31]. Ключевым отличием от известных моделей является описание контура регуляции в виде автогенератора с запаздывающей обратной связью [22].

Предложенная математическая модель описывает следующие процессы: основной сердечный ритм, влияние отделов вегетативной нервной системы на ЧСС и сократимость сердца, процессы формирования АД и регуляции среднего АД (см. рис. 1). Модель учитывает также влияние дыхания на перечисленные процессы. Структура модели представлена на рис. 5.

Математическая модель включает четыре дифференциальных уравнения первого порядка:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{1}{T_0} f_s(t) f_p(t), \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{d\bar{p}(t)}{dt} = -\bar{p}(t) + f(\bar{p}(t - \theta)) + k_5 B(t), \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dc(t)}{dt} = -\frac{c(t)}{\varepsilon_c} + k_2 v_s(t - \theta_c), \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_d(t)}{dt} = -\frac{p_d(t)}{R(t)C}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Здесь $\varphi(t)$ — фаза сердечного цикла, f_s и f_p — факторы модуляции сердечного ритма со стороны симпатического и парасимпатического отделов вегетативной нервной системы, связанные с артериальным давлением $p(t)$ нелинейными алгебраическими соотношениями, $\bar{p}(t)$ — среднее АД, $p_d(t)$ — артериальное давление в фазе диастолы (фаза падения АД на каждом сердечном цикле), $B(t)$ характеризует процесс дыхания. Правые части уравнений — нелинейные алгебраические выражения. Модель подробно обсуждается в работе [13], ее краткое описание представлено ниже.

Работа синоатриального узла сердца описывается уравнением (1) типа «накопление и сброс» идентично модели К. Котани. В отсутствие регуляторных влияний (при денервации сердца) $f_s(t) = f_p(t) = 1$, интервал между сердечными сокращениями остается постоянным и равным T_0 . При наличии воздействия со стороны автономной нервной системы частота сердечного ритма модулируется и появляется вариабельность.

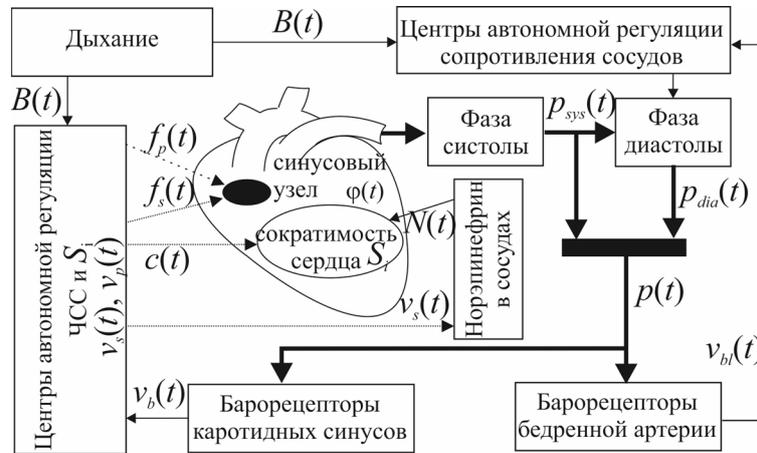


Рис. 5. Структура предложенной модели ССС человека. Редкий пунктир — влияние парасимпатического отдела, частый пунктир — влияние симпатического отдела, жирные линии — АД, тонкие сплошные линии — прочие влияния

Уравнение (2) представляет собой нелинейный генератор с запаздыванием с сигмоидальной нелинейностью f , моделирующий контур регуляции артериального давления [31].

Диастолическое артериальное давление (4) зависит от сопротивления артериальных сосудов, которое управляется контуром регуляции давления (2): $R(t) = R_0(1 + k_7 f(\bar{p}(t - \theta_e)))$.

Артериальные барорецепторы откликаются на изменения давления и формируют, в частности, сигналы активации симпатических нервов $v_s(t)$, которые влияют на концентрацию в сердечной мышце норадреналина $c(t)$ (3), а $c(t)$, в свою очередь, через нелинейное преобразование влияет на значения $f_s(t)$, модулируя ЧСС.

4.2. Моделирование синхронизации контура регуляции давления

Было проведено сопоставление результатов исследования синхронизации сигналом дыхания контуров регуляции при анализе экспериментальных данных модели и модели К. Котани [31].

Важным вопросом является разграничение нелинейного эффекта — захвата фаз колебаний — и паразитного эффекта «просачивания» — линейного подмешивания внешнего сигнала к динамике исследуемой системы. Для решения этой задачи использовался специальный подход, предложенный ранее в работе [18], который основан на выделении мгновенных фаз колебаний с помощью непрерывного вейвлет-преобразования. В рабо-

те [18] было показано, что в экспериментах с синхронизацией автогенераторов сигналом с линейно изменяющейся частотой разность фаз внутри области захвата частот линейно изменяется на π . В противном случае диагностируется просачивание внешнего сигнала либо комбинированный эффект: просачивание и фазовая синхронизация.

При моделировании длина реализаций и свойства воздействующего сигнала были эквивалентными таковым в экспериментальных исследованиях. Анализировались временные реализации сигнала дыхания $B(t)$ и сигнала артериального давления $p(t)$. Из $p(t)$ полосовой фильтрацией 0,05—0,25 Гц выделялся сигнал контура барорефлекторной регуляции среднего артериального давления.

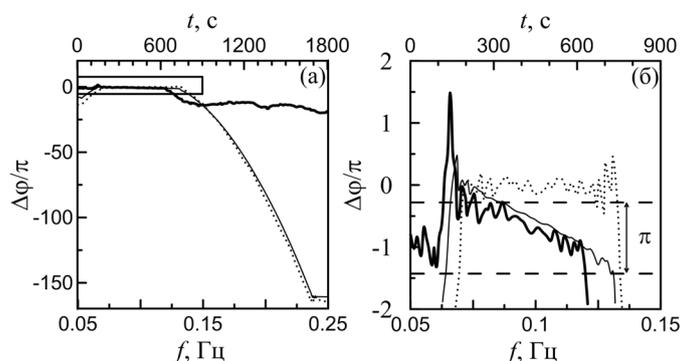


Рис. 6. Разности мгновенных фаз колебаний сигнала дыхания с линейно нарастающей частотой и 0,1 Гц составляющей, выделенной из сигнала колебаний артериального давления (ФПГ для экспериментальных данных), (а) и увеличенный фрагмент разности фаз в области захвата мгновенной фазы сигналом дыхания (б). Жирная линия — результаты анализа экспериментальных данных, пунктир — модели К. Котани, тонкая линия — предложенной модели

На рис. 6 представлены разности фаз сигналов испытуемого № 3 и сигналов двух моделей, находящихся под воздействием дыхания с линейно нарастающей частотой. Из рисунка видно, что линейный участок разности фаз изменяется на π , уверенно демонстрируя полосу фазового захвата на интервале 200—600 с, только для экспериментальной разности фаз и разности фаз, выделенной из сигнала артериального давления предложенной модели. Причем интервалы захвата фаз для модели и экспериментального сигнала хорошо соответствуют друг другу. Разность фаз модели К. Котани не демонстрирует линейного изменения на π , оставаясь практически постоянной, что указывает на наличие просачивания без синхронизации [18].

Заключение

Использование комплексно нескольких методов диагностики синхронизации позволило получить ряд результатов.

Показано, что сигнал дыхания, частота которого линейно нарастает в течение 25 мин от 0,05 до 0,25 Гц, синхронизует контуры регуляции кровообращения, позволяя наблюдать длительные интервалы захвата фаз и частот 0,1 Гц составляющих сигналов кардиоинтервалограммы (до 1100 с) и фотоплетизмограммы (до 840 с).

В экспериментах с дыханием, осуществляемым здоровыми испытуемыми по звуковому сигналу с линейно нарастающей частотой, впервые показано наличие захвата фаз и частот колебаний составляющих сигналов поверхностной ЭЭГ, имеющих собственные частоты колебаний около 0,1 Гц. Показано, что в среднем наиболее длительные участки синхронизации в экспериментах с дыханием с линейно нарастающей частотой наблюдаются преимущественно в затылочных отведениях, что, по всей видимости, связано с тем, что в сигналы этих отведений проецируется активность центров регуляции кровообращения, расположенных в продолговатом мозге.

Анализ взаимного расположения и длительностей интервалов синхронизации исследуемых контуров регуляции дыханием с линейно нарастающей частотой свидетельствует, что рассматриваемые контуры регуляции, расположенные в стволе головного мозга, могут рассматриваться как сеть взаимодействующих автогенераторов.

Учет полученных фундаментальных знаний о характере динамики контура регуляции среднего артериального давления позволил построить математическую модель сердечно-сосудистой системы, моделирующую основной сердечный ритм, процесс дыхания, процессы регуляции сердечного ритма и среднего артериального давления, с описанием этого контура регуляции в виде кольцевого автогенератора с запаздывающей обратной связью. Предложенная модель, в отличие от известной модели из работы [31], позволяет качественно и количественно воспроизводить наблюдающийся в эксперименте эффект захвата фаз колебаний этого контура сигналом дыхания с линейно нарастающей частотой.

Литература

1. Безручко, Б. П. Математическое моделирование и хаотические временные ряды / Б. П. Безручко, Д. А. Смирнов. — Саратов : ГосУНЦ «Колледж», 2005. — 320 с.
2. Chelton, B. Handbook of time series analysis / B. Chelton, M. Wuntherhalder, J. Timmer. — Weinheim : Wiley-VCH Verlag, 2006. — 514 p.
3. Bezruchko, B. Identification of chaotic systems with hidden variables (modified Bock's algorithm) / B. P. Bezruchko, D. A. Smirnov, I. V. Sysoev // Chaos, Solitons and Fractals. — 2006. — Vol. 29. — P. 82—90.

4. World health statistics, 2015 : (WHO Library cataloguing-in-publication data) / World Health Organization. — 2015. — 164 p.
5. *Jain, K. K.* Textbook of personalized medicine / K. K. Jain. — New York : Springer-Verlag, 2015. — 732 p.
6. *Парин, В. В.* Космическая кардиология / В. В. Парин, Р. М. Баевский, Ю. Волков, О. Газенко. — М. : Медицина, 1967. — 208 с.
7. *Флейшман, А. Н.* Медленные колебания гемодинамики. Теория, практическое применение в клинической медицине и профилактике / А. Н. Флейшман. — Новосибирск : Наука, 1999. — 224 с.
8. *Goldberger, A. L.* Goldberger's clinical electrocardiography a simplified approach / A. L. Goldberger, Z. D. Goldberger, A. Shvilkin. — 9th edition. — Elsevier, 2018. — 304 p.
9. *Karavaev, A. S.* Synchronization of low-frequency oscillations in the human cardiovascular system / A. S. Karavaev, M. D. Prokhorov, V. I. Ponomarenko, A. R. Kiselev, V. I. Gridnev, E. I. Ruban, B. P. Bezruchko // CHAOS. — 2009. — Vol. 19. — Art. 033112.
10. *Kiselev, A. R.* A comprehensive assessment of cardiovascular autonomic control using photoplethysmograms recorded from earlobe and fingers / A. R. Kiselev, S. A. Mironov, A. S. Karavaev, D. D. Kulminskiy, V. V. Skazkina, E. I. Borovkova, V. A. Shvartz, V. I. Ponomarenko, M. D. Prokhorov // Physiological Measurement. — 2016. — Vol. 37. — P. 580—595.
11. *Караваяев, А. С.* Фазовый и частотный захват 0,1 Гц колебаний в ритме сердца и барорефлекторной регуляции артериального давления дыханием с линейно меняющейся частотой у здоровых лиц / А. С. Караваяев, А. Р. Киселев, В. И. Гріднев, Е. И. Боровкова, М. Д. Прохоров, О. М. Посненкова, В. И. Пономаренко, Б. П. Безручко, В. А. Шварц // Физиология человека. — 2013. — Т. 39, № 4. — С. 105—111.
12. *Kiselev, A. R.* The dynamics of 0.1 Hz oscillations synchronization in cardiovascular system during the treatment of acute myocardial infarction patients / A. R. Kiselev, V. I. Gridnev, A. S. Karavaev, O. M. Posnenkova, M. D. Prokhorov, V. I. Ponomarenko, B. P. Bezruchko // Applied Medical Informatics. — 2011. — Vol. 28, № 1. — P. 1—8.
13. *Karavaev, A. S.* Model of human cardiovascular system with a loop of autonomic regulation of the mean arterial pressure / A. S. Karavaev, J. M. Ishbulatov, V. I. Ponomarenko, M. D. Prokhorov, V. I. Gridnev, B. P. Bezruchko, A. R. Kiselev // J. Am. Soc. Hypertension. — 2016. — Vol. 10, iss. 3. — P. 235—243.
14. *Pikovsky, A.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences / A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths. — Cambridge : Cambridge University Press, 2001. — 411 p.
15. *Prokhorov, M. D.* Synchronization between main rhythmic processes in the human cardiovascular system / M. D. Prokhorov, V. I. Ponomarenko, V. I. Gridnev, M. V. Bodrov, A. V. Bespyatov // PRE. — 2003. — Vol. 68. — Art. 041913.
16. *Пономаренко, В. И.* Синхронизация сердцебиения и ритма регуляции сосудистого тонуса с дыханием / В. И. Пономаренко, В. И. Гріднев, М. Д. Прохоров // Биомедицинские технологии и радиоэлектроника. — 2004. — № 8/9. — С. 40.
17. *Баевский, Р. М.* Анализ вариабельности сердечного ритма при использовании различных электрокардиографических систем / Р. М. Баевский, Г. Г. Иванов, Л. В. Чирейкин, А. П. Гаврилушкин, П. Я. Довгалевский, Ю. А. Кукушкин, Т. Ф. Миронова, Д. А. Прилуцкий, А. В. Семенов, В. Ф. Федоров, А. Н. Флейшман, М. М. Медведев // Вестник аритмологии. — 2001. — Т. 24. — С. 65—87.

18. *Hramov, A. E.* Detecting synchronization of self-sustained oscillators by external driving with varying frequency / A. E. Hramov, A. A. Koronovsky, V. I. Ponomarenko, M. D. Prokhorov // *Phys. Rev. E.* — 2006. — Vol. 73. — Art. 026208.
19. *Schafer, C.* Synchronization in the human cardiorespiratory system / C. Schafer, M. G. Rosenblum, H. H. Abel, J. Kurths // *Phys. Rev. E.* — 1999. — Vol. 60. — P. 857—870.
20. *Mormann, F.* Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the EEG of epilepsy patients / F. Mormann, K. Lehnertz, P. David, C. E. Elger // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* — 2000. — Vol. 144, iss. 3. — P. 358—369.
21. *Schreiber, T.* Improved surrogate data for nonlinearity tests / T. Schreiber, A. Schmitz // *Phys. Rev. Lett.* — 1996. — Vol. 77, № 4. — P. 635—638.
22. *Ringwood, J. V.* Slow oscillations in blood pressure via a nonlinear feedback model / J. V. Ringwood, S. C. Malpas // *American Journal of Physiology.* — 2001. — Vol. 280. — Art. 1105.
23. *Julien, C.* The enigma of Mayer waves: facts and models // *Cardiovascular Research.* — 2006. — Vol. 70. — P. 12—21.
24. *Cooley, R. L.* Evidence for a central origin of the low-frequency oscillation in RR-interval variability / R. L. Cooley, N. Montano, C. Cogliati, P. van de Borne, W. Richenbacher, R. Oren, V. K. Somers // *Circulation.* — 1998. — Vol. 98. — P. 556—561.
25. *Millett, D.* Hans Berger: from psychic energy to the EEG // *Perspect. Biol. Med.* — 2001. — Vol. 44, iss. 4. — P. 522—542.
26. *Aladjalova, N. A.* Infra-slow rhythmic oscillations of the steady potential of the cerebral cortex // *Nature.* — 1957. — Vol. 179. — P. 957—959.
27. *Knyazev, G. G.* EEG delta oscillations as a correlate of basic homeostatic and motivational processes // *Neuroscience and Biobehavioral Reviews.* — 2012. — Vol. 36, iss. 1. — P. 677—695.
28. *Vandenhouten, R.* Nonstationary time-series analysis applied to investigation of brainstem system dynamics / R. Vandenhouten, M. Lambertz, P. Langhorst, R. Grebe // *IEEE Trans. Biomed. Eng.* — 2000. — Vol. 47, iss. 6. — P. 729—737.
29. *Fowler, A. C.* A delay recruitment model of the cardiovascular control system / A. C. Fowler, M. J. McGuinness // *J. Math. Biology.* — 2005. — Vol. 51, iss. 5. — P. 508—526.
30. *Караваяев, А. С.* Синхронизация колебаний низкочастотных составляющих электроэнцефалограмм дыханием с изменяющейся во времени частотой / А. С. Караваяев, А. Е. Руннова, Е. И. Боровкова, Ю. М. Ишбулатов, В. С. Хорев, А. Р. Киселев, М. О. Журавлев, В. И. Пономаренко, М. Д. Прохоров, Б. П. Безручко, А. А. Короновский // *Саратовский научно-медицинский журнал.* — 2016. — Т. 12, № 4. — С. 541—548.
31. *Kotani, K.* Model for complex heart rate dynamics in health and disease / K. Kotani, Z. R. Struzik, K. Takamasu, H. E. Stanley, Y. Yamamoto // *Phys. Rev. E.* — 2005. — Vol. 72. — Art. 041904.

**Современные проблемы
теории нелинейных колебаний
и волн**



СЖИМАЕМЫЕ ВИХРЕВЫЕ СТРУКТУРЫ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Е. А. Кузнецов^{1,2,3}, *Д. С. Агафонцев*^{1,4}, *А. А. Майлыбаев*⁵,
Е. В. Серещенко^{1,6}

¹ Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск

² Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, г. Москва

³ Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, г. Москва

⁴ Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, г. Москва

⁵ Национальный институт теоретической и прикладной математики, г. Рио-де-Жанейро,
Бразилия

⁶ Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск

В данной работе представлены результаты за последние два года исследования нашей группой зарождения двумерных (в виде тонких блинов) вихревых структур в трехмерных течениях и сужающихся квазиодномерных структур в двумерной гидродинамике при больших числах Рейнольдса, когда в главном порядке развитие этих структур может быть описано трех- и двумерными уравнениями Эйлера идеальной несжимаемой жидкости. Численно и аналитически показано, что сжатие таких структур и, соответственно, увеличение их амплитуд обусловлено сжимаемостью вмоложенных полей — завихренности в случае трехмерной гидродинамики и ротора завихренности (di-vorticity) для двумерных течений. Выяснено, что рост завихренности и ротора завихренности можно рассматривать как процесс опрокидывания соответствующих векторных полей; при больших интенсивностях этот процесс имеет скейлинговый характер, связывающий максимальную амплитуду и толщины / ширины структур. Обсуждается роль этих когерентных структур в формировании колмогоровского спектра турбулентности и спектра Крейчнана, соответствующего постоянному потоку энтропии в случае двумерной турбулентности.

1. Введение

Данная статья представляет собой обзор последних результатов, полученных нами за последние два года, по исследованию зарождения квазидвумерных (в виде тонких блинов) вихревых структур в трехмерных течениях и сужающихся квазиодномерных структур в двумерной гидродинамике при больших числах Рейнольдса ($Re \gg 1$), когда в главном порядке развитие этих структур может быть описано в рамках трех- и двумерных уравнений Эйлера идеальной несжимаемой жидкости. Этой теме были посвящены лекции Е. А. Кузнецова как на предыдущей школе «Нелинейные

волны — 2016», так и на школе «Нелинейные волны — 2018»*. Поэтому определенного пересечения этой работы и предыдущей статьи [1] было невозможно избежать, прежде всего это касается мотивации и основных положений исследований.

Хорошо известно, что теория Колмогорова — Обухова [2, 3] описывает развитую гидродинамическую турбулентность в инерционном интервале масштабов — промежуточной области между длинноволновой накачкой и вязким затуханием. Размер этой области растет пропорционально $Re^{3/4}$. В основе теории Колмогорова — Обухова лежат два важных предположения:

- турбулентность в инерционном интервале однородна и изотропна;
- нелинейное взаимодействие между флуктуациями является локальным.

Последнее означает, что взаимодействие между масштабами одного порядка превосходит взаимодействие между флуктуациями с сильно отличающимися масштабами. В случае стационарной турбулентности поведение системы определяется (постоянным) потоком энергии ε из области накачки в область затухания (по сути, основано на свойстве локальности). Спектр турбулентности — так называемый колмогоровский спектр — имеет универсальное поведение, определяемое единственной величиной ε . Отсюда из соображений размерности может быть получен известный закон 5/3:

$$E(k) = C_K \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (1)$$

где k — волновое число, а C_K — колмогоровская константа. Из этих же соображений следует, что флуктуации скорости \mathbf{v} и завихренности $\omega = [\nabla \times \mathbf{v}]$ масштаба l даются соответственно следующими соотношениями:

$$\langle \delta v \rangle \sim \varepsilon^{1/3} l^{1/3}, \quad \langle \delta \omega \rangle \sim \varepsilon^{1/3} l^{-2/3}.$$

Время перекачки энергии из энергосодержащих масштабов L в область диссипации конечно и определяется только L и ε : $T \sim L^{2/3} \varepsilon^{-1/3}$. Таким образом, для флуктуаций ω имеется особенность при $l \rightarrow 0$ и конечном времени перекачки T , что указывает на возможность коллапса в трехмерной гидродинамике Эйлера, которая может быть использована для описания этих процессов в инерционном интервале. Именно этот момент был главным, когда мы начинали свои исследования. Особенно помог численный эксперимент, значительно изменивший наше представление о механизмах перехода к развитой гидродинамической турбулентности в рамках уравнений Эйлера. Хотелось бы подчеркнуть, что уравнения Эйлера, будучи гамильтоновскими [5], являются чисто нелинейными — в них отсутствует какая-

* Лекция «Опрокидывание вихревых линий как предтеча развитой колмогоровской турбулентности» на научной школе «Нелинейные волны — 2016» (Нижний Новгород, 27 февраля — 4 марта 2016 г.) и лекция «Сжимаемые структуры в несжимаемой гидродинамике и их роль в зарождении турбулентности» на научной школе «Нелинейные волны — 2018» (Нижний Новгород, 26 февраля — 4 марта 2018 г.).

либо линейная часть, а гамильтониан системы, совпадающий с кинетической энергией всей жидкости, представляет собой гамильтониан взаимодействия. Таким образом, уравнения Эйлера относятся к системам с предельно сильным нелинейным взаимодействием. Кроме того, уравнения Эйлера при любой размерности обладают бесконечно большим числом интегралов движения. Это так называемые инварианты Коши, которые представляют собой лагранжевы инварианты, переносимые вместе с жидкостью (детали см. в [5, 6]). Эти инварианты можно рассматривать как локальную формулировку теоремы Кельвина о сохранении циркуляции, и их наличие существенно осложняет изучение развитой гидродинамической турбулентности.

В 1997 году в работе [7] было введено так называемое представление вихревых линий, на основе которого стало понятно, почему непрерывно распределенные вихревые линии являются сжимаемыми. Это представление явным образом учитывало наличие инвариантов Коши. В данной статье основное внимание уделяется результатам, демонстрирующим сжимаемость трехмерных [4] и двумерных когерентных структур блинного типа, и их роли в формировании спектров развитой ($Re \gg 1$) турбулентности колмогоровского типа. В нашей предыдущей статье [1] (см. также [4, 8]) по изучению структур повышенной завихренности блинного типа в трехмерной геометрии численно было установлено, что их эволюция имеет скейлинговый характер и с высокой точностью описывается с помощью найденных нами точных решений трехмерных уравнений Эйлера [9]. Скейлинг между максимальной завихренностью блина и его толщиной l ,

$$\omega_{\max} \sim l^{-2/3}, \quad (2)$$

впервые был найден на основе прямого численного интегрирования трехмерных уравнений Эйлера в работе [4], а затем проверен для более чем 30 начальных условий [8]. Это дало основание утверждать, что данный скейлинг, как соотношение колмогоровского типа, универсален. В численных экспериментах рост завихренности и сужение структур блинного типа зависят от времени экспоненциально, без какой-либо тенденции к взрывному поведению. Следует отметить, что впервые структуры такого типа наблюдались в численных экспериментах М. Brachet с коллегами (1992) [10]. В данной статье будут приведены как аналитические, так и численные аргументы в пользу существования найденного нами скейлинга. В основе рассмотрения лежит представление вихревых линий (ПВЛ), впервые сформулированное для трехмерных уравнений Эйлера в статье [7]. В своей работе мы будем следовать формулировке, данной в публикациях [11, 12]. Смысл этого преобразования достаточно простой. Если рассмотреть уравнение для завихренности $\omega = [\nabla \times \mathbf{v}]$ — уравнение Гельмгольца, которое получается из уравнения Эйлера взятием ротора,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v} \times \omega], \quad \text{div} \mathbf{v} = 0, \quad (3)$$

то из него следует, что изменение ω возможно только за счет компоненты скорости \mathbf{v}_n , нормальной к вектору завихренности (в силу векторного произведения). Причем в ситуации общего положения дивергенция \mathbf{v}_n не равна нулю: $\text{div} \mathbf{v}_n \neq 0$, это и есть причина сжимаемости непрерывно распределенных вихревых линий (несмотря на бездивергентность завихренности). В данном случае тангенциальная компонента скорости \mathbf{v}_τ играет вспомогательную роль, обеспечивая выполнение условия несжимаемости: $\text{div} \mathbf{v} = \text{div} \mathbf{v}_\tau + \text{div} \mathbf{v}_n = 0$. С другой стороны, хорошо известно, что завихренность, подчиняющаяся уравнению (3), относится к так называемым замороженным в жидкость полям.

Свойство замороженности означает, что жидкие (лагранжевы) частицы двигаются вместе со своей вихревой линией — они к ней приклеены. Единственная остающаяся «свобода» частиц — это движение вдоль вихревой линии, которое, очевидно, не влияет на саму завихренность. Таким образом, скорость \mathbf{v}_n есть скорость вихревой линии. Это утверждение справедливо для произвольного замороженного в жидкость поля \mathbf{B} , уравнение движения которого записывается в том же виде, что и (3):

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad \text{div} \mathbf{v} = 0. \quad (4)$$

В магнитной гидродинамике \mathbf{B} представляет собой магнитное поле (при бесконечно больших магнитных числах Рейнольдса). Менее известно, что для двумерных течений идеальной жидкости ротор завихренности $B_x = \partial_y \omega$, $B_y = -\partial_x \omega$ (по-английски — di-vorticity) тоже подчиняется уравнению (4) [13] (см. также [14, 15]).

Представление вихревых линий следует, если ввести лагранжевы траектории вихревых линий как решение уравнений:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}_n(\mathbf{x}, t) \text{ при } \mathbf{x}|_{t=0} = \mathbf{a}, \quad (5)$$

которое задает сжимаемое отображение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$. Сжимаемость отображения следует непосредственно из формулы Лиувилля, примененной к этому уравнению,

$$\frac{dJ}{dt} = \text{div} \mathbf{v}_n \cdot J, \quad (6)$$

где J — якобиан отображения. В силу того, что в ситуации общего положения $\text{div} \mathbf{v}_n \neq 0$, на величину J не накладывается никаких ограничений: якобиан может принимать произвольные значения, в том числе и нулевые. Уравнение (3) в терминах этого отображения допускает интегрирование:

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \frac{(\omega_0(\mathbf{a}) \nabla_{\mathbf{a}}) \mathbf{x}}{J}, \quad (7)$$

где $\omega_0(\mathbf{a})$ — начальное значение завихренности, которое имеет смысл инвариантов Коши (см., например, [5]). Уравнения (5), (7) вместе с условием несжимаемости $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ образуют замкнутую систему представления вихревых линий.

Для уравнения (4), очевидно, справедливо аналогичное представление, в котором ω нужно поменять на \mathbf{V} .

Соотношение (7) является центральным в ПВЛ. Оно показывает, что увеличение завихренности возможно за счет уменьшения якобиана J , т. е. связано со сжимаемостью поля завихренности. Такая ситуация, как известно, впервые была понята для сжимаемой гидродинамики еще Б. Риманом при построении точного решения в виде так называемой простой волны Римана, демонстрирующей явление опрокидывания, когда одна лагранжева частица догоняет другую. В этом случае в профиле решения за конечное время возникают бесконечные производные (это так называемая градиентная катастрофа [16]). Чтобы описать это явление в трехмерном случае, нужно совершить в уравнениях газовой динамики переход от эйлера описания к лагранжеву. Опрокидывание впервые возникает в точке обращения соответствующего якобиана в нуль. Очевидно, что при приближении к точке опрокидывания необходимо учитывать диссипацию из-за вязкости, теплопроводности и т. д. Однако вдали от этой области процесс опрокидывания будет продолжаться и приводить к формированию каустик-квазидвумерных структур блинного типа (см., например, [17, 18]).

В данной работе обсуждаются два новых вопроса (по сравнению с работой [1]). Во-первых, мы покажем, используя геометрические особенности отображения ПВЛ для трехмерных уравнений Эйлера, что скейлинг (2) можно рассматривать как результат опрокидывания вихревых линий. В отличие от опрокидывания в сжимаемой газодинамике, когда все сводится к появлению градиентной катастрофы для скалярной величины — плотности, в данном случае речь идет об опрокидывании векторного бездивергентного поля — завихренности. Вторым вопросом, который мы рассмотрим в этой работе, относится к формированию спектра Крейчана для двумерной гидродинамической турбулентности — спектра прямого каскада с постоянным потоком энтропии в коротковолновую область — и роли опрокидывания векторного поля di -vorticity в этом процессе.

Перед тем как перейти к изложению основных результатов, нужно сказать несколько слов о численном моделировании в представлении вихревых линий. Вся численная схема, а также начальные условия были представлены в нашей предыдущей работе [1] (читатель там может найти все необходимые детали численных симуляций; см. также [4, 8, 9]). В этой статье мы приведем результаты численных экспериментов только для одних начальных условий, помеченных в работе [4] как I_2 .

Главным моментом в численном моделировании уравнений ПВЛ было нахождение не прямого отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$, а обратного $\mathbf{a} = (\mathbf{x}, t)$, что позволило представить уравнения ПВЛ в эйлеровых переменных \mathbf{x} и t . Особенно эффективно это сработало при обращении оператора ротора. Подчеркнем, что всюду использовались периодические граничные условия по всем трем координатам.

2. Особенности ПВЛ и автомодельный закон 2/3

В данном разделе рассматриваются особенности ПВЛ и его геометрические характеристики с опорой на точное решение уравнений Эйлера [9]. Это решение, как ранее отмечалось, хорошо согласуется с результатами численного моделирования вихревых структур блинного типа.

Пусть ω_{\max} — максимальное по пространству значение модуля завихренности, которое является функцией времени t . Очевидно, что в максимальной точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\max}(t)$ градиент завихренности равен нулю, $\nabla\omega = 0$. Представляя $\omega = \omega\boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор ($\boldsymbol{\tau}^2 = 1$), из (3) легко получить уравнение для ω_{\max} :

$$\omega_{\max}^{-1} \frac{d\omega_{\max}}{dt} = \tau_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tau_j. \quad (8)$$

Здесь производная $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ берется в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\max}(t)$. В том случае когда поле завихренности симметрично относительно этой точки, выражение, стоящее в правой части равенства, может быть записано как

$$\tau_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tau_j = \operatorname{div} \mathbf{v}_{\boldsymbol{\tau}}. \quad (9)$$

Рассмотрим теперь уравнение (6). В нем производная d/dt берется при постоянном значении \mathbf{a} . Поэтому в переменных \mathbf{x} и t (т. е. эйлеровых переменных) это уравнение запишется как

$$\frac{\partial J}{\partial t} + (\mathbf{v}_n \nabla) J = \operatorname{div} \mathbf{v}_n \cdot J = -\operatorname{div} \mathbf{v}_{\boldsymbol{\tau}} \cdot J.$$

Отсюда видно, что в минимальной точке якобиана $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\min}(t)$ имеем

$$\frac{dJ_{\min}}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{v}_n \cdot J_{\min}. \quad (10)$$

Если предположить, что максимальная точка завихренности совпадает с минимальной точкой якобиана, $\mathbf{x}_{\max}(t) = \mathbf{x}_{\min}(t)$, то тогда в соответствии с (8)—(10) мы приходим к соотношению

$$\omega_{\max} J_{\min} = \operatorname{const}. \quad (11)$$

Согласно численным экспериментам действительно максимальная точка завихренности близка к минимальной точке якобиана, что показано на рис. 1.

На рис. 2 представлены изменения во времени ω_{\max} и J_{\min} для всех наблюдаемых блинов. Численный эксперимент демонстрирует экспоненциальный рост максимальной завихренности для каждого из блинов и соответственно экспоненциальное уменьшение минимального якобиана, так что их произведение мало меняется со временем: $\omega_{\max} J_{\min} \approx \text{const}$.

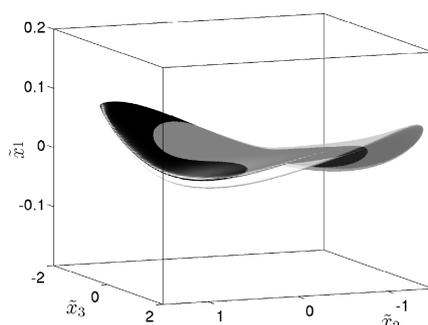


Рис. 1. Изоповерхности завихренности $|\omega| = 0,8\omega_{\max}$ (серый) и якобиана $J = 1,25J_{\min}$ (черный) при $t = 7,5$; симуляция ПВЛ

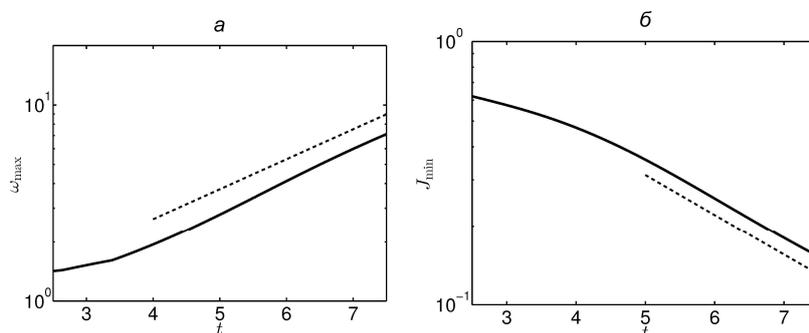


Рис. 2. Эволюция глобального максимума завихренности (а) и минимума якобиана J_{\min} , ближайшего к глобальному максимуму завихренности (б) (логарифмическая вертикальная шкала). Пунктирная линия показывает скейлинг $\propto e^{\beta_2 t}$ (а) и $\propto e^{-\beta_2 t}$ (б) с $\beta_2 = 0,35$

Соотношение (11), таким образом, показывает, что рост завихренности в блине обусловлен уменьшением якобиана. При этом числитель слабо изменяется — особенно на больших временах, когда отчетливо наблюдается экспоненциальный рост. Объяснение последнего связано, как будет

показано ниже, со структурой точного решения [9] трехмерного уравнения Эйлера, которое с хорошей точностью моделирует эволюцию блина на экспоненциальной стадии его роста.

Точное решение в декартовой системе $\mathbf{x} = x_1\mathbf{n}_1 + x_2\mathbf{n}_2 + x_3\mathbf{n}_3$ для завихренности, зависящей только от x_1 и имеющей только одну компоненту, параллельную оси \mathbf{n}_2 , имеет вид

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\omega_{\max}(t)l_1(t)f\left(\frac{x_1}{l_1(t)}\right)\mathbf{n}_3 + \begin{pmatrix} -\beta_1x_1 \\ \beta_2x_2 \\ \beta_3x_3 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \omega_{\max}(t)f'\left(\frac{x_1}{l_1(t)}\right)\mathbf{n}_2, \quad (13)$$

где β_1 , β_2 и β_3 — произвольные константы, между которыми имеется соотношение $-\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$. Здесь $\omega_{\max}(t) = w_0e^{\beta_2t}$, $l_1(t) = h_0e^{-\beta_1t}$ — зависимости от времени максимума завихренности и толщины блина, w_0 и h_0 — положительные (начальные) значения, $f(\xi)$ — произвольная функция с $|\max f'(\xi)| = 1$.

Скорость в этом решении представляет собой суперпозицию сдвигового течения и асимметричного потенциального растягивающего течения $(-\beta_1x_1, \beta_2x_2, \beta_3x_3)$.

Для данного точного решения легко строится представление вихревых линий:

$$x_1 = a_1e^{-\beta_1t}, \quad x_2 = a_2, \quad x_3 = a_3e^{\beta_3t} - w_0h_0f\left(\frac{a_1}{h_0}\right)\frac{\sinh(\beta_3t)}{\beta_3}, \quad (14)$$

с матрицей Якоби вида

$$\hat{J}(\mathbf{a}, t) = \begin{pmatrix} e^{-\beta_1t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -w_0f'\left(\frac{a_1}{h_0}\right)\frac{\sinh(\beta_3t)}{\beta_3} & 0 & e^{\beta_3t} \end{pmatrix}, \quad J(\mathbf{a}, t) = \det \hat{J} = e^{(\beta_3 - \beta_1)t} = e^{-\beta_2t}. \quad (15)$$

Отсюда следует, что максимальная завихренность обратно пропорциональна якобиану: $\omega_{\max} \sim J^{-1}$ — в полном соответствии с нашим предыдущим заключением. Правда, для этого решения якобиан J не зависит от координат. Координатная зависимость возникает в численном эксперименте из-за трехмерности структуры (см. рис. 1). При движении вдоль поверхности блина численное решение уравнений локально (вплоть до расстояний

порядка десяти толщин) хорошо согласуется с точным решением (12), (13). Другим важным обстоятельством ПВЛ для (12), (13) является то, что одно собственное значение — первое — матрицы Якоби экспоненциально убывает со временем, второе равно единице, а третье экспоненциально растет. При этом якобиан уменьшается экспоненциально, обратно пропорционально ω_{\max} , а завихренность направлена вдоль второй оси, соответствующей второму собственному значению. Это свойство, как видно в численном эксперименте, сохраняется в полной мере и соответствует тому, что числитель в выражении (7), как отмечалось ранее, благодаря (6) практически не изменяется по величине в максимальной точке завихренности.

2.1. Сингулярные собственные значения

Матрица Якоби для точного решения содержит один недиагональный элемент J_{13} , растущий со временем экспоненциально ($\sim e^{\beta_3 t}$). Второе очень важное обстоятельство, следующее отсюда: собственные значения матрицы Якоби не представляют собой относительные растяжения ввиду недиагональности самой матрицы. Для того чтобы ввести правильно относительные растяжения, нужно обратиться к задаче на сингулярные собственные значения для матрицы $\hat{J} = [\partial x_i / \partial a_j]$ в точке J_{\min} . Эта задача сводится к нахождению двух матриц поворота \mathbf{U} и \mathbf{V} и диагональной $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, содержащей неотрицательные элементы $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$, называемые сингулярными собственными значениями. При этом матрица Якоби представима в виде $\hat{J} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$, где T означает транспонирование. Матрицы вращения \mathbf{U} и \mathbf{V} строятся из собственных векторов для двух симметричных матриц $\hat{J}\hat{J}^T$ и $\hat{J}^T\hat{J}$ соответственно, в то время как собственные значения (совпадающие) этих матриц суть квадраты сингулярных собственных значений σ_i . Отметим, что $\mathbf{G}^{(a)} = \hat{J}^T\hat{J}$ есть метрический тензор в \mathbf{a} -пространстве,

$$G_{\alpha\beta}^{(a)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial a_\alpha} & \frac{\partial x_i}{\partial a_\beta} \end{bmatrix}, \quad d\mathbf{x}^2 = G_{\alpha\beta}^{(a)} da_\alpha da_\beta, \quad (16)$$

в то время как $\mathbf{G}^{(x)} = [\hat{J}\hat{J}^T]^{-1}$ есть метрический тензор в \mathbf{x} -пространстве,

$$G_{ij}^{(x)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} & \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_j} \end{bmatrix}, \quad d\mathbf{a}^2 = G_{ij}^{(x)} dx_i dx_j. \quad (17)$$

Для точного решения матрица Якоби имеет следующие сингулярные собственные значения:

$$\sigma_1^2 = g - \sqrt{g^2 - e^{-2\beta_2 t}}, \quad \sigma_2^2 = 1, \quad \sigma_3^2 = g + \sqrt{g^2 - e^{-2\beta_2 t}}, \quad (18)$$

где

$$g = \frac{1}{2} \left(e^{-2\beta_1 t} + e^{2\beta_3 t} + \left[w_0 f' \left(\frac{a_1}{h_0} \right) \frac{\sinh(\beta_3 t)}{\beta_3} \right]^2 \right). \quad (19)$$

При $t \rightarrow \infty$

$$\sigma_1 \propto e^{-\beta_1 t}, \quad \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 \propto e^{\beta_3 t}, \quad (20)$$

что согласуется с численными результатами.

Таким образом, вблизи минимума якобиана вдоль первого направления имеется сильное сжатие: $\sigma_1 \propto e^{-\beta_1 t} \propto l_1$, в результате которого все лагранжевы маркеры при $t \rightarrow \infty$ должны схлопнуться в точку; в третьем направлении возникает сильное растяжение: $\sigma_3 \propto e^{\beta_3 t} \propto \omega_{\max}^{-1} l_1^{-1}$; в промежуточном направлении σ_2 близко к единице и со временем изменяется незначительно.

В этом пределе для точного решения матрицы поворота $\mathbf{U} = \{\mathbf{n}_1^{(x)}, \mathbf{n}_2^{(x)}, \mathbf{n}_3^{(x)}\}$ и $\mathbf{V} = \{\mathbf{n}_1^{(a)}, \mathbf{n}_2^{(a)}, \mathbf{n}_3^{(a)}\}$ в \mathbf{x} - и \mathbf{a} -пространствах имеют вид

$$\mathbf{U} \simeq \mathbf{1}, \quad \mathbf{V} \simeq \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} & 0 & \frac{q}{\sqrt{1+q^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-q}{\sqrt{1+q^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где

$$q = -\frac{\Omega_0}{2\beta_3} f' \left(\frac{a_1}{h_0} \right).$$

При больших временах, как показывает численный эксперимент, матрица \mathbf{U} близка к единичной (см. далее рис. 3, б), а матрица \mathbf{V} — к антидиагональной с элементами $V_{13} \approx V_{22} \approx -V_{31} \approx 1$ (см. рис. 3, в). Таким образом, q в (21) можно считать большой величиной.

2.2. Скейлинг 2/3

Обратимся теперь к вопросу, откуда возникает скейлинг (2) между максимальной завихренностью и толщиной блина. Как уже отмечалось, численное решение хорошо аппроксимируется точным решением. Поэтому для нахождения скейлинга точное решение будет рассматриваться как нулевое приближение. Прежде всего это касается перехода от лагранжевых переменных к эйлеровым переменным в (7).

Напомним, что толщину структуры мы ввели, исходя из разложения ω в окрестности максимальной точки ω_{\max} :

$$|\omega| = \omega_{\max} - \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^{(\omega)} \tilde{x}_i \tilde{x}_j, \quad (22)$$

где $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\max}$. В этом случае собственные значения λ_n матрицы вторых производных $\Gamma_{ij}^{(\omega)} = -\partial_i \partial_j |\omega|$, вычисленных в локальном максимуме завихренности, будут определять размеры структуры в трех ортогональных направлениях: $l_n = \sqrt{2\omega_{\max} / |\lambda_n|}$. Максимальное собственное значение $|\lambda_1|$ задает толщину блина, а собственный вектор, соответствующий этому собственному значению, — направление нормали к структуре типа блина. В собственных осях $\Gamma_{ij}^{(\omega)}$ разложение (22) записывается в виде

$$|\omega| = \omega_{\max} \left(1 - \sum_{n=1,2,3} \frac{\tilde{x}_n^2}{l_n^2} \right).$$

Поскольку между областями максимальной завихренности и минимального якобиана имеется соответствие (см. рис. 1), можно считать, что в области J_{\min} разложение J будет повторять (с точностью до знака и нормировки) разложение для $|\omega|$:

$$J = J_{\min} + \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^{(x)} \tilde{x}_i \tilde{x}_j, \quad (23)$$

откуда в главных осях матрицы $\Gamma_{ij}^{(x)}$

$$J = J_{\min} \left(1 + \sum_{n=1,2,3} \frac{\tilde{x}_n^2}{l_n^2} \right),$$

где собственное значение $\lambda_n^{(J)} \approx 2J_{\min} / l_n^2$.

Численный эксперимент показывает, что толщина блина l_1 экспоненциально уменьшается, а два других размера практически не меняются:

$$l_1 \propto e^{-\beta_1 t}, \quad l_2 \propto 1, \quad l_3 \propto 1. \quad (24)$$

При этом отношение $\beta_2/\beta_1 \approx 0,64$, т. е. вихревая структура эволюционирует согласно закону 2/3 (2).

В лагранжевых переменных $\tilde{\mathbf{a}}$ (всюду далее мы опускаем знак тильда) разложение J записывается в виде

$$J = J_{\min} + \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^{(a)} a_i a_j, \quad (25)$$

где $\Gamma_{ij}^{(a)} = \partial^2 J / \partial a_i \partial a_j$ — положительно определенная матрица.

Данное разложение предполагает близость к точке $\mathbf{x} = 0$, поэтому переход от переменных \mathbf{x} к переменным \mathbf{a} в (23) может быть приближенно записан в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T \mathbf{a}.$$

В результате подстановки этого выражения в (23) находим, как матрица $\Gamma^{(a)}$ выражается через $\Gamma^{(x)}$:

$$\Gamma^{(a)} = \hat{\mathbf{J}}^T \Gamma^{(x)} \hat{\mathbf{J}} = \mathbf{V} \boldsymbol{\gamma} \mathbf{V}^T, \quad (26)$$

где мы выделили матрицу

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{U}^T \Gamma^{(x)} \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma}.$$

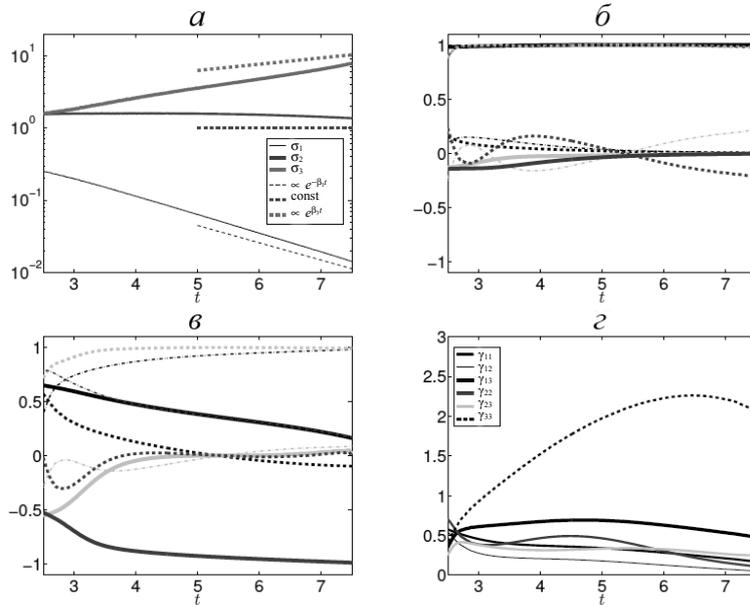


Рис. 3. Эволюция сингулярных значений σ_j , $j = 1, 2, 3$, матрицы Якоби $\hat{\mathbf{J}}$ в точке J_{\min} (а); пунктирные линии показывают соответствующие экспоненты (20). Компоненты матрицы \mathbf{U} как функции времени (б): U_{11} — сплошная черная, U_{12} — пунктирная черная, U_{13} — штрихпунктирная черная, U_{21} — сплошная светло-серая, U_{22} — пунктирная светло-серая, U_{23} — штрихпунктирная светло-серая, U_{31} — сплошная темно-серая, U_{32} — пунктирная темно-серая, U_{33} — штрихпунктирная темно-серая. То же для матрицы \mathbf{V} (в). Эволюция компонентов матрицы $\boldsymbol{\gamma}$ (г)

Эта матрица асимптотически при больших t близка к диагональной, поскольку матрица $\Gamma^{(x)}$ диагональна с элементами $\lambda_i^{(J)}$ ($i = 1, 2, 3$), а матрица \mathbf{U} стремится в этом пределе к единичной (рис. 3, б). Отсюда для диагональных элементов γ приближенно имеем

$$\gamma_{ii} \approx \sigma_i^2 \lambda_i^{(J)} = 2J_{\min} \sigma_i^2 / l_i^2.$$

Вспоминая, что $\sigma_1 \propto l_1 \propto e^{-\beta t}$, $\sigma_2 \propto l_2 \propto 1$, $l_3 \propto 1$, для γ_{ii} получаем следующую оценку:

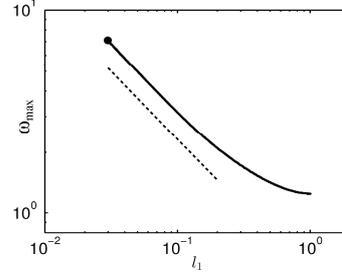
$$\gamma_{11} \propto J_{\min}, \quad \gamma_{22} \propto J_{\min}, \quad \gamma_{33} \propto J_{\min} \sigma_3^2.$$

Таким образом, два первых диагональных элемента стремятся экспоненциально к нулю и только третий диагональный элемент может быть порядка единицы, что подтверждает численный эксперимент (рис. 3, з). Более того, недиагональные элементы γ также оказываются малыми. «Выживает» лишь компонента γ_{33} , которая выражается только через ω_{\max} и толщину блина l_1 (напомним, что $\sigma_3 \propto \omega_{\max}^{-1} l_1^{-1}$):

$$\gamma_{33} \approx 2J_{\min} \sigma_3^2 / l_3^2 \propto J_{\min} \omega_{\max}^{-2} l_1^{-2} \propto \omega_{\max}^{-3} l_1^{-2}.$$

Численный эксперимент показывает (см. рис. 3, з), что компонента γ_{33} порядка единицы. Это означает, что между ω_{\max} и толщиной блина существует скейлинг $2/3$ (2).

Рис. 4. Максимальная завихренность ω_{\max} как функция l_1 в двойном логарифмическом масштабе. Жирная точка соответствует конечному моменту времени счета $t = 7,5$, пунктирная линия — степенному закону $\omega_{\max} \propto l_1^{-2/3}$



В заключение следует сказать, что если к матрице γ применить поворот \mathbf{V} , то согласно (26) в результате у $\Gamma^{(a)}$ самым большим элементом становится $\Gamma_{11}^{(a)}$, который совпадает с γ_{33} . Таким образом, якобиан и, соответственно, завихренность в основном зависят от координаты x_1 , влияние других координат оказывается экспоненциально слабым. Это еще раз подчеркивает, что данная структура квазиодномерная, однако образование скейлинга (2) есть явление сугубо трехмерное, которое возникает из-за сжимаемости непрерывно распределенных вихревых линий.

3. 2D-турбулентность: от опрокидывания к спектру Крейчнана

В 1967 году Р. Крейчнаном [21] было показано, что в развитой двумерной гидродинамической турбулентности существуют в инерционном интервале масштабов два колмогоровских спектра, порождаемых двумя интегралами движения — энергией $E = 1/2 \int (\mathbf{v})^2 d\mathbf{r}$ и энстрофией $1/2 \int \Omega^2 d\mathbf{r}$. Пер-

вый спектр соответствует постоянному потоку энергии ϵ , направленному в область малых волновых чисел (обратный каскад); этот спектр имеет ту же самую зависимость от k , что и колмогоровский спектр (1) для трехмерной гидродинамической турбулентности. Второй спектр — спектр Крейчнана [21],

$$E(k) \sim \eta^{2/3} k^{-3}, \quad (27)$$

соответствует постоянному потоку энтропии η в область малых масштабов (прямой каскад). Существование этих двух спектров было подтверждено во многих численных экспериментах, моделирующих двумерную турбулентность при больших числах Рейнольдса (см., например, обзор [22] и ссылки в нем). Вместе с тем сразу после работы [21] в первых численных экспериментах [23] наблюдалось появление резких градиентов завихренности, соответствующих формированию скачков (квазишоков) с толщинами малыми по сравнению с их длиной. Основываясь на этих численных наблюдениях, П. Саффман [24] предложил другой спектр $E(k) \sim k^{-4}$, главный вклад в который вносят изотропно распределенные квазишоки (в этом смысле спектр Саффмана аналогичен спектру Кадомцева — Петвиашвили [25] для звуковой турбулентности). С другой стороны, вычисление фурье-образа от скачка завихренности $\Omega_k \propto k^{-1}$ немедленно приводит к спектру крейчнановского типа $E(k) \sim k^{-3}$. Распределение от скачка, однако, сильно анизотропно: имеет вид джета с малым угловым раствором порядка $(kL)^{-1}$, где L — характерная длина квазишока. Подчеркнем, что для изотропных распределений скачков завихренности мы должны прийти к спектру Саффмана. В этом смысле *спектры с крейчнановским поведением, порождаемые квазисингулярностями, обязаны быть анизотропными*. Именно об этом свидетельствуют как аналитические аргументы, так и численные эксперименты в случае вырождающейся двумерной турбулентности [15, 19, 26], когда в спектрах турбулентности анизотропия обусловлена присутствием джетов (в качестве иллюстрации см. рис. 5, а и 6, а). В этих работах был выявлен физический механизм формирования квазишоков благодаря тенденции к опрокидыванию (отметим, что такой процесс не происходит за конечное время в соответствии со строгими теоремами [27—29]). Этот механизм, как отмечалось выше, связан со свойством вмороженности в жидкость векторного поля ротора завихренности $\mathbf{V} = \text{rot } \omega$, что позволяет выразить \mathbf{V} в представлении, аналогичном ПВЛ (7):

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{(\mathbf{B}_0(\mathbf{a}) \cdot \nabla_a) \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)}{J},$$

где $\mathbf{B}_0(\mathbf{a})$ — начальное значение поля \mathbf{B} , а J — якобиан преобразования $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$, уравнение для которого имеет тот же вид, что и (5), а \mathbf{v}_n в этом случае есть нормальная компонента по отношению к полю \mathbf{V} . Как и в предыдущем случае, якобиан J может принимать произвольные значения.

Следует отметить, что в двумерной гидродинамике существует только тенденция к образованию резких градиентов завихренности в виде квазишоков, что было подтверждено в численных экспериментах для вырождающейся (свободной) турбулентности [15, 19]. В частности, рост максимума величины B в этих экспериментах составлял два — два с половиной порядка, а пространственное распределение $|B|$ концентрировалось в окрестности линий (положений квазишоков), между которыми величины $|B|$ были значительно ниже. Каждому такому квазишоку соответствовал в спектре энергий свой джет. Вдоль каждого джета распределение энергии падало по крейчнановскому закону $E \sim k^{-3}$. Первые результаты наших численных экспериментов по двумерной турбулентности прямого каскада, т. е. при наличии накачки и затухания, описывались в работе [30]. Накачка, задаваемая инкрементом $\Gamma(k)$, была сосредоточена в области малых k с сильным (сингулярным при $k = 0$) затуханием, обеспечивающим подавление обратного каскада. При больших волновых числах в области $k = k_0 \sim 2/3 k_{\max}$ вводилось затухание вязкого типа, которое позволяло одновременно решить проблему алиазинга. На малых временах развитие турбулентности в инерционном интервале соответствовало картине вырождающейся турбулентности с формированием квазишоков и, соответственно, джетов в спектре турбулентности.

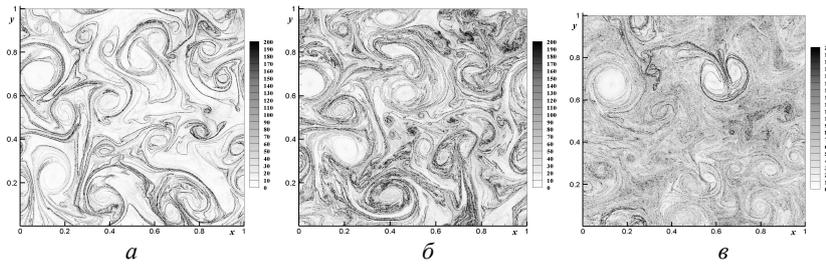


Рис. 5. Распределение модуля $|B|$ при $t = 150; 250; 450$

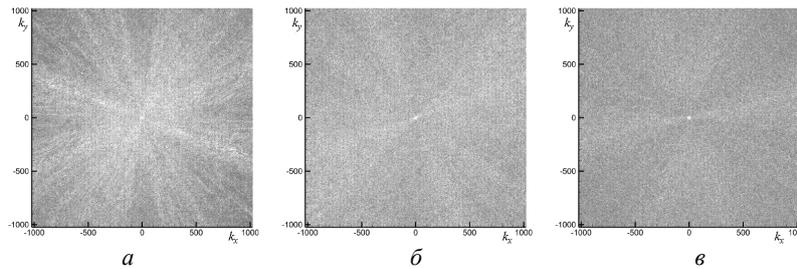


Рис. 6. Распределение плотности энергии флуктуаций $\epsilon(\mathbf{k})$, нормированной на k^4 , при $t = 150; 250; 450$

В этих экспериментах на начальном этапе происходило формирование крэйчнановской зависимости спектра от k ($E \sim k^{-3}$) при всех углах, а также зависимости продольной структурной функции скорости третьего порядка $S_3 = \langle \delta v_{\parallel}^3 \rangle$ от расстояния между точками R с сильной анизотропией, характерной для вырождающейся турбулентности. При этом усредненный по углам спектр $E(k) = C_K \eta^{2/3} k^{-3}$, где $C_K \simeq 1,3$ — константа Крейчнана, совпадал со спектром, полученным ранее численно (см. [22]). Важно подчеркнуть, что для структурной функции S_3 усреднение по углам давало ответ, сильно отличающийся от изотропного значения. Анализ результатов свидетельствовал в пользу того, что причина кроется в недостаточном пространственно-временном разрешении. В связи с этим пространственное разрешение было увеличено до 16384×16384 точек (наши первые эксперименты проводились на сетке 4096×4096 точек), причем время счета выросло примерно вдвое по сравнению с лучшими экспериментами [30].

Основное отличие полученных результатов состоит в том, что на временах порядка $10\Gamma_{\max}^{-1}$ (Γ_{\max}^{-1} — характерное время накачки, обратно пропорциональное максимальному инкременту) в прямом каскаде происходит разрушение джетовой структуры спектров и турбулентность стремится к изотропной. В частности, на этих временах не наблюдается какой-либо заметной анизотропии угловых флуктуаций спектра энергии (при фиксированном k). В режиме изотропного распределения нами найдена функция распределения вероятности P как для завихренности, так и для модуля divorticity B . Структура $P(\omega)$ соответствует предсказаниям изотропной теории [20].

3.1. Основные уравнения и численная схема

Кратко остановимся на уравнениях движения и численной схеме, которые полностью совпадают с [30]. Численное моделирование прямого каскада для двумерной гидродинамической турбулентности осуществлялось в рамках уравнения для завихренности ω с периодическими граничными условиями в квадратном ящике с размером $L = 1$:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \omega = \hat{\Gamma} \omega + \hat{\gamma} \omega. \quad (28)$$

Оператор $\hat{\Gamma}$ описывает накачку, а также диссипацию на больших масштабах, чтобы исключить обратный каскад, а оператор $\hat{\gamma}$ ответствен за диссипацию энтрофии при больших k . Оба эти оператора задавались через их фурье-образы (см. [30]):

$$\Gamma_k = A \frac{(b^2 - k^2)(k^2 - a^2)}{k^2} \text{ при } 0 \leq k \leq b, \quad \Gamma_k = 0 \text{ при } k > b$$

и

$$\gamma_k = 0 \text{ при } k \leq k_c, \quad \gamma_k = -\nu(k - k_c)^2 \text{ при } k > k_c.$$

При численном интегрировании уравнения (28) параметры a и b выбирались из условия наиболее быстрого выхода системы на стационарный режим в области малых k . Ниже приведены результаты интегрирования с $A = 0,004$, $a = 3$ и $b = 6$. Для затухания вязкого типа, обеспечивающего поглощение энтропии (коэффициент вязкости $\nu = 1,5$), k_c составляло $0,6k_{\max}$ с $k_{\max} = 8192$, что одновременно решало проблему алиазинга. Начальные условия были теми же самыми, что и в наших предыдущих работах [19, 30]. Если численные эксперименты [30] проводились на сетке с максимальным разрешением 8192×8192 , то в данной работе мы представляем результаты численных экспериментов на сетке 16384×16384 . Вычисления проводились на GPU-кластере в вычислительном центре Новосибирского государственного университета.

3.2. Результаты численных экспериментов

На начальном этапе для времен порядка обратного инкремента накачки Γ_{\max}^{-1} развитие турбулентности идет примерно по тому же сценарию, что и в случае вырождающейся турбулентности [19]: формируются квазингулярные распределения ротора завихренности, которым в k -пространстве соответствуют джеты, что приводит к сильной анизотропии турбулентности. На рис. 5, a показано типичное распределение модуля $|B|$, которое максимально сосредоточено на линиях (положениях квазишоков). Между этими линиями $|B|$ значительно ниже. Соответственно, в спектре наблюдаются джеты (с малым или большим перекрытиями), как результат спектр турбулентности имеет большую анизотропную составляющую.

На рис. 6, a представлено распределение в k -пространстве плотности энергии флуктуаций $\epsilon(\mathbf{k})$, нормированной на k^{-4} . На каждом луче в инерционном интервале величина $\epsilon(\mathbf{k})k^{-4}$ в заданный момент времени сильно флуктуирует, а после усреднения в интервале $(k - \Delta k/2, k + \Delta k/2)$ практически постоянна (см. рис. 3 работы [31]). Важно, что формирование крайчановской зависимости от модуля k происходит на самой первой стадии развития прямого каскада, когда перекачка энтропии достигает «вязкой» области. По нашим оценкам, время этой стадии одного порядка с обратным инкрементом Γ_{\max}^{-1} (для представленных в данном разделе численных результатов время было порядка 50). На этой стадии спектр энергий существенно зависит от угла. Удивительно, что после усреднения по углам спектр $E(k)$, имея крайчановские зависимости от k и потока энтропии η ,

определяемого как $1/2 \int \gamma(k) |\Omega_k|^2 d\mathbf{k}$, дает значение для константы Крейчана $C_K \approx 1,3$ (см. [31]), совпадающее с полученным ранее в численных экспериментах (см. [22]).

На следующей стадии линии квазишоков становятся более запутанными (турбулентными) (см. рис. 5, б), расстояние между ними сокращается и, как результат, анизотропия в спектре уменьшается (рис. 6, б). Наконец, на временах порядка $10\Gamma_{\max}^{-1}$ джеты практически исчезают (рис. 5, в и 6, в) и турбулентность в прямом каскаде становится почти изотропной.

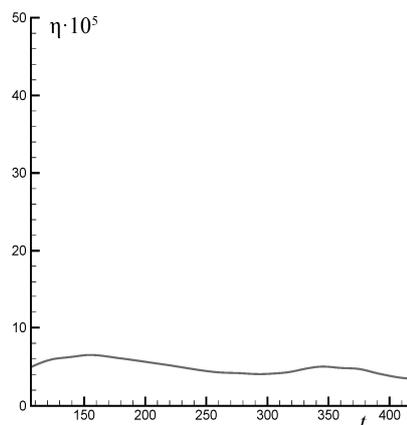


Рис. 7. Временная зависимость потока энтрофии η

Выясняется также, что на всех временах, начиная с появления джетов и кончая их исчезновением, поток энтрофии во времени почти постоянен (рис. 7). При этом полная энергия достаточно быстро — уже на первой стадии — становится постоянной, чего нельзя сказать о полной энтрофии. Эта величина приближается к постоянному значению только на стадии изотропизации.

Другим свидетельством изотропизации турбулентности на временах порядка $10\Gamma_{\max}^{-1}$ является найденная нами функция распределения вероятности завихренности P

(рис. 8), которая при больших аргументах имеет экспоненциальный хвост с показателем β , линейно зависящим от завихренности W , в соответствии с предсказанием изотропной теории [20]. Согласно этим предсказаниям, угол наклона показателя порядка $\bar{\omega}_{rms}^{-1}$, где $\bar{\omega}_{rms}$ — среднеквадратичное значение флуктуаций завихренности. Численный эксперимент (рис. 8, а) дает асимптотику $P = 0,0005 \exp(-2,3W)$ при $\bar{\omega}_{rms} = 0,43$. Если вычислять поток энтрофии как интеграл $\eta = 1/2 \int \gamma |\omega_k|^2 d\mathbf{k}$, то $\bar{\omega}_{rms} = 0,15$. Вычисление $\bar{\omega}_{rms}$ с помощью найденной функции распределения дает значение 0,2566. Таким образом, с точностью до величин порядка единицы значения $\bar{\omega}_{rms}$ оказываются близкими друг к другу.

Соответствующая функция распределения P для значения B имеет также две характерные области (рис. 8, б): в первой функция распределения близка к пуассоновской $\sim B \exp(-B^2/B_0^2)$, во второй области (при

больших значениях B) P имеет экспоненциальное поведение с более отчетливой линейной зависимостью показателя от B , чем аналогичная для завихренности. Для данного численного эксперимента B_{rms} по наклону равно 88. Если вычислять B_{rms} по функции распределения $P(B)$, то это значение равно 84,6.

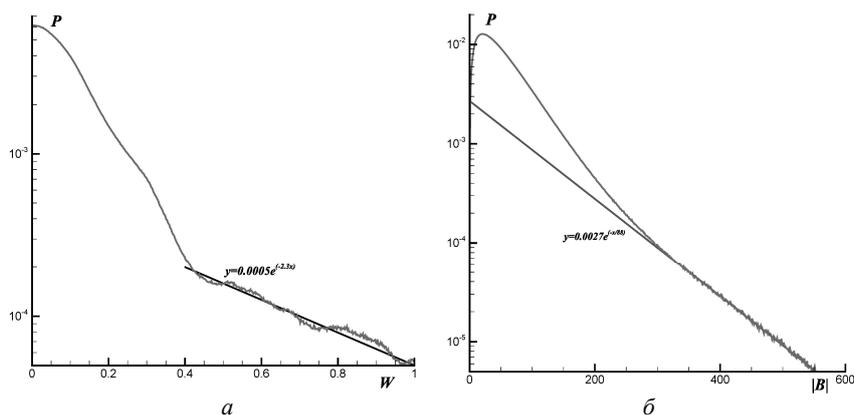


Рис. 8. Функция распределения вероятности для завихренности (а) и функция распределения вероятности для di-vorticity (б) при $t = 450$

4. Заключение

Основной вывод этой работы состоит в том, что как в трехмерной, так и в двумерной гидродинамике несжимаемой жидкости на стадии зарождения турбулентности при больших числах Рейнольдса главную роль играют когерентные вихревые структуры, эволюция которых обусловлена сжимаемостью соответствующих полей, несмотря на их бездивергентность. Для 3D-случая это структуры в виде блинов со скейлингом колмогоровского типа — соотношением между максимальной завихренностью и толщиной блина $\omega_{\max} \sim l^{-2/3}$. Сжатие этих структур имеет экспоненциальный характер и может быть интерпретировано как процесс опрокидывания, аналогичный формированию ударных волн в газодинамике благодаря сжимаемости газа. Мы показали, используя комбинированный аналитически-численный подход, основанный на представлении вихревых линий, что скейлинг для структур блинного типа возникает вследствие учета трехмерности структур. Скорость при этом демонстрирует гёлдеровское поведение, $\sim l^{1/3}$ (здесь имеется в виду непрерывность скорости по Гёлдеру, т. е. при $l \rightarrow 0$), что используется некоторыми математиками для построения теории 3D-турбулентности.

В двумерной турбулентности нами показано, что формирование прямого каскада — каскада Крейчнана с постоянным потоком энтропии — вызвано появлением квазишоков завихренности из-за сжимаемости поля ротора завихренности. Этот процесс оказывается самым быстрым, в результате чего спектр турбулентности прямого каскада приобретает практически с самого начала степенную зависимость от волнового числа k с крейчнановским показателем. Но спектр турбулентности на этом этапе становится сильно анизотропным из-за джетов — фурье-образов квазишоков. На следующем — более медленном — этапе происходит усложнение (турбулизация) структуры линий квазишоков. Расстояния между ними сокращаются, а спектр становится более изотропным. Нами показано, что в изотропном состоянии у функции распределения вероятности завихренности при больших аргументах ω происходит формирование экспоненциального хвоста с показателем, который может быть экстраполирован в виде линейной зависимости от завихренности, в соответствии с теоретическим предсказанием работы [20] для двумерной изотропной турбулентности.

Хотелось бы подчеркнуть, что в данной работе обсуждается процесс рождения и эволюции когерентных структур и только в малой степени их роль в режиме двумерной развитой турбулентности, где влияние квазишоков весьма существенно, особенно на стадии зарождения. Для трехмерной колмогоровской турбулентности вопрос пока для нас остается открытым. Нам неясно влияние структур блинного типа в этом режиме, хотя имеется яркий пример в гравитационной турбулентности — так называемые блины Зельдовича, которые описываются уравнениями гидродинамики без давления [17, 18]. В этой связи хотелось бы отметить недавнюю работу [32] по статистическому описанию развитой гидродинамической турбулентности как ансамбля вихревых филаментов, которые также встречаются в численных симуляциях турбулентности вязких жидкостей с накачкой. С другой стороны, в нашей работе [4] уже на стадии зарождения, когда основной вклад в спектр турбулентности вносят структуры блинного типа, мы наблюдали, после усреднения по углам, появление колмогоровского спектра.

В заключение авторы благодарят С. Н. Гурбатова за внимательное прочтение этой статьи и полезные замечания.

Данная работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 17-01-00622). Численные эксперименты выполнялись в Новосибирском суперкомпьютерном центре (НГУ) и дата-центре Института фундаментальной и прикладной математики (ИМРА, Рио-де-Жанейро). Д. С. Агафонцев благодарен за поддержку со стороны ИМРА во время визитов в Бразилию.

Литература

1. Агафонцев, Д. С. Опрокидывание вихревых линий как предтеча колмогоровской турбулентности / Д. С. Агафонцев, Е. А. Кузнецов, А. А. Майлыбаев // *Нелинейные волны* 2016 / отв. ред. А. М. Сергеев, А. В. Слоняев. — Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2017. — С. 304—319. — ISBN 978-5-8048-0119-0.
2. Колмогоров, А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемых вязких жидкостях при очень больших числах Рейнольдса / А. Н. Колмогоров // *ДАН СССР*. — 1941. — Т. 30. — С. 299—303.
3. Обухов, А. М. Спектральное распределение энергии в турбулентном потоке / А. М. Обухов // *ДАН СССР*. — 1941. — Т. 32. — С. 22—24.
4. Agafontsev, D. S. Development of high vorticity structures in incompressible 3D Euler equations / D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov, A. A. Mailybaev // *Phys. Fluids*. — 2015. — Vol. 27. — Art. 085102.
5. Захаров, В. Е. Гамильтоновский формализм для нелинейных волн / В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов // *УФН*. — 1997. — Т. 167. — С. 1137—1168.
6. Yakubovich, E. I. Matrix approach to Lagrangian fluid dynamics / E. I. Yakubovich, D. A. Zenkovich // *J. Fluid Mech.* — 2001. — Vol. 443. — P. 167—196.
7. Кузнецов, Е. А. Гамильтонова динамика вихревых линий в системах гидродинамического типа / Е. А. Кузнецов, В. П. Рубан // *Письма в ЖЭТФ*. — 1998. — Т. 67. — С. 1015—1020.
8. Агафонцев, Д. С. Развитие структур высокой завихренности в несжимаемых трехмерных уравнениях Эйлера: влияние начальных условий / Д. С. Агафонцев, Е. А. Кузнецов, А. А. Майлыбаев // *Письма в ЖЭТФ*. — 2016. — Т. 104. — С. 695—700.
9. Agafontsev, D. S. Asymptotic solution for high vorticity regions in incompressible 3D Euler equations / D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov, A. A. Mailybaev // *J. Fluid Mech.* — 2017. — Vol. 813. — Art. R1.
10. Brachet, M. E. Numerical evidence of smooth self-similar dynamics and possibility of subsequent collapse for three-dimensional ideal flows / M. E. Brachet, M. Meneguzzi, A. Vincent, H. Politano, and P. L. Sulem // *Phys. Fluids*. — 1992. — Vol. A4. — P. 2845—2854.
11. Кузнецов, Е. А. Представление вихревых линий для идеальных и вязких жидкостей / Е. А. Кузнецов // *Письма в ЖЭТФ*. — 2002. — Т. 76. — С. 406—410.
12. Kuznetsov, E. A. Mixed Lagrangian–Eulerian description of vortical flows for ideal and viscous fluids / E. A. Kuznetsov // *J. Fluid Mech.* — 2008. — Vol. 600. — P. 167—180.
13. Brachet, M. E. The dynamics of freely decaying two-dimensional turbulence / M. E. Brachet, M. Meneguzzi, H. Politano, P. L. Sulem // *J. Fluid Mech.* — 1988. — Vol. 194. — P. 333—349.
14. Weiss, J. The dynamics of enstrophy transfer in two-dimensional hydrodynamics / J. Weiss // *Physica D*. — 1991. — Vol. 48. — P. 273—294.
15. Kuznetsov, E. A. Effects of sharp vorticity gradients in two-dimensional hydrodynamic turbulence / E. A. Kuznetsov, V. Naulin, A. H. Nielsen, J. J. Rasmussen // *Phys. Fluids*. — 2007. — Vol. 19. — Art. 105110.
16. Арнольд, В. И. Теория катастроф / В. И. Арнольд. — М. : Знание, 1981. — 66 с.
17. Shandarin, S. F. The large-scale structure of the universe : turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium / S. F. Shandarin, Ya. B. Zeldovich // *Rev. Mod. Phys.* — 1989. — Vol. 61. — P. 185—220.

18. Гурбатов, А. Н. Крупномасштабная структура Вселенной. Приближение Зельдовича и модель слипания / А. Н. Гурбатов, Ф. И. Саичев, С. Ф. Шандарин // УФН. — 2012. — Т. 182. — С. 233—261.
19. Кудрявцев, А. Н. Статистические свойства вырождающейся двумерной гидродинамической турбулентности / А. Н. Кудрявцев, Е. А. Кузнецов, Е. В. Серещенко // Письма в ЖЭТФ. — 2013. — Т. 96. — С. 699—705.
20. Falkovich, G. Vorticity statistics in the direct cascade of two-dimensional turbulence / G. Falkovich, V. Lebedev // Phys. Rev. — 2011. — Vol. E83. — Art. 045301(R).
21. Kraichnan, R. Inertial ranges in two-dimensional turbulence / R. Kraichnan // Phys. Fluids. — 1967. — Vol. 11. — P. 1417.
22. Boffetta, G. Two-dimensional turbulence / G. Boffetta and R. E. Ecke // Ann. Rev. Fluid Mech. — 2012. — Vol. 44. — P. 427—451.
23. Lilly, D. K. Numerical simulation of developing and decaying two-dimensional turbulence / D. K. Lilly // J. Fluid Mech. — 1971. — Vol. 45. — P. 395.
24. Saffman, P. G. On the spectrum and decay of random 2D vorticity distributions at large Reynolds number / P. G. Saffman // Stud. Appl. Math. — 1971. — Vol. 50. — P. 377—382.
25. Кадомцев, Б. Б. О звуковой турбулентности / Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили // ДАН СССР. — 1973. — Т. 208. — С. 794.
26. Кузнецов, Е. А. Спектры турбулентности, порождаемые сингулярностями / Е. А. Кузнецов // Письма в ЖЭТФ. — 2004. — Т. 80. — С. 92—98.
27. Wolibner, W. Un théorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long / W. Wolibner // Math. Z. — 1933. — Vol. 37, iss. 1. — P. 698—726.
28. Kato, T. On classical solutions of the two-dimensional non-stationary Euler equation / T. Kato // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1967. — Vol. 25, iss. 3. — P. 188—200.
29. Юдович, В. И. Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости / В. И. Юдович // ЖВМ и МФ. — 1963. — Т. 3, № 6. — С. 1032—1066.
30. Kuznetsov, E. A. Anisotropic characteristics of the Kraichnan direct cascade in two-dimensional hydrodynamic turbulence / E. A. Kuznetsov, E. V. Sereshchenko // Письма в ЖЭТФ. — 2015. — Т. 102, вып. 11. — С. 870—875.
31. Кузнецов, Е. А. Изотропизация двумерной гидродинамической турбулентности в прямом каскаде / Е. А. Кузнецов, Е. В. Серещенко // Письма в ЖЭТФ. — 2017. — Т. 105, вып. 2. — С. 70—76.
32. Зыбин, К. П. Модель вытягивающихся вихрей и обоснование статистических свойств турбулентности / К. П. Зыбин, В. А. Сирота // УФН. — 2015. — Т. 185. — С. 593—612.

АСИМПТОТИКА БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ДИСЛОКАЦИЯХ

С. А. Кащенко^{1,2}, С. Д. Глызин¹, А. О. Толбей¹

¹ Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, г. Ярославль

² Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва

В статье рассматривается ставшее классическим нелинейное дифференциальное уравнение с отклонениями пространственной переменной, называемое задачей о дислокациях. Для изучения решений с начальными условиями из малой окрестности состояния равновесия построены многопараметрические семейства нелинейных систем уравнений специального вида, которые играют роль нормальных форм. В частности, приведены системы нелинейных уравнений шредингеровского типа, решениям которых отвечают быстро осциллирующие решения исходной задачи.

Введение

В работе [1] Я. И. Френкеля и Т. А. Конторовой введена в научный оборот математическая модель, описывающая поведение точечного дефекта в кристаллической структуре твердого тела. Этот дефект иногда называют дислокацией. Я. И. Френкель и Т. А. Конторова рассматривали систему вида

$$m \frac{d^2 y_j}{dt^2} = F_{j+1,j} - F_{j,j-1} - f_0 \sin\left(\frac{2\pi y_j}{a}\right), \quad j = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где y_j — координата положения равновесия j -й массы; $F_{j+1,j} = \gamma(y_{j+1} - y_j)$; f_0 , a , γ — положительные коэффициенты.

Данная модель является обобщением известной модели Ферми — Пасты — Улама (ФПУ, см. [2—9]):

$$m \frac{d^2 y_j}{dt^2} = F_{j+1,j} - F_{j,j-1}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2)$$

в которой нелинейность содержится в функции $F_{j+1,j}$, а синусоидальная нелинейность отсутствует (параметр $f_0 = 0$). В статьях [10, 11] рассматривалось взаимодействие двух волн в модели (2) при условии, что

$$F_{j+1,j} = \kappa(y_{j+1} - y_j) + \alpha(y_{j+1} - y_j)^2 + \beta(y_{j+1} - y_j)^3. \quad (3)$$

В классической задаче ФПУ имеем $\beta = 0$. Система уравнений с ненулевым коэффициентом β предложена в работе [10].

Стандартным способом анализа системы (1), как, впрочем, и (2), (3), является переход от дискретной переменной $y_j(t)$ к переменной с непре-

рывным распределением $y(t, x)$ и, соответственно, переход от систем обыкновенных дифференциальных уравнений к некоторым краевым задачам. Сначала коротко остановимся на результатах исследования динамических свойств решений краевых задач, связанных с классической системой (2), (3), поскольку при достаточно малых значениях амплитуды f_0 они относятся и к системе (1), (3). При исследовании их локальной динамики может реализоваться критический случай бесконечной размерности, т. е. ситуация, когда в спектре устойчивости нулевого решения задачи имеется счетное число чисто мнимых собственных чисел. В этих условиях можно построить специальное нелинейное уравнение с частными производными, которое играет роль квазинормальной формы, т. е. определяет в главном поведении всех решений исходной краевой задачи с начальными условиями из достаточно малой окрестности состояния равновесия.

В зависимости от значений параметров в качестве квазинормальных форм выступают модифицированное уравнение Кортевега — де Вриза (КДВ) и уравнение Кортевега — де Вриза — Бюргерса (КДВБ).

В разделе 1 данной статьи аналитическими методами нелинейной динамики изучен вопрос о взаимодействии волн, движущихся в разных направлениях, в задаче ФПУ (см. также [11—13]). При рассмотрении так называемых регулярных решений описано влияние волн друг на друга. Показано, что это влияние является асимптотически малым и не меняет форму волн.

Раздел 2 посвящен анализу быстро осциллирующих структур в задаче о дислокациях (1), (3); построено асимптотическое представление решений в виде быстро осциллирующих бегущих волн; найдена система нормализованных уравнений, отвечающая за главные части такого представления.

1. Уравнение для регулярных решений в модели ФПУ

1.1. Постановка задачи

Перейдем к более точной постановке задачи. Пусть $y_j(t) = y(t, x_j)$ и расстояния между соседними точками x_j равны h . Считается, что значения x_j распределены на отрезке длиной $2\pi L$ и выполнено условие периодичности $y(t, x_j + 2\pi L) = y(t, x_j)$. Соотношение $x_{j+1} = x_j + \varepsilon$, где $\varepsilon = hL^{-1}$, получается после нормировки пространственной переменной $x: x \rightarrow Lx$. Основное предположение состоит в том, что параметр ε является достаточно малым: $0 < \varepsilon \ll 1$. Следующее важное ограничение заключается в том, что рассматриваются так называемые регулярные решения системы (2), (3), т. е. такие решения $y(t, x)$, которые можно раскладывать в асимптотические при $\varepsilon \rightarrow 0$ ряды:

$$y(t, x \pm \varepsilon) = y(t, x) \pm \varepsilon \frac{\partial y(t, x)}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial^2 x} \pm \dots \quad (4)$$

Подставим (4) в (2) и произведем перенормировку времени $t \rightarrow (km^{-1})^{1/2}t$. Тогда с точностью до $O(\varepsilon^6)$ получим [9] краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{12} \varepsilon^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{6!} \varepsilon^4 \frac{\partial^6 y}{\partial x^6} + \\ &+ \alpha \varepsilon \left[2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{6} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \right) \right) \right] + \\ &+ \beta \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^3 + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \left(\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

$$y(t, x + 2\pi) \equiv y(t, x). \quad (6)$$

В работах [7, 14—20] изучались регулярные решения данной краевой задачи, выведенной из модели ФПУ (2), в частности отыскивались ее точные решения. Ниже исследуется поведение решений задачи (5), (6).

1.2. Нормализация краевой задачи

Линеаризованная на нулевом решении краевая задача (5), (6) допускает разложение в формальный ряд Фурье по элементарным решениям $\xi_k \exp(ik(x+t))$ и $\eta_k \exp(ik(x-t))$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Поэтому можно говорить, что при исследовании локальной динамики задачи (5), (6) реализуется критический (в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия) случай бесконечной размерности. Отметим, что такого типа критические случаи изучались в работах [21—25]. Методика исследования базируется на предположении, что решения $y(t, x, \varepsilon)$ в (5), (6) можно представить в виде формального выражения

$$y(t, x, \tau, \varepsilon) = \varepsilon \xi(\tau, x + t, \varepsilon) + \varepsilon \eta(\tau, x - t, \varepsilon) + \varepsilon^2 y_2(t, x, \tau, \varepsilon) + \varepsilon^3 y_3(t, x, \tau, \varepsilon) + \dots, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_{-k}(\tau, \varepsilon) &= \bar{\xi}_k(\tau, \varepsilon), & \eta_{-k}(\tau, \varepsilon) &= \bar{\eta}_k(\tau, \varepsilon), \\ \xi(\tau, z, \varepsilon) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \exp(ikz), & \eta(\tau, z, \varepsilon) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k \exp(ikz), \end{aligned}$$

$\tau = \varepsilon^2 t$ — «медленное» время, $\xi_k(\tau, \varepsilon)$ и $\eta_k(\tau, \varepsilon)$ — неизвестные, регулярно зависящие от ε амплитуды, а функции $y_j(t, x, \tau, \varepsilon)$ — 2π -периодичны по первым двум аргументам и тоже регулярно зависят от ε . Переход от исходного уравнения (5) к системе уравнений для определения амплитуд ξ_k и η_k будем называть нормализацией. Функции $\xi(\tau, x + t, \varepsilon)$ и $\eta(\tau, x - t, \varepsilon)$, являющиеся главными членами разложения (7), представляют собой вол-

ны, движущиеся в противоположных направлениях, их отыскание — основная задача данного подраздела.

Подставим (7) в (5). Для определения функции $U = \varepsilon y_2(t, x, \tau, \varepsilon) + \varepsilon^2 y_3(t, x, \tau, \varepsilon)$ получаем уравнение вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + R_1(t, x, \tau, \varepsilon) + R_2(t, x, \tau, \varepsilon), \quad (8)$$

где в функцию $R_1(t, x, \tau, \varepsilon)$ собраны все слагаемые, разложение которых в ряд Фурье производится только по системе функций $\exp(ik(x+t))$ или $\exp(ik(x-t))$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а в $R_2(t, x, \tau, \varepsilon)$ — остальные слагаемые. Отметим, что уравнение (8) разрешимо в указанном классе 2π -периодических по t и x функций при условии $R_1(t, x, \tau, \varepsilon) \equiv 0$. Функция $R_2(t, x, \tau, \varepsilon)$ имеет вид

$$R_2(t, x, \tau, \varepsilon) = 2\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + O(\varepsilon),$$

поэтому для $y_2(t, x, \tau, \varepsilon)$ приходим к уравнению вида

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right).$$

Отсюда получаем, что

$$y_2 = -\frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\xi \eta).$$

Учитывая это равенство в (8), заключаем, что условие разрешимости уравнения (8) относительно $y_2(t, x, \tau, \varepsilon)$ в указанном классе функций состоит в выполнении соотношений

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau \partial x} &= \frac{1}{12} \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + \frac{2}{6!} \varepsilon^2 \frac{\partial^6 \xi}{\partial x^6} + 2\alpha \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{\alpha \varepsilon^2}{6} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)^2 \right] + \\ &+ \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^3 + (3\beta - 2\alpha^2) M \left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau \partial x} &= \frac{1}{12} \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \frac{2}{6!} \varepsilon^2 \frac{\partial^6 \eta}{\partial x^6} + 2\alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{\alpha \varepsilon^2}{6} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)^2 \right] + \\ &+ \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^3 + (3\beta - 2\alpha^2) M \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\xi(\tau, x + 2\pi, \varepsilon) \equiv \xi(\tau, x, \varepsilon), \quad \eta(\tau, x + 2\pi, \varepsilon) \equiv \eta(\tau, x, \varepsilon). \quad (11)$$

Здесь принято обозначение $M(\varphi(x)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) dx$.

1.3. Особенности взаимодействия встречных волн

Сформулируем несколько выводов о взаимодействии волн $\xi(\tau, x + t, \varepsilon)$ и $\eta(\tau, x - t, \varepsilon)$, движущихся в разных направлениях. Во-первых, это взаимодействие происходит через слагаемые $\varepsilon^2(3\beta - 2\alpha^2)M((\partial\eta/\partial x)^2) \partial\xi/\partial x$ и $\varepsilon^2(3\beta - 2\alpha^2)M((\partial\xi/\partial x)^2) \partial\eta/\partial x$ соответственно. Во-вторых, оно относительно слабое, так как имеет порядок ε^2 . В-третьих, что самое важное, отмеченные слагаемые не влияют на форму волн, а вносят вклад только в их скоростной сдвиг. Это следует из того, что заменой $\tau \rightarrow (1 + \varepsilon^2(3\beta - 2\alpha^2)M((\partial\eta/\partial x)^2))\tau$ в (9) и заменой $\tau \rightarrow (1 + \varepsilon^2(3\beta - 2\alpha^2) \times M((\partial\xi/\partial x)^2))\tau$ в (10) соответствующие слагаемые, обеспечивающие связь уравнений (9) и (10), пропадают.

Обратим внимание на то, что чем больше среднее одной волны, тем на большую величину изменяется скорость движения другой волны. Явление, когда волны проходят друг через друга без изменений, а только с небольшим сдвигом по времени, хорошо известно в теории солитонов [26—29].

1.4. Переход к уравнениям типа Кортевега — де Вриза

В уравнениях (9) и (10) произведем еще несколько преобразований. Учтем, что $\partial^2\xi/\partial\tau^2$ и $\partial^2\eta/\partial\tau^2$ в (9) и (10) выражаются через производную по пространственной переменной от некоторого соотношения. Для регулярных решений тогда имеем равенства

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \frac{1}{24} \frac{\partial^3\xi}{\partial x^3} + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + O(\varepsilon), \quad \frac{\partial\eta}{\partial\tau} = -\frac{1}{24} \frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + O(\varepsilon).$$

Отсюда получаем, что

$$2 \frac{\partial^2\xi}{\partial\tau^2} = \frac{1}{288} \frac{\partial^6\xi}{\partial x^6} + \frac{\alpha}{24} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 \right) + \alpha \frac{\partial\xi}{\partial x} \left(\frac{1}{12} \frac{\partial^4\xi}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial\xi}{\partial x} \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \right) + O(\varepsilon),$$

$$2 \frac{\partial^2\eta}{\partial\tau^2} = \frac{1}{288} \frac{\partial^6\eta}{\partial x^6} + \frac{\alpha}{24} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 \right) + \alpha \frac{\partial\eta}{\partial x} \left(\frac{1}{12} \frac{\partial^4\eta}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial\eta}{\partial x} \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} \right) + O(\varepsilon).$$

Эти уравнения позволяют записать краевые задачи (9), (11) и (10), (11) для функций

$$u = \frac{\partial\xi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\eta}{\partial x} \quad (12)$$

в следующей форме:

$$\begin{aligned}
2 \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{1}{12} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\varepsilon^2}{960} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \\
&+ \frac{\varepsilon^2 \alpha}{6} \frac{\partial}{\partial x} \left[u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] + \varepsilon^2 \left[-\frac{\alpha}{48} \frac{\partial^3 (u^2)}{\partial x^3} - \frac{\alpha}{24} u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \alpha^2 u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\
&\left. + \frac{\partial}{\partial x} (\beta u^3 + (3\beta - 2\alpha^2) M(v^2) u) \right], \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \frac{1}{12} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\varepsilon^2}{960} \frac{\partial^5 v}{\partial x^5} + 2\alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \\
&+ \frac{\varepsilon^2 \alpha}{6} \frac{\partial}{\partial x} \left[v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + \varepsilon^2 \left[-\frac{\alpha}{48} \frac{\partial^3 (v^2)}{\partial x^3} - \frac{\alpha}{24} v \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \alpha^2 v^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \right. \\
&\left. + \frac{\partial}{\partial x} (\beta v^3 + (3\beta - 2\alpha^2) M(u^2) v) \right], \quad (14)
\end{aligned}$$

$$u(\tau, x + 2\pi, \varepsilon) \equiv u(\tau, x, \varepsilon), \quad v(\tau, x + 2\pi, \varepsilon) \equiv v(\tau, x, \varepsilon). \quad (15)$$

Важно подчеркнуть, что можно вычислить явные значения выражений $M(u^2)$ и $M(v^2)$ с точностью до $O(\varepsilon)$ через начальные условия решений исходной краевой задачи (5) и (6). Пусть $y(0, x) = a(x)$, $\frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=0} = b(x)$, где $a(x)$ и $b(x)$ — некоторые (гладкие) 2π -периодические функции. Тогда

$$M(u^2) = \frac{1}{4} M \left(\left(b(x) + \frac{da}{ax} \right)^2 \right), \quad M(v^2) = \frac{1}{4} M \left(\left(b(x) - \frac{da}{ax} \right)^2 \right).$$

Из (12) следует, что для функций u и v можно выписать условия

$$M(u) = 0, \quad M(v) = 0. \quad (16)$$

Отметим еще, что нулевым приближением краевых задач (13), (15), (16) и (14), (15), (16) является уравнение КДВ

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \alpha w \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w(\tau, x + 2\pi) \equiv w(\tau, x). \quad (17)$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. Пусть $u(\tau, x)$ и $v(\tau, x)$ являются ограниченными при $\tau \rightarrow \infty$ вместе с производными по x до 5-го порядка включительно решениями краевой задачи (13)—(16). Тогда краевая задача (5), (6) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^4)$ решение $y(t, x, \varepsilon)$, для которого $y(t, x, \varepsilon) = \varepsilon(\xi(\tau, x + t) + \eta(\tau, x - t)) + \varepsilon^2 y_2(t, x, \tau, \varepsilon) + \varepsilon^3 y_3(t, x, \tau, \varepsilon)$, где $\tau = \varepsilon^2 t$ и выполнены соотношения (12).

Модифицированное уравнение КДВ, близкое к задаче (13), (15), (16), и (14), (15), (16), и уравнение КДВБ изучались многими авторами [30—34]. Исследовались вопросы интегрируемости, построения (при определенных значениях коэффициентов) точных решений [34—37]. Здесь использовалась

методика работ [21—25, 38, 39], в которых создан метод исследования локальной динамики для бесконечномерных критических случаев.

Таким образом, в данном разделе рассмотрены специальные уравнения с частными производными, описывающие асимптотическое поведение так называемых регулярных решений в непрерывной модели ФПУ. При этом использовались и развивались методы локального — в окрестности состояния равновесия — анализа динамики решений. В основе этих методов лежит известный формализм метода нормализации.

Подводя итог, отметим, что в разделе изучен вопрос о взаимодействии волн, движущихся в различных направлениях. Показано, что, во-первых, это взаимодействие относительно слабое, так как описывается слагаемыми порядка ε^2 . Во-вторых, взаимодействие приводит лишь к сдвигу фазовой скорости. Величина соответствующего сдвига явно определяется некоторыми интегральными характеристиками начальных условий.

2. Быстро осциллирующие структуры в задаче о дислокациях

2.1. Построение модельной краевой задачи

В данном разделе рассмотрим быстро осциллирующие решения (см. также [13]), возникающие в модели (1), (3).

Пусть в системе (1), как и в задаче ФПУ (2) $y_j(t) = y(t, x_j)$ и расстояния между соседними точками x_j равны h . Считается, что значения x_j распределены на отрезке длиной $2\pi L$ и выполнено условие периодичности $y(t, x_j + 2\pi L) = y(t, x_j)$. Соотношение $x_{j+1} = x_j + \varepsilon$, где $\varepsilon = hL^{-1}$, получается после нормировки пространственной переменной $x: x \rightarrow Lx$. Далее, нормируя время $t \rightarrow (\kappa m^{-1})^{1/2}t$, выписываем краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_i}{dt^2} = & y(t, x + \varepsilon) - 2y(t, x) + y(t, x - \varepsilon) + \\ & + \alpha(y^2(t, x + \varepsilon) - 2y(t, x + \varepsilon)y(t, x) + 2y(t, x)y(t, x - \varepsilon) - \\ & - y^2(t, x - \varepsilon)) + \beta \left((y(t, x + \varepsilon) - y(t, x))^3 - \right. \\ & \left. - (y(t, x) - y(t, x - \varepsilon))^3 \right) + ay(t, x) + by^3(t, x), \end{aligned} \quad (18)$$

$$y(t, x + 2\pi) \equiv y(t, x). \quad (19)$$

Отметим, что вместо функции $\sin y$ в правой части (18) выбрано более общее выражение $ay(t, x) + by^3(t, x)$, причем предполагается, что $a = -a_0 + \varepsilon^2 a_1$, $a_0 \geq 0$. Характеристическое уравнение для линеаризованной на нулевом решении краевой задачи

$$\begin{aligned} \ddot{y} + a_0 y(t, x) = & y(t, x + \varepsilon) - 2y(t, x) + y(t, x - \varepsilon), \\ y(t, x + 2\pi) \equiv & y(t, x), \end{aligned} \quad (20)$$

имеет вид

$$\lambda^2 + a_0 = -4 \sin^2(\varepsilon k/2), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (21)$$

2.2. Построение быстро осциллирующих решений задачи о дислокациях. Основной результат

Рассмотрим вопрос о нерегулярных решениях (18), (19), формирующихся на асимптотически высоких (при $\varepsilon \rightarrow 0$) модах. Зафиксируем произвольно параметр $\delta \neq \pi n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) и будем исследовать решения (18), (19), формирующиеся на модах с номерами

$$k = \pm(2\delta\varepsilon^{-1} + \theta + m). \quad (22)$$

Обозначим

$$\gamma^2(\delta, a_0) = 4 \sin^2(\delta) + a_0,$$

тогда из характеристического уравнения (21) получаем

$$\lambda_m = \pm i \left[\gamma \left(1 + \frac{\sin(2\delta) \varepsilon(\theta + m)}{\gamma^2} \right) + O(\varepsilon^2) \right].$$

В формуле (22) $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 1)$ дополняет слагаемое $2\delta\varepsilon^{-1}$ до целого, а $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. При таких номерах k для корней характеристического уравнения (21) $\lambda = \lambda_m$ имеем представление

$$\lambda_m = \pm i \left[\gamma(\delta) \left(1 + \frac{\varepsilon(\theta + m) \sin(2\delta)}{2\gamma^2(\delta)} \right) + O(\varepsilon^2) \right]. \quad (23)$$

Введем в рассмотрение формальный ряд

$$y(\tau, t, x, \varepsilon) = \varepsilon y_1(\tau, t, x) + \varepsilon^2 y_2(\tau, t, x) + \varepsilon^3 y_3(\tau, t, x) + \dots, \quad (24)$$

в котором

$$\begin{aligned} y_1 = & \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \xi_m(\tau) \exp \left(i \left(\frac{2\delta}{\varepsilon} + \theta + m \right) x + \right. \\ & \left. + i\gamma(\delta) \left(1 + \frac{\varepsilon(\theta + m) \sin(2\delta)}{2\gamma^2(\delta)} + O(\varepsilon^2) \right) t \right) + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \eta_m(\tau) \exp \left(i \left(\frac{2\delta}{\varepsilon} + \theta + m \right) x - \right. \\ & \left. - i\gamma(\delta) \left(1 + \frac{\varepsilon(\theta + m) \sin(2\delta)}{2\gamma^2(\delta)} + O(\varepsilon^2) \right) t \right) + \bar{c}\bar{c}, \end{aligned} \quad (25)$$

кроме того, здесь $\tau = \varepsilon^2 t$, через $\bar{c}\bar{c}$ обозначаются слагаемые, комплексно сопряженные с предыдущими, а y_j периодически зависят от x и от t .

Введем дополнительные обозначения. Положим

$$\xi(\tau, x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \xi_m(\tau) \exp(imx), \quad \eta(\tau, x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \eta_m(\tau) \exp(imx).$$

Подставим (24) с учетом (25) в (18) и произведем стандартные действия. Поочередно приравняем слагаемые при одинаковых степенях ε . Будем считать, что $a_0 = 0$, тогда на первом шаге алгоритма построения нормальной формы получим

$$\dot{y}_1 = y_1(t, x + \varepsilon) - 2y_1(t, x) + y_1(t, x - \varepsilon). \quad (26)$$

Ниже оператор правой части уравнения (26) будем обозначать

$$\Delta y_1 = y_1(t, x + \varepsilon) - 2y_1(t, x) + y_1(t, x - \varepsilon).$$

Решение задачи (26) ищем в виде двух быстро осциллирующих по пространству волн:

$$\begin{aligned} y_1(\tau, t, x) &= \xi(\tau, z_+) \exp(i\varphi) + \eta(\tau, z_-) \exp(i\psi) + \bar{c}c, \quad (27) \\ \varphi &= \left(\frac{2\delta}{\varepsilon} + \theta \right) x + \gamma(\delta) \left(1 + \varepsilon\theta\gamma^{-2}(\delta) \frac{1}{2} \sin(2\delta) \right) t, \\ \psi &= \left(\frac{2\delta}{\varepsilon} + \theta \right) x - \gamma(\delta) \left(1 + \varepsilon\theta\gamma^{-2}(\delta) \frac{1}{2} \sin(2\delta) \right) t, \\ z_{\pm} &= x \pm \gamma^{-1}(\delta) \frac{\sin(2\delta)}{2} t. \end{aligned}$$

Подстановка (27) в (26) на каждом шаге алгоритма дает соответствующие краевые задачи, при этом на первом шаге имеем равенство

$$\gamma^2 = 4 \sin^2(\delta). \quad (28)$$

На втором шаге при ε^2 возникает краевая задача для $y_2(\tau, t, x)$:

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= \Delta y_2 + 2i\alpha(\sin(4\delta) - 2 \sin(2\delta)) \cdot (\xi^2 \exp(2i\varphi) + \\ &+ \eta^2 \exp(2i\psi) + 2\xi\eta \exp(i(\varphi + \psi))) + \bar{c}c, \quad (29) \end{aligned}$$

$$y_2(t, x + 2\pi) \equiv y_2(t, x), \quad (30)$$

решение которой вычисляем в виде соответствующих гармоник по φ и ψ :

$$\begin{aligned} y_2(\tau, t, x, \varepsilon) &= A_{11} \xi^2 \exp(2i\varphi) + A_{22} \eta^2 \exp(2i\psi) + \\ &+ A_{12} \xi\eta \exp(i(\varphi + \psi)) + \bar{c}c, \end{aligned}$$

где $A_{11} = A_{22} = i \cdot \frac{2}{3} \alpha \cdot \sin(2\delta)$, $A_{12} = -i \cdot 2\alpha \cdot \operatorname{tg}(\delta)$.

Введем обозначения для операторов $L^+(\delta)\xi$ и $L^-(\delta)\eta$:

$$\begin{aligned} L^+(\delta)\xi &\stackrel{\text{def}}{=} 2i\gamma(\delta) \frac{\partial \xi}{\partial \tau} - a_1 \xi - R(\delta) \cdot \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial z_+^2} + 2i\theta \frac{\partial \xi}{\partial z_+} - \theta^2 \xi \right], \\ L^-(\delta)\eta &\stackrel{\text{def}}{=} -2i\gamma(\delta) \frac{\partial \eta}{\partial \tau} - a_1 \eta - R(\delta) \cdot \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial z_-^2} + 2i\theta \frac{\partial \eta}{\partial z_-} - \theta^2 \eta \right], \end{aligned}$$

где $R(\delta) = \cos(2\delta) - \frac{1}{4} \gamma^{-2}(\delta) \sin^2(2\delta)$, или $R(\delta) = \frac{7}{4} \cos^2(\delta) - 1$.

На следующем шаге алгоритма при ε^3 получается задача для $y_3(\tau, t, x)$. В правой части соответствующего уравнения будут содержаться третьи и первые гармоники по φ и ψ . Учитывая, что первые гармоники являются резонансными, для данной задачи условия существования ограниченных решений выражаются следующей системой уравнений относительно ξ и η :

$$\begin{aligned} L^+(\delta)\xi &= 3\xi(|\xi|^2 + 2|\eta|^2) \cdot \left(\left[-6 + 2\cos(2\delta) - \frac{\cos(4\delta)}{2} \right] \cdot \beta + b \right), \\ L^-(\delta)\eta &= 3\eta(2|\xi|^2 + |\eta|^2) \cdot \left(\left[-6 + 2\cos(2\delta) - \frac{\cos(4\delta)}{2} \right] \cdot \beta + b \right), \end{aligned} \quad (31)$$

с периодическими краевыми условиями

$$\xi(\tau, z_+ + 2\pi) \equiv \xi(\tau, z_+), \quad \eta(\tau, z_- + 2\pi) \equiv \eta(\tau, z_-). \quad (32)$$

Связь между решениями краевой задачи (31), (32) и исходной краевой задачи (18), (19) устанавливает следующее утверждение.

Теорема 2. *Зафиксируем произвольно параметры δ и $\theta_0 \in (0, 1]$. Пусть $\xi(\tau, z_+)$ и $\eta(\tau, z_-)$ — решения задачи (31), (32) при $\theta = \theta_0$, ограниченные при $\tau \rightarrow \infty$, $x \in [0, 2\pi]$. Тогда существует последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$, определяемая условием $\theta(\varepsilon) = \theta_0$, такая, что при $\varepsilon = \varepsilon_n$ краевая задача (18), (19) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $o(\varepsilon^3)$ решение $\tilde{y}(t, x, \varepsilon_n)$, для которого выполнено представление (25):*

$$\tilde{y}(t, x, \varepsilon) = \varepsilon y_1(\tau, t, x) + \varepsilon^2 y_2(\tau, t, x) + \varepsilon^3 y_3(\tau, t, x).$$

В фазовом пространстве краевой задачи (31), (32) имеется двухпараметрическое семейство негрубых инвариантных торов. При любых ρ_1, ρ_2, k_1, k_2 однозначно определяются параметры φ, ψ , для которых

$$\xi = \rho_1 \exp(ik_1 x + i\varphi t), \quad \eta = \rho_2 \exp(ik_2 x + i\psi t). \quad (33)$$

2.3. Пример

Рассмотрим полученную нормальную форму при конкретных значениях некоторых параметров. Пусть, в частности, $\delta = \frac{\pi}{2}$, тогда $\gamma(\delta) = 2$, $R(\delta) = -1$, $z_{\pm}(\delta) = x$, $-6 + 2\cos(2\delta) - \frac{\cos(4\delta)}{2} = -\frac{17}{2}$.

Система (31) в этом случае примет вид

$$\begin{aligned} 4i \frac{\partial \xi}{\partial \tau} - a_1 \xi + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2i\theta \frac{\partial \xi}{\partial x} - \theta^2 \xi &= 3\xi(|\xi|^2 + 2|\eta|^2) \cdot \left(-\frac{17}{2} \beta + b \right), \\ -4i \frac{\partial \eta}{\partial \tau} - a_1 \eta + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2i\theta \frac{\partial \eta}{\partial x} - \theta^2 \eta &= 3\eta(2|\xi|^2 + |\eta|^2) \cdot \left(-\frac{17}{2} \beta + b \right). \end{aligned}$$

Полученная система представляет собой два связанных нелинейных уравнения Шредингера. Отметим, что при $b = \frac{17}{2} \beta$ система «развязывается».

* * *

В статье рассмотрены асимптотические по невязке решения исходной системы дифференциальных уравнений. В различных областях из малой окрестности нулевого состояния равновесия фазового пространства построены специальные нелинейные распределенные уравнения и системы уравнений, зависящие от континуальных семейств некоторых параметров. Отметим, что с помощью предложенной методики можно получить существенно более сложные нормализованные системы. Например, в [13] приведены в качестве таковых системы шредингеровского типа с двумерной пространственной переменной.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-10043.

Литература

1. Френкель, Я. И. К теории пластической деформации и двойникования / Я. И. Френкель, Т. А. Конторова // ЖЭТФ. — 1938. — Т. 8. — I часть. — С. 89—95 ; II часть. — С. 1340—1348 ; III часть. — С. 1349—1358.
2. Fermi, E. Studies of nonlinear problems / E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam // Report LA-1940 / Los-Alamos Scientific Laboratory of the University of California. — Los Alamos, 1955.
3. Кудряшов, Н. А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений / Н. А. Кудряшов. — М. : Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. — 360 с.
4. Russel Scott, J. Report of waves // Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science. — London : John Murray, 1844. — P. 311—390.
5. The Fermi–Pasta–Ulam problem : a status report / ed. G. Gallavotti. — Springer, 2008. — 301 p. — (Lecture Notes in Physics ; vol. 728). — ISBN 978-3-540-72994-5.
6. Porter, M. A. Fermi, Pasta, Ulam and the birth of experimental mathematics / M. A. Porter, N. J. Zabusky, B. Hu, D. K. Campbell // American Scientist. — 2009. — Vol. 97, iss. 3. — P. 214—221.
7. Dauxois, T. The Fermi–Pasta–Ulam ‘numerical experiment’: history and pedagogical perspectives / T. Dauxois, M. Peyrard, S. Ruffo // Europ. J. Phys. — 2005. — Vol. 26. — P. S3—S11.
8. Genta, T. Packets of resonant modes in the Fermi–Pasta–Ulam system / T. Genta, A. Giorgilli, S. Paleari, T. Penati // Phys. Lett. A. — 2012. — Vol. 376. — P. 2038—2044.
9. Кудряшов, Н. А. Модель Ферми — Паста — Улама и нелинейные эволюционные уравнения // Вестник национального исследовательского ядерного университета МИФИ. — М. : МАИК «Наука/Интерпериодика», 2016. — Т. 5, № 1. — С. 3—22.
10. Kudryashov, N. A. Analytical properties of nonlinear dislocation equation // Appl. Math. Lett. — 2017. — Vol. 69. — P. 29—34.
11. Глызин, С. Д. Взаимодействие двух волн в модели Ферми — Паста — Улама / С. Д. Глызин, С. А. Кащенко, А. О. Толбей // Моделирование и анализ информационных систем. — 2016. — Т. 23, № 5. — С. 548—558.

12. Glyzin, S. D. Two-wave interactions in the Fermi–Pasta–Ulam model / S. D. Glyzin, S. A. Kashchenko, and A. O. Tolbey // *Automatic Control and Computer Sciences*. — 2017. — Vol. 50, № 7. — P. 627–633.
13. Кащенко, С. А. Регулярные и нерегулярные решения в задаче о дислокациях в твердом теле // *ТМФ*. — 2018. — Т. 195, вып. 3. — С. 362–380.
14. Gardner, C. S. Method for solving the Korteweg–deVries equation / C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura // *Phys. Rev. Lett.* — 1967. — Vol. 19. — P. 1095–1097.
15. Ablowitz, M. J. Solitons nonlinear evolution equations and inverse scattering / M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson. — Cambridge : Cambridge University Press, 1991.
16. Kudryashov, N. A. Refinement of the Korteweg–de Vries equation from the Fermi–Pasta–Ulam model // *Phys. Lett. A*. — 2015. — Vol. 279. — P. 2610–2614.
17. Kudryashov, N. A. From the Fermi–Pasta–Ulam model to higher-order nonlinear evolution equations // *Rep. Math. Phys.* — 2016. — Vol. 77, № 1. — P. 57–67.
18. Polyanin, A. D. Handbook of nonlinear partial differential equations / A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev. — Second Edition. — Boca Raton : Chapman and Hall/CRC, 2011. — 520 p.
19. Волков, А. К. Нелинейные волны, описываемые уравнением пятого порядка, полученным из системы Ферми — Паста — Улама / А. К. Волков, Н. А. Кудряшов // *Журн. вычисл. математики и матем. физики*. — 2016. — Т. 56, № 4. — С. 685–693.
20. Kudryashov, N. A. Nonlinear waves in media with fifth order dispersion / N. A. Kudryashov, P. N. Ryabov, D. I. Sinelshchikov // *Phys. Lett. A*. — 2011. — Vol. 375. — P. 2051–2055.
21. Кащенко, С. А. Нормальная форма для уравнения Кортевега — де Вриза — Бюргерса // *ДАН*. — 2016. — Т. 468, № 4. — С. 383–386.
22. Кащенко, С. А. О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией // *ДАН СССР*. — 1988. — Т. 299, № 5. — С. 1049–1053.
23. Kaschenko, S. A. Normalization in the systems with small diffusion // *Int. J. Bifurcations and Chaos*. — 1996. — Vol. 6, № 7. — P. 1093–1109.
24. Кащенко, И. С. Квазинормальные формы двухкомпонентных сингулярно возмущенных систем / И. С. Кащенко, С. А. Кащенко // *ДАН*. — 2012. — Т. 447, № 4. — С. 376–381.
25. Кащенко, И. С. Мультистабильность в нелинейных параболических системах с малой диффузией // *ДАН*. — 2010. — Т. 435, № 2. — С. 164–167.
26. Ablowitz, M. J. Solitons and the inverse scattering transform / M. J. Ablowitz, and H. Segur. — Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1981. — 425 p.
27. Dodd, R. K. Solitons and nonlinear wave equations / R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, H. C. Morris. — London [etc.] : Academic Press, 1982. — 630 p.
28. Newell, A. C. Solitons in mathematics and physics / A. C. Newell. — Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1985. — 260 p.
29. Zabusky, N. J. Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states / N. J. Zabusky, M. D. Kruskal // *Phys. Rev. Lett.* — 1965. — Vol. 15. — P. 240–243.
30. Кудряшов, Н. А. Методы нелинейной математической физики / Н. А. Кудряшов. — Долгопрудный : Интеллект, 2010. — 360 с.

31. Korteweg, D. J. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves / D. J. Korteweg, G. de Vries // *Phil. Mag.* — 1895. — Vol. 39. — P. 422—443.
32. Burgers, J. M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence // *Adv. Appl. Mech.* — 1948. — Vol. 1. — P. 171—199.
33. Рабинович, М. И. Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. — Ижевск : РХД, 2000. — 560 с.
34. Kudryashov, N. A. On “new travelling wave solutions” of the KdV and the KdV-Burgers equations // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* — 2009. — Vol. 14, iss. 5. — P. 1891—1900.
35. Kudryashov, N. A. Exact soliton solutions of the generalized evolution equation of wave dynamics // *J. Appl. Math. Mech.* — 1988. — Vol. 52, № 3. — P. 361—365.
36. Kudryashov, N. A. One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* — 2012. — Vol. 17. — P. 2248—2253.
37. Kudryashov, N. A. Painleve analysis and exact solutions of the Korteweg–de Vries equation with a source // *Appl. Math. Lett.* — 2015. — Vol. 41. — P. 41—45.
38. Глызин, С. Д. Автоволновые процессы в континуальных цепочках однонаправленно связанных генераторов / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // *Избранные вопросы математической физики и анализа : сб. статей.* — 2014. — Т. 285. — С. 89—106. — (Труды МИАН).
39. Глызин, С. Д. Явление буферности в континуальных цепочках однонаправленно связанных генераторов / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // *ТМФ.* — 2014. — Т. 181, № 2. — С. 254—275.

Научное издание

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ' 2018

Редактор *И. А. Кокорина*
Верстка *М. В. Башевой, А. А. Ереминой*
Технический редактор *Д. П. Семенова*

Подписано в печать 22.07.2019 г.
Формат 60×90¹/₁₆.
Усл. печ. л. 17,0 + 0,5 вкл. Уч.-изд. л. 16,4.
Темплан 2019 г. Поз. 1. Тираж 200 экз.

ФИЦ Институт прикладной физики РАН
603950, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ППП «Типография «Наука»,
121099, Москва, Шубинский пер., 6

Заказ №

К статье *А. В. Слюняева*
 «Портреты нелинейных морских волн в пространстве Фурье»

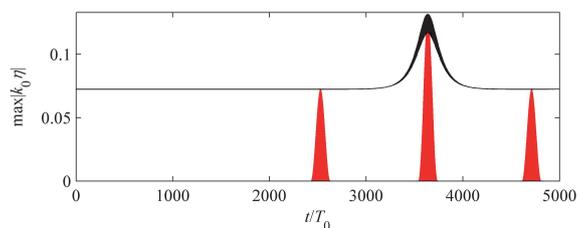


Рис. 9. Зависимость максимума смещения поверхности от времени (линия) для случая $N_w = 6$, $\varepsilon = 0,07$. Заливкой показаны профили масок $W(t)$ (12) для трех исследуемых интервалов эволюции: (I), (II) и (III)

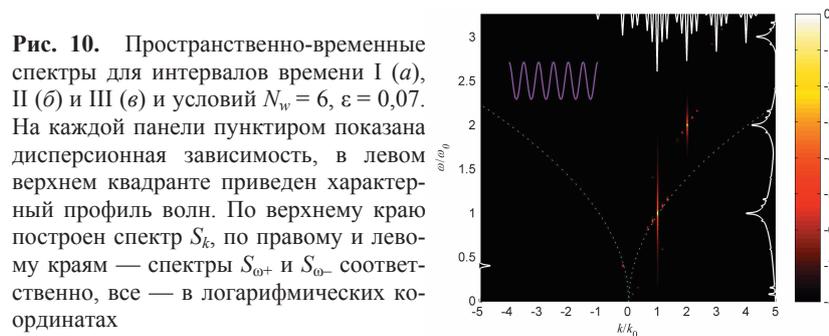
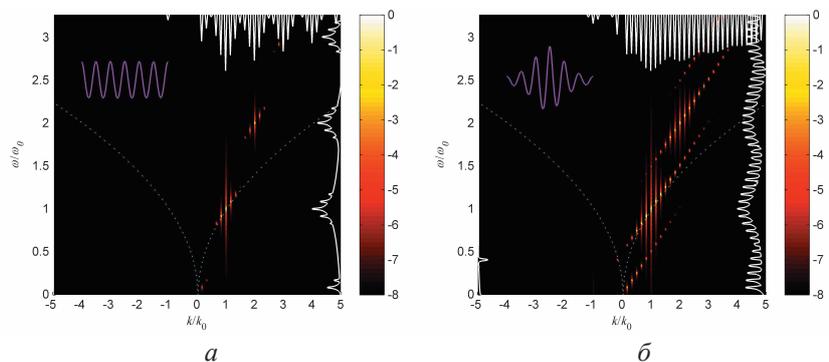


Рис. 10. Пространственно-временные спектры для интервалов времени I (*a*), II (*б*) и III (*в*) и условий $N_w = 6$, $\varepsilon = 0,07$. На каждой панели пунктиром показана дисперсионная зависимость, в левом верхнем квадранте приведен характерный профиль волн. По верхнему краю построен спектр S_k , по правому и левому краям — спектры $S_{\omega+}$ и $S_{\omega-}$ соответственно, все — в логарифмических координатах

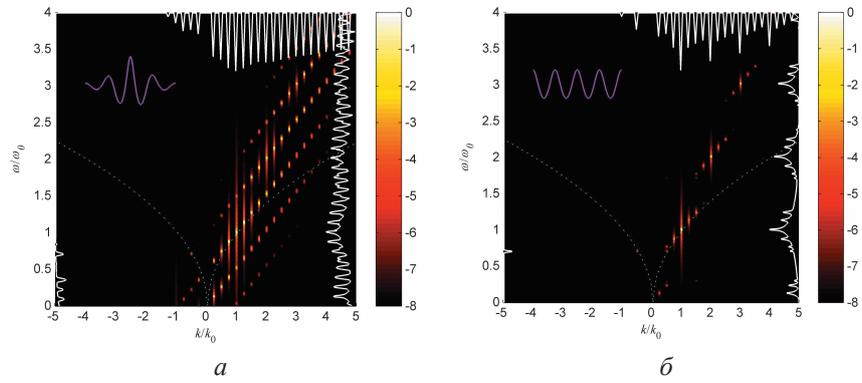


Рис. 11. Пространственно-временные спектры для интервалов времени II (*a*) и III (*б*) для условий $N_w = 4$, $\varepsilon = 0,11$. На панелях представлена та же информация, что и на рис. 10

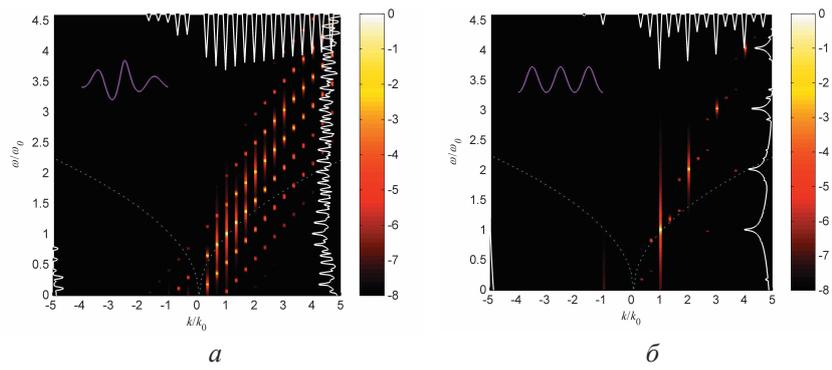


Рис. 12. Пространственно-временные спектры для интервалов времени II (*a*) и III (*б*) для условий $N_w = 3$, $\varepsilon = 0,146$. На панелях представлена та же информация, что и на рис. 10, 11

К статье *А. М. Фейгина, А. С. Гаврилова, Е. М. Лоскутова,
Д. Н. Мухина, А. Ф. Селезнева*
«Нелинейные динамические моды:
метод эмпирической реконструкции сложных систем»

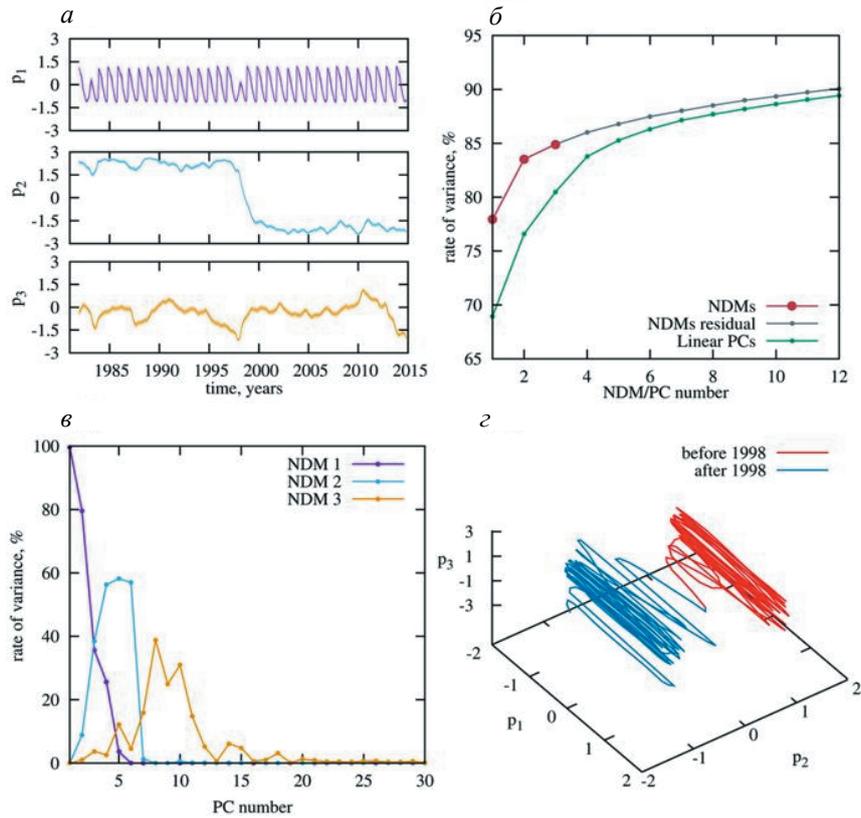


Рис. 1. Временные ряды $p(t)$, соответствующие найденным НДМ (на рисунках — NDM), расположенные в порядке убывания захваченной вариации (а). Доля кумулятивной вариации, захватываемой модами (б). Большие точки соответствуют НДМ, серые точки — линейным ГК (на рисунках — РС), полученным в результате ЭОФ-разложения остатков, зеленые точки — линейным ГК, полученным в результате ЭОФ-разложения данных ТПО. Вклад НДМ в различные линейные ГК (показана доля захватываемой вариации) (в). Проекция фазового пространства системы, формируемого реконструированными переменными p_1, p_2, p_3 — нелинейными ГК (г). Синий цвет соответствует интервалу до 1998 года, красный — интервалу после 1998 года

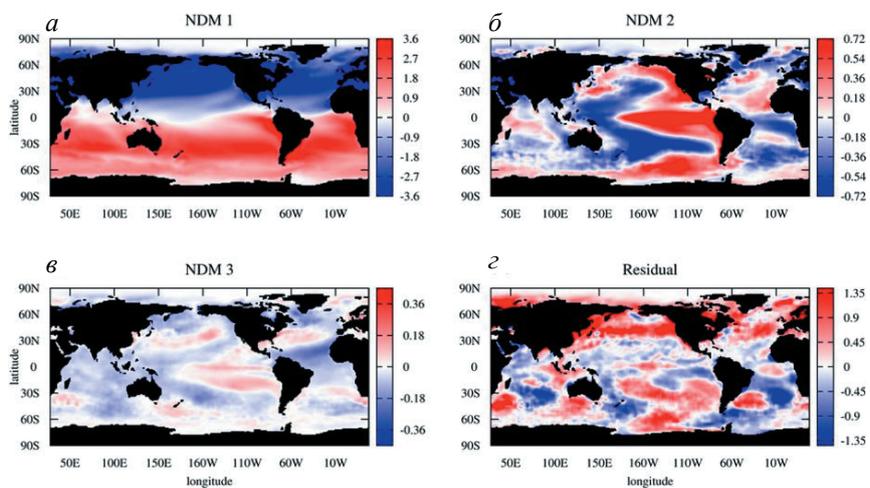


Рис. 2. Мгновенный снимок на географической сетке, соответствующий январю 1992 года. Цветовая шкала соответствует вкладу в градусах по Цельсию соответствующей НДМ (с учетом знака) в отклонение ТПО от своего среднего значения в каждой географической точке

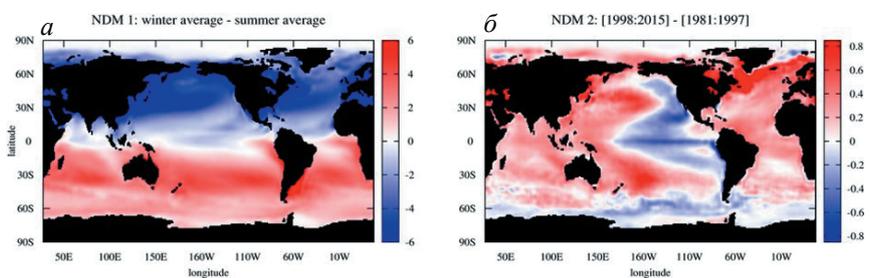


Рис. 3. Паттерн годового хода: разность между вкладами первой НДМ в ТПО, усредненными по зимним и летним месяцам на наблюдаемом временном интервале (а). Паттерн отрицательной фазы ТДК: разность между вкладами второй НДМ в ТПО, усредненными по интервалам 1998—2014 и 1981—1997 годов (б)

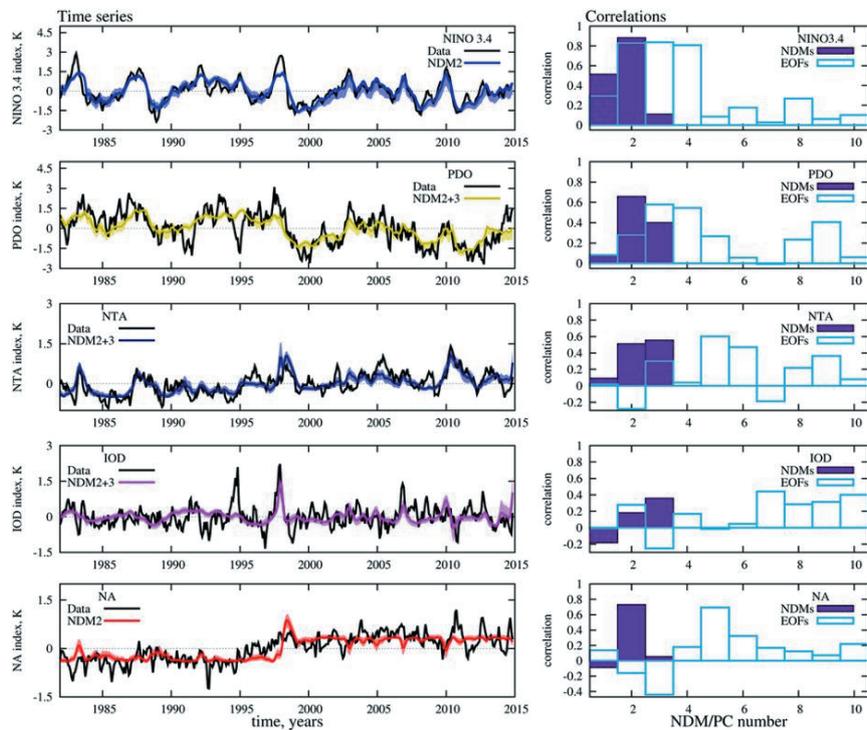


Рис. 4. Реконструкция климатических индексов, перечисленных в таблице 1. *Левая половина:* сравнение оригинальных индексов (черный цвет), вычисленных по полю АТПО, и индексов, реконструированных по различным комбинациям второй и третьей НДМ. Байесов доверительный интервал реконструкции показан тенью вокруг соответствующего индекса. *Правая половина:* фиолетовые столбцы показывают корреляции соответствующего индекса (см. подписи к вертикальной оси слева) с индексом, реконструированным по различным НДМ (номер НДМ отложен по оси абсцисс). Для сравнения прозрачными столбцами показаны корреляции этих же индексов с линейными ГК

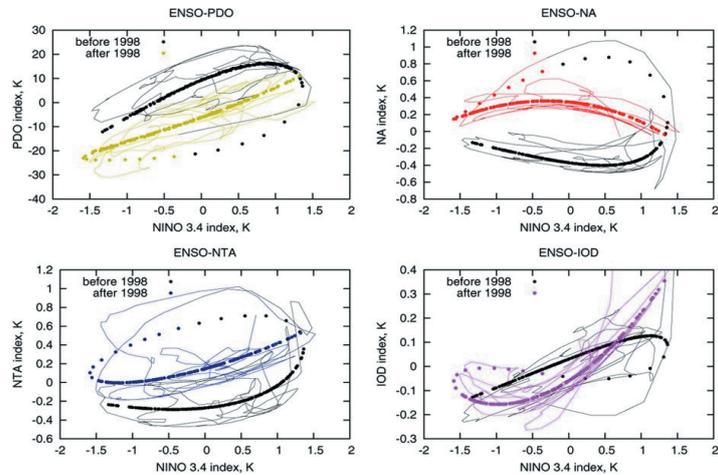


Рис. 5. Дальние связи между ЭНЮК (ENSO) и динамикой в других регионах, детектируемые с помощью НДМ. Зависимости, основанные на второй НДМ, показаны точками; основанные на сумме второй и третьей НДМ — тонкими линиями. Черный цвет соответствует интервалу времени до климатического перехода 1997—1998 годов, другие цвета — интервалу после перехода

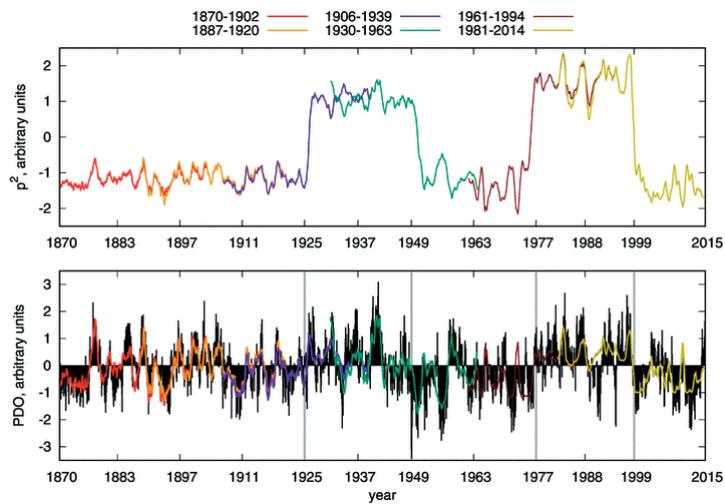


Рис. 7. МНДМ, построенные для различных фрагментов ТПО: *вверху* — скрытые сигналы p_{2n} ; *внизу* — индексы PDO, построенные на основе второй компоненты МНДМ (цветные линии) вместе с исходным индексом PDO, рассчитанным по наблюдаемым данным (черная линия)

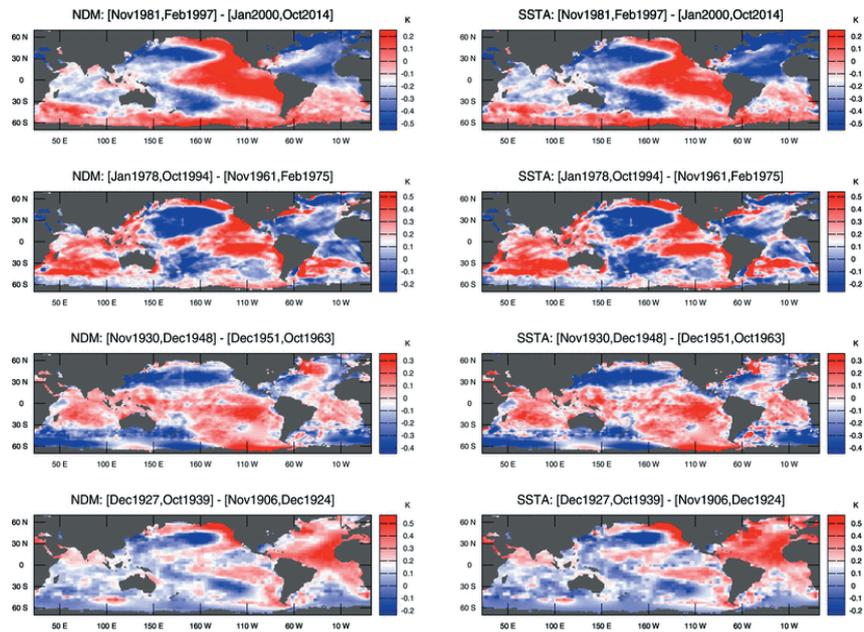


Рис. 8. Разность средних АПО в положительной и отрицательной фазах ТДК для различных фрагментов временного ряда: *слева* — паттерны, рассчитанные по временным рядам ТПО на основе второй компоненты МНДМ; *справа* — те же паттерны, но рассчитанные по наблюдаемым рядам АПО

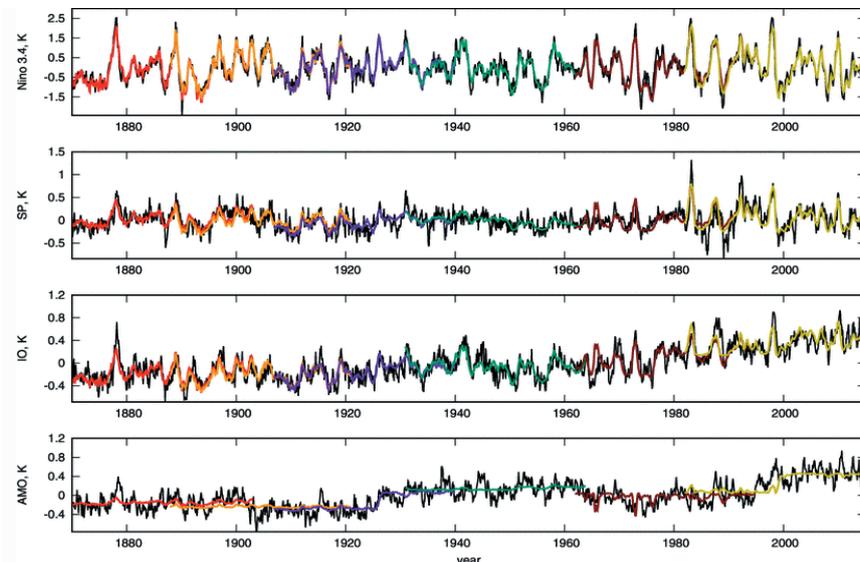


Рис. 10. Индексы ТПО Nino 3.4, SO, IO и АМО, рассчитанные на основе второй компоненты МНДМ (разные цвета соответствуют разным фрагментам временного ряда, как на рис. 7), в сравнении с индексами, рассчитанными по наблюдаемым данным (черный цвет). На разных фрагментах индексы приведены к среднему значению всего временного ряда 1870—2014 годов для того, чтобы обеспечить «сшиваемость» фрагментов

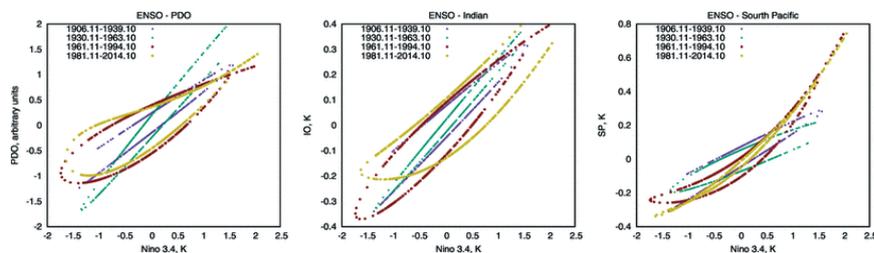


Рис. 11. Дальние связи между различными регионами, детектируемые с помощью МНДМ. Временные ряды индексов ТДК, IO, SO и Nino 3.4 реконструированы на основе МНДМ и имеют нулевое среднее для каждого фрагмента временного ряда (цвета соответствуют рис. 7, 10). Показаны зависимости индексов ТДК, IO, SO (слева направо) от Nino 3.4