

Свойства уравнений с запаздыванием и примеры их применения в моделировании опто-электронных и нейронных систем

Сергей Янчук

Институт математики
Технический Университет, г. Берлин, Германия

Нелинейные волны — 2016



Содержание

- 1 Уравнения с запаздыванием и их основные свойства
 - Начальная задача, примеры, пространства
 - Устойчивость
 - Большое запаздывание
- 2 Рост числа периодических решений (reappearance)
 - Рост числа решений с увеличением запаздывания
 - Устойчивость
- 3 Преобразование временных запаздываний в динамических сетях
 - Преобразование временных сдвигов
 - Создание структур с помощью запаздываний
 - Структуры на двухмерной решетке

Outline

1 Уравнения с запаздыванием и их основные свойства

- Начальная задача, примеры, пространства
- Устойчивость
- Большое запаздывание

2 Рост числа периодических решений (reappearance)

- Рост числа решений с увеличением запаздывания
- Устойчивость

3 Преобразование временных запаздываний в динамических сетях

- Преобразование временных сдвигов
- Создание структур с помощью запаздываний
- Структуры на двухмерной решетке

Уравнения с запаздыванием

Начальная задача, примеры

$$x'(t) = f(x(t), x(t - \tau))$$

Начальная задача

$$x(\theta) = \phi(\theta), \quad -\tau \leq \theta \leq 0$$

$$x_t := x(t + \theta), \quad -\tau \leq \theta \leq 0$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$: конечномерный вектор

$x_t \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$: функция

Начальная задача для уравнений с запаздыванием общего вида

$$x'(t) = F(x_t),$$

$$x_0 = \phi$$

Бесконечномерное фазовое пространство

Hale, Lunel, Эльсгольц, Норкин, Bellman, Cooke...

Уравнения с запаздыванием

Начальная задача, примеры

$$x'(t) = f(x(t), x(t - \tau))$$

Начальная задача

$$x(\theta) = \phi(\theta), \quad -\tau \leq \theta \leq 0$$

$$x_t := x(t + \theta), \quad -\tau \leq \theta \leq 0$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$: конечномерный вектор

$x_t \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$: функция

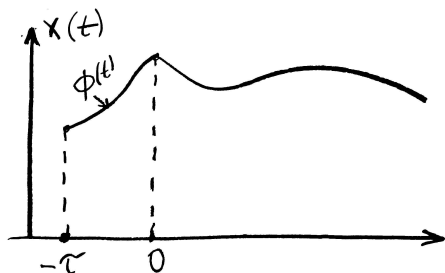
Начальная задача для уравнений с запаздыванием общего вида

$$x'(t) = F(x_t),$$

$$x_0 = \phi$$

Бесконечномерное фазовое пространство

Hale, Lunel, Эльсгольц, Норкин, Bellman, Cooke...



Уравнения с запаздыванием

Начальная задача, примеры

$$x'(t) = f(x(t), x(t - \tau))$$

Начальная задача

$$x(\theta) = \phi(\theta), \quad -\tau \leq \theta \leq 0$$

$$x_t := x(t + \theta), \quad -\tau \leq \theta \leq 0$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$: конечномерный вектор

$x_t \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$: функция

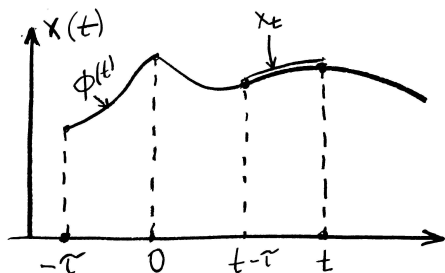
Начальная задача для уравнений с запаздыванием общего вида

$$x'(t) = F(x_t),$$

$$x_0 = \phi$$

Бесконечномерное фазовое пространство

Hale, Lunel, Эльсгольц, Норкин, Bellman, Cooke...



Уравнения с запаздыванием

Начальная задача, примеры

$$x'(t) = f(x(t), x(t - \tau))$$

Начальная задача

$$x(\theta) = \phi(\theta), \quad -\tau \leq \theta \leq 0$$

$$x_t := x(t + \theta), \quad -\tau \leq \theta \leq 0$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$: конечномерный вектор

$x_t \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$: функция

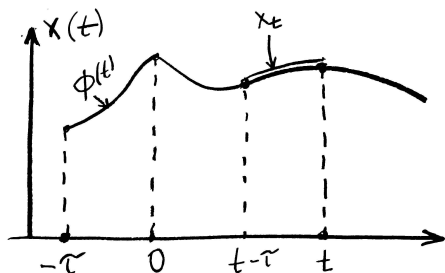
Начальная задача для уравнений с запаздыванием общего вида

$$x'(t) = F(x_t),$$

$$x_0 = \phi$$

Бесконечномерное фазовое пространство

Hale, Lunel, Эльсгольц, Норкин, Bellman, Cooke...



Уравнения с запаздыванием

Начальная задача, примеры

$$x'(t) = f(x(t), x(t - \tau))$$

Начальная задача

$$x(\theta) = \phi(\theta), \quad -\tau \leq \theta \leq 0$$

$$x_t := x(t + \theta), \quad -\tau \leq \theta \leq 0$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$: конечномерный вектор

$x_t \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$: функция

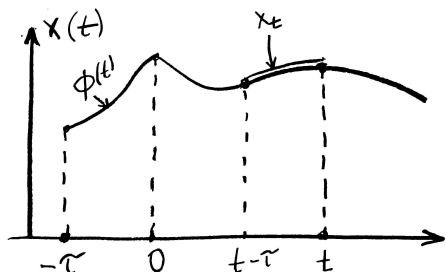
Начальная задача для уравнений с запаздыванием общего вида

$$x'(t) = F(x_t),$$

$$x_0 = \phi$$

Бесконечномерное фазовое пространство

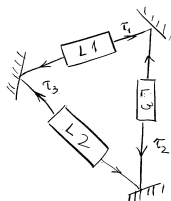
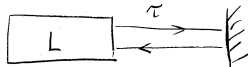
Hale, Lunel, Эльсгольц, Норкин, Bellman, Cooke...



Уравнения с запаздыванием

Начальная задача, примеры

- Лазер с обратной связью; взаимодействующие лазеры



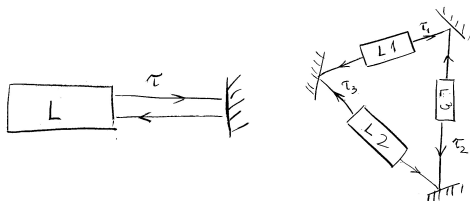
- Нейронные сети

- «Классический» пример, отрицательная обратная связь дестабилизирует систему

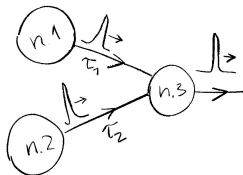
Уравнения с запаздыванием

Начальная задача, [примеры](#)

- Лазер с обратной связью; взаимодействующие лазеры



- Нейронные сети

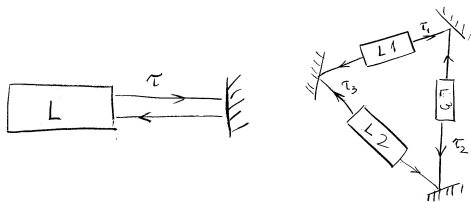


- «Классический» пример, отрицательная обратная связь дестабилизирует систему

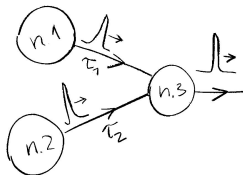
Уравнения с запаздыванием

Начальная задача, [примеры](#)

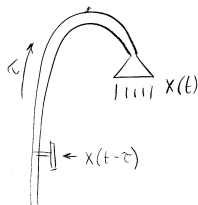
- Лазер с обратной связью; взаимодействующие лазеры



- Нейронные сети



- «Классический» пример, отрицательная обратная связь дестабилизирует систему



$$x'(t) = -\alpha x(t - \tau)$$

неустойчивость при $\tau > \frac{\pi}{2\alpha}$

Outline

1 Уравнения с запаздыванием и их основные свойства

- Начальная задача, примеры, пространства
- **Устойчивость**
- Большое запаздывание

2 Рост числа периодических решений (reappearance)

- Рост числа решений с увеличением запаздывания
- Устойчивость

3 Преобразование временных запаздываний в динамических сетях

- Преобразование временных сдвигов
- Создание структур с помощью запаздываний
- Структуры на двухмерной решетке

Устойчивость

$$x'(t) = f(x(t), x(t - \tau))$$

- x^* – положение равновесия, $f(x^*, x^*) = 0$, не зависит от величины запаздывания τ

- локальная устойчивость определяется линеаризованным уравнением

$$x'(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau), \quad A = \partial_1 f(x^*, x^*), \quad B = \partial_2 f(x^*, x^*)$$

- характеристическое уравнение

$$\det [\lambda I - A - Be^{-\lambda\tau}] = 0$$

- квазиполином, в общем случае счетное количество корней

- ▶ дискретный спектр
- ▶ конечное число корней в любой полосе $\alpha \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \beta$
- ▶ ограничены «справа», т.е. найдется такое M , что $\operatorname{Re} \lambda_k \leq M$

- классические бифуркации: Андронов-Хопф, транскр., седлоузел, pitchfork.

Устойчивость

$$x'(t) = f(x(t), x(t - \tau))$$

- x^* – положение равновесия, $f(x^*, x^*) = 0$, не зависит от величины запаздывания τ

- локальная устойчивость определяется линеаризованным уравнением

$$x'(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau), \quad A = \partial_1 f(x^*, x^*), \quad B = \partial_2 f(x^*, x^*)$$

- характеристическое уравнение

$$\det [\lambda I - A - Be^{-\lambda\tau}] = 0$$

- квазиполином, в общем случае счетное количество корней

- ▶ дискретный спектр
- ▶ конечное число корней в любой полосе $\alpha \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \beta$
- ▶ ограничены «справа», т.е. найдется такое M , что $\operatorname{Re} \lambda_k \leq M$

- классические бифуркации: Андронов-Хопф, транскр., седлоузел, pitchfork.

Устойчивость

$$x'(t) = f(x(t), x(t - \tau))$$

- x^* – положение равновесия, $f(x^*, x^*) = 0$, не зависит от величины запаздывания τ

- локальная устойчивость определяется линеаризованным уравнением

$$x'(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau), \quad A = \partial_1 f(x^*, x^*), \quad B = \partial_2 f(x^*, x^*)$$

- характеристическое уравнение

$$\det [\lambda I - A - Be^{-\lambda\tau}] = 0$$

- квазиполином, в общем случае счетное количество корней

- ▶ дискретный спектр
- ▶ конечное число корней в любой полосе $\alpha \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \beta$
- ▶ ограничены «справа», т.е. найдется такое M , что $\operatorname{Re} \lambda_k \leq M$

- классические бифуркации: Андронов-Хопф, транскр., седлоузел, pitchfork.

Устойчивость

$$x'(t) = f(x(t), x(t - \tau))$$

- x^* – положение равновесия, $f(x^*, x^*) = 0$, не зависит от величины запаздывания τ

- локальная устойчивость определяется линейризованным уравнением

$$x'(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau), \quad A = \partial_1 f(x^*, x^*), \quad B = \partial_2 f(x^*, x^*)$$

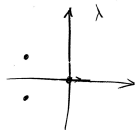
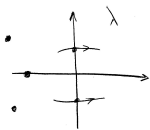
- характеристическое уравнение

$$\det [\lambda I - A - Be^{-\lambda\tau}] = 0$$

- квазиполином, в общем случае счетное количество корней

- ▶ дискретный спектр
- ▶ конечное число корней в любой полосе $\alpha \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \beta$
- ▶ ограничены «справа», т.е. найдется такое M , что $\operatorname{Re} \lambda_k \leq M$

- классические бифуркации: Андронов-Хопф, транскр., седлоузел, pitchfork.



Устойчивость

Простой, но типичный пример исследования устойчивости

$$x'(t) = -\alpha x(t - \tau), \quad \alpha > 0$$

- характеристическое уравнение: $\lambda = -\alpha e^{-\lambda\tau}$

- условие бифуркации: $\lambda = i\omega$

$$i\omega = -\alpha e^{-i\omega\tau}$$

- Re: $0 = -\alpha \cos \omega\tau$

- Im: $\omega = \alpha \sin \omega\tau$

$$\cos \omega\tau = 0 \Rightarrow \omega\tau = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad (\text{Im}) \Rightarrow \omega = \pm \alpha \Rightarrow \pm \alpha\tau = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\alpha\tau = \frac{\pi}{2} \mp 2\pi k$$

Устойчивость

Простой, но типичный пример исследования устойчивости

$$x'(t) = -\alpha x(t - \tau), \quad \alpha > 0$$

- характеристическое уравнение: $\lambda = -\alpha e^{-\lambda\tau}$

- условие бифуркации: $\lambda = i\omega$

$$i\omega = -\alpha e^{-i\omega\tau}$$

- Re: $0 = -\alpha \cos \omega\tau$

- Im: $\omega = \alpha \sin \omega\tau$

$$\cos \omega\tau = 0 \Rightarrow \omega\tau = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad (\text{Im}) \Rightarrow \omega = \pm \alpha \Rightarrow \pm \alpha\tau = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\alpha\tau = \frac{\pi}{2} \mp 2\pi k$$

Устойчивость

Простой, но типичный пример исследования устойчивости

$$x'(t) = -\alpha x(t - \tau), \quad \alpha > 0$$

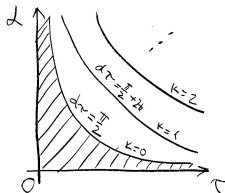
- характеристическое уравнение: $\lambda = -\alpha e^{-\lambda\tau}$
- условие бифуркации: $\lambda = i\omega$

$$i\omega = -\alpha e^{-i\omega\tau}$$

- Re: $0 = -\alpha \cos \omega\tau$
- Im: $\omega = \alpha \sin \omega\tau$

$$\cos \omega\tau = 0 \Rightarrow \omega\tau = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad (\text{Im}) \Rightarrow \omega = \pm \alpha \Rightarrow \pm \alpha\tau = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\alpha\tau = \frac{\pi}{2} \mp 2\pi k$$



Outline

1 Уравнения с запаздыванием и их основные свойства

- Начальная задача, примеры, пространства
- Устойчивость
- **Большое запаздывание**

2 Рост числа периодических решений (reappearance)

- Рост числа решений с увеличением запаздывания
- Устойчивость

3 Преобразование временных запаздываний в динамических сетях

- Преобразование временных сдвигов
- Создание структур с помощью запаздываний
- Структуры на двухмерной решетке

Пределы малого ($\tau \rightarrow 0$) и большого ($\tau \rightarrow \infty$) запаздывания

● Малое запаздывание

- ▶ Спектр

$$\det[\lambda I - A - Be^{-\lambda\tau}] \approx \det[\lambda I - A - B] \quad \text{для } \operatorname{Re} \lambda > \operatorname{const}$$

$\sigma(A+B)$ + корни с $\operatorname{Re} \lambda \rightarrow -\infty$.

- ▶ В общем случае, динамика может быть приближена ОДУ - **конечномерная**

$$x'(t) = f(x(t), x(t))$$

- ▶ Рябов, Chicone, ...

● Большое запаздывание

- ▶ сингулярное уравнение, после скалирования времени

$$\frac{1}{\tau} x'(t) = f(x(t), x(t-1))$$

- ▶ многомерная динамика – подобно **распределенным** системам

Пределы малого ($\tau \rightarrow 0$) и большого ($\tau \rightarrow \infty$) запаздывания

● Малое запаздывание

- ▶ Спектр

$$\det[\lambda I - A - Be^{-\lambda\tau}] \approx \det[\lambda I - A - B] \quad \text{для } \operatorname{Re} \lambda > \text{const}$$

$\sigma(A+B)$ + корни с $\operatorname{Re} \lambda \rightarrow -\infty$.

- ▶ В общем случае, динамика может быть приближена ОДУ - **конечномерная**

$$x'(t) = f(x(t), x(t))$$

- ▶ Рябов, Chicone, ...

● Большое запаздывание

- ▶ сингулярное уравнение, после скалирования времени

$$\frac{1}{\tau} x'(t) = f(x(t), x(t-1))$$

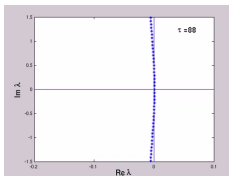
- ▶ многомерная динамика – подобно **распределенным** системам

Спектр систем с большим запаздыванием

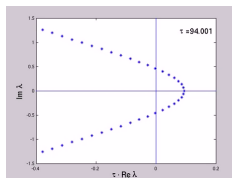
Пример

$$\lambda - a - be^{-\lambda\tau} = 0$$

- Спектр $\lambda(\tau)$



- Спектр масштабированный $\tau \text{Re } \lambda + \text{Im } \lambda$



Асимптотическое поведение

$$\lambda = \frac{\gamma(\omega)}{\tau} + i\omega$$

Аналогично в общем случае квазиполинома $\det [\lambda I - A - Be^{-\lambda\tau}] = 0$

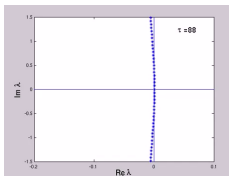
$$\lambda = \frac{\gamma_j(\omega)}{\tau} + i\omega, \quad 1 \leq j \leq n$$

Спектр систем с большим запаздыванием

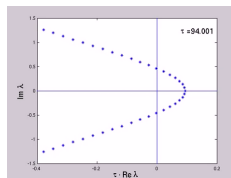
Пример

$$\lambda - a - be^{-\lambda\tau} = 0$$

- Спектр $\lambda(\tau)$



- Спектр масштабированный $\tau \text{Re } \lambda + \text{Im } \lambda$



Асимптотическое поведение

$$\lambda = \frac{\gamma(\omega)}{\tau} + i\omega$$

Аналогично в общем случае квазиполинома $\det [\lambda I - A - Be^{-\lambda\tau}] = 0$

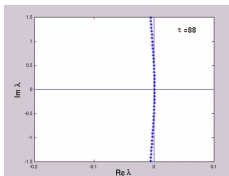
$$\lambda = \frac{\gamma_j(\omega)}{\tau} + i\omega, \quad 1 \leq j \leq n$$

Спектр систем с большим запаздыванием

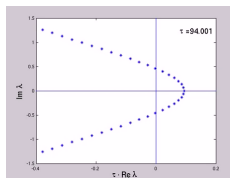
Пример

$$\lambda - a - be^{-\lambda\tau} = 0$$

- Спектр $\lambda(\tau)$



- Спектр масштабированный $\tau \text{Re } \lambda + \text{Im } \lambda$



Асимптотическое поведение

$$\lambda = \frac{\gamma(\omega)}{\tau} + i\omega$$

Аналогично в общем случае квазиполинома $\det [\lambda I - A - Be^{-\lambda\tau}] = 0$

$$\lambda = \frac{\gamma_j(\omega)}{\tau} + i\omega, \quad 1 \leq j \leq n$$

Спектр систем с большим запаздыванием

Асимптотика

$$\lambda = \frac{\gamma_j(\omega)}{\tau} + i\omega$$

$$\det \left[\left(\frac{\gamma}{\tau} + i\omega \right) I - A - B e^{-\left(\frac{\gamma}{\tau} + i\omega \right) \tau} \right]$$

$$\approx \det \left[i\omega I - A - \underbrace{B e^{-\gamma - i\omega\tau}}_{Y(\omega)} \right] = 0$$

$e^{-\gamma - i\omega\tau} = Y_j(\omega)$, $j = 1, \dots, n$ – корни полинома

$$\gamma_j(\omega) = -\ln |Y_j(\omega)|$$

- Спектральные функции $\gamma_j(\omega)$ находятся явно и не зависят от величины запаздывания
- Уравнение для ω :

$$-\omega\tau + 2\pi k = \arg Y_j(\omega) \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi k}{\tau} - \frac{\arg Y_j(\omega)}{\tau}$$

- $\omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\pi}{\tau} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\tau^2}\right)$ – спектральные кривые «заполняются» корнями

Спектр систем с большим запаздыванием

Асимптотика

$$\lambda = \frac{\gamma_j(\omega)}{\tau} + i\omega$$

$$\det \left[\left(\frac{\gamma}{\tau} + i\omega \right) I - A - B e^{-(\frac{\gamma}{\tau} + i\omega)\tau} \right]$$

$$\approx \det \left[i\omega I - A - \underbrace{B e^{-\gamma - i\omega\tau}}_{Y(\omega)} \right] = 0$$

$e^{-\gamma - i\omega\tau} = Y_j(\omega)$, $j = 1, \dots, n$ – корни полинома

$$\gamma_j(\omega) = -\ln |Y_j(\omega)|$$

- Спектральные функции $\gamma_j(\omega)$ находятся явно и не зависят от величины запаздывания
- Уравнение для ω :

$$-\omega\tau + 2\pi k = \arg Y_j(\omega) \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi k}{\tau} - \frac{\arg Y_j(\omega)}{\tau}$$

- $\omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\pi}{\tau} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\tau^2}\right)$ – спектральные кривые «заполняются» корнями

Спектр систем с большим запаздыванием

Асимптотика

$$\lambda = \frac{\gamma_j(\omega)}{\tau} + i\omega$$

$$\det \left[\left(\frac{\gamma}{\tau} + i\omega \right) I - A - B e^{-(\frac{\gamma}{\tau} + i\omega)\tau} \right]$$

$$\approx \det \left[i\omega I - A - \underbrace{B e^{-\gamma - i\omega\tau}}_{Y(\omega)} \right] = 0$$

$e^{-\gamma - i\omega\tau} = Y_j(\omega)$, $j = 1, \dots, n$ – корни полинома

$$\gamma_j(\omega) = -\ln |Y_j(\omega)|$$

- Спектральные функции $\gamma_j(\omega)$ находятся явно и не зависят от величины запаздывания
- Уравнение для ω :

$$-\omega\tau + 2\pi k = \arg Y_j(\omega) \Rightarrow \omega = \frac{2\pi k}{\tau} - \frac{\arg Y_j(\omega)}{\tau}$$

- $\omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\pi}{\tau} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\tau^2}\right)$ – спектральные кривые «заполняются» корнями

Спектр систем с большим запаздыванием

Асимптотика

$$\lambda = \frac{\gamma_j(\omega)}{\tau} + i\omega$$

$$\det \left[\left(\frac{\gamma}{\tau} + i\omega \right) I - A - B e^{-(\frac{\gamma}{\tau} + i\omega)\tau} \right]$$

$$\approx \det \left[i\omega I - A - \underbrace{B e^{-\gamma - i\omega\tau}}_{Y(\omega)} \right] = 0$$

$e^{-\gamma - i\omega\tau} = Y_j(\omega)$, $j = 1, \dots, n$ – корни полинома

$$\gamma_j(\omega) = -\ln |Y_j(\omega)|$$

- Спектральные функции $\gamma_j(\omega)$ находятся явно и не зависят от величины запаздывания
- Уравнение для ω :

$$-\omega\tau + 2\pi k = \arg Y_j(\omega) \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi k}{\tau} - \frac{\arg Y_j(\omega)}{\tau}$$

- $\omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\pi}{\tau} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\tau^2}\right)$ – спектральные кривые «заполняются» корнями

Спектр систем с большим запаздыванием

Сильный и слабый спектр

- Слабый спектр (псевдодискретный):

$$\lambda = \frac{\gamma_j(\omega)}{\tau} + i\omega, \quad \operatorname{Re} \lambda \sim \frac{1}{\tau}$$

- Сильный спектр:

$$\lambda \approx \lambda_0, \quad \lambda_0 \in \sigma(A), \quad \operatorname{Re} \lambda_0 > 0$$

(Возмущение растет на временах меньших τ)

Спектр систем с большим запаздыванием

Сильный и слабый спектр

- Слабый спектр (псевдоднепрерывный):

$$\lambda = \frac{\gamma_j(\omega)}{\tau} + i\omega, \quad \operatorname{Re} \lambda \sim \frac{1}{\tau}$$

- Сильный спектр:

$$\lambda \approx \lambda_0, \quad \lambda_0 \in \sigma(A), \quad \operatorname{Re} \lambda_0 > 0$$

(Возмущение растет на временах меньших τ)

Спектр систем с большим запаздыванием

Сильный и слабый спектр

- Слабый спектр (псевдонерывный):

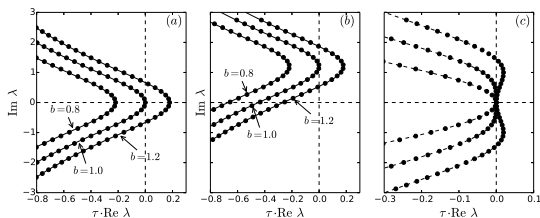
$$\lambda = \frac{\gamma_j(\omega)}{\tau} + i\omega, \quad \operatorname{Re} \lambda \sim \frac{1}{\tau}$$

- Сильный спектр:

$$\lambda \approx \lambda_0, \quad \lambda_0 \in \sigma(A), \quad \operatorname{Re} \lambda_0 > 0$$

(Возмущение растет на временах меньших τ)

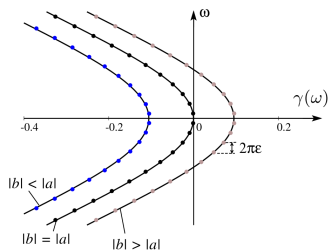
- Неустойчивости возникают за счет псевдонерывного спектра. Для каждой неустойчивости может быть получена нормальная форма, т.н. амплитудное уравнение в частных производных (Кащенко, Giacomelli, Politi,...)



Спектр систем с большим запаздыванием

Другие примеры

- Скалярное уравнение $x' = ax(t) + bx(t - \tau) \implies \lambda - a - be^{-\lambda\tau} = 0$



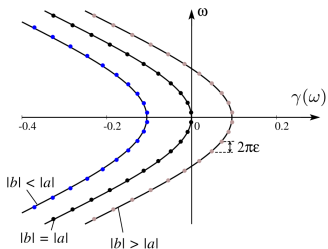
$$\gamma(\omega) = -\frac{1}{2} \ln \frac{a^2 + \omega^2}{b^2}$$

неустойчивость при $|b| > |a|$

Спектр систем с большим запаздыванием

Другие примеры

- Скалярное уравнение $x' = ax(t) + bx(t - \tau) \implies \lambda - a - be^{-\lambda\tau} = 0$



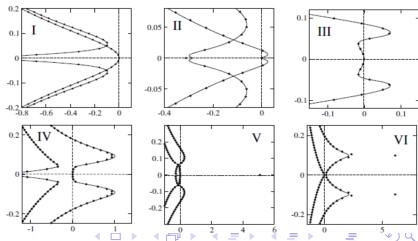
$$\gamma(\omega) = -\frac{1}{2} \ln \frac{a^2 + \omega^2}{b^2}$$

неустойчивость при $|b| > |a|$

- Модель полупроводникового лазера (Lang-Kobayashi)

$$E' = (1 + i\alpha)nE + \eta E(t - \tau)$$

$$Tn' = J - n - (2n + 1)|E|^2$$



Y., Wolfrum, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 9 (2010)

Основные тезисы 1 части

- Уравнения с запаздыванием — бесконечномерные динамические системы
- Небольшое запаздывание — «маломерная» динамика и бифуркации (DDE-Biftool)
- Большое запаздывание (существенно больше других временных масштабов):
 - ▶ Псевдо-непрерывный спектр
 - ▶ Малые изменения параметра приводит к множественным бифуркациям
 - ▶ Нормальные формы в виде ур. в частных производных
 - ▶ Динамика многомерная: пространственно-временной хаос, турбулентность, дефекты, фронты и т.д. (в данном докладе не рассматривается) [see video]
 - ▶ Сосуществование большого количества аттракторов (буферность) — рассматривается в следующей части

Y., Wolfrum, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 9 (2010) 519
Lichtner, Wolfrum, Y., *SIAM J. Math. Anal.* 43 (2011) 788
Wolfrum, Y., Hövel, Schöll, *Eur. Phys. J. Special Topics* 191 (2010) 91
Y., Lücken, Wolfrum, Mielke, *Discr. Cont. Dyn. Sys. A* 35 (2015) 537
Y., Giacomelli, *Phys. Rev. Lett.* 112 (2014) 174103

Основные тезисы 1 части

- Уравнения с запаздыванием — бесконечномерные динамические системы
- Небольшое запаздывание — «маломерная» динамика и бифуркации (DDE-Biftool)
- Большое запаздывание (существенно больше других временных масштабов):
 - ▶ Псевдо-непрерывный спектр
 - ▶ Малые изменения параметра приводит к множественным бифуркациям
 - ▶ Нормальные формы в виде ур. в частных производных
 - ▶ Динамика многомерная: пространственно-временной хаос, турбулентность, дефекты, фронты и т.д. (в данном докладе не рассматривается) [see video]
 - ▶ Сосуществование большого количества аттракторов (буферность) — рассматривается в следующей части

Y., Wolfrum, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 9 (2010) 519
Lichtner, Wolfrum, Y., *SIAM J. Math. Anal.* 43 (2011) 788
Wolfrum, Y., Hövel, Schöll, *Eur. Phys. J. Special Topics* 191 (2010) 91
Y., Lücken, Wolfrum, Mielke, *Discr. Cont. Dyn. Sys. A* 35 (2015) 537
Y., Giacomelli, *Phys. Rev. Lett.* 112 (2014) 174103

Основные тезисы 1 части

- Уравнения с запаздыванием — бесконечномерные динамические системы
- Небольшое запаздывание — «маломерная» динамика и бифуркации (DDE-Biftool)
- Большое запаздывание (существенно больше других временных масштабов):
 - ▶ Псевдо-непрерывный спектр
 - ▶ Малые изменения параметра приводит к множественным бифуркациям
 - ▶ Нормальные формы в виде ур. в частных производных
 - ▶ Динамика многомерная: пространственно-временной хаос, турбулентность, дефекты, фронты и т.д. (в данном докладе не рассматривается) [see video]
 - ▶ Сосуществование большого количества аттракторов (буферность) — рассматривается в следующей части

Y., Wolfrum, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 9 (2010) 519
Lichtner, Wolfrum, Y., *SIAM J. Math. Anal.* 43 (2011) 788
Wolfrum, Y., Hövel, Schöll, *Eur. Phys. J. Special Topics* 191 (2010) 91
Y., Lücken, Wolfrum, Mielke, *Discr. Cont. Dyn. Sys. A* 35 (2015) 537
Y., Giacomelli, *Phys. Rev. Lett.* 112 (2014) 174103

Основные тезисы 1 части

- Уравнения с запаздыванием — бесконечномерные динамические системы
- Небольшое запаздывание — «маломерная» динамика и бифуркации (DDE-Biftool)
- Большое запаздывание (существенно больше других временных масштабов):
 - ▶ Псевдо-непрерывный спектр
 - ▶ Малые изменения параметра приводит к множественным бифуркациям
 - ▶ Нормальные формы в виде ур. в частных производных
 - ▶ Динамика многомерная: пространственно-временной хаос, турбулентность, дефекты, фронты и т.д. (в данном докладе не рассматривается) [see video]
 - ▶ Сосуществование большого количества аттракторов (буферность) — рассматривается в следующей части

Y., Wolfrum, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 9 (2010) 519
Lichtner, Wolfrum, Y., *SIAM J. Math. Anal.* 43 (2011) 788
Wolfrum, Y., Hövel, Schöll, *Eur. Phys. J. Special Topics* 191 (2010) 91
Y., Lücken, Wolfrum, Mielke, *Discr. Cont. Dyn. Sys. A* 35 (2015) 537
Y., Giacomelli, *Phys. Rev. Lett.* 112 (2014) 174103

Основные тезисы 1 части

- Уравнения с запаздыванием — бесконечномерные динамические системы
- Небольшое запаздывание — «маломерная» динамика и бифуркации (DDE-Biftool)
- Большое запаздывание (существенно больше других временных масштабов):
 - ▶ Псевдо-непрерывный спектр
 - ▶ Малые изменения параметра приводит к множественным бифуркациям
 - ▶ Нормальные формы в виде ур. в частных производных
 - ▶ Динамика многомерная: пространственно-временной хаос, турбулентность, дефекты, фронты и т.д. (в данном докладе не рассматривается) [see video]
 - ▶ Сосуществование большого количества аттракторов (буферность) — рассматривается в следующей части

Y., Wolfrum, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 9 (2010) 519
Lichtner, Wolfrum, Y., *SIAM J. Math. Anal.* 43 (2011) 788
Wolfrum, Y., Hövel, Schöll, *Eur. Phys. J. Special Topics* 191 (2010) 91
Y., Lücken, Wolfrum, Mielke, *Discr. Cont. Dyn. Sys. A* 35 (2015) 537
Y., Giacomelli, *Phys. Rev. Lett.* 112 (2014) 174103

Основные тезисы 1 части

- Уравнения с запаздыванием — бесконечномерные динамические системы
- Небольшое запаздывание — «маломерная» динамика и бифуркации (DDE-Biftool)
- Большое запаздывание (существенно больше других временных масштабов):
 - ▶ Псевдо-непрерывный спектр
 - ▶ Малые изменения параметра приводит к множественным бифуркациям
 - ▶ Нормальные формы в виде ур. в частных производных
 - ▶ Динамика многомерная: пространственно-временной хаос, турбулентность, дефекты, фронты и т.д. (в данном докладе не рассматривается) [see video]
 - ▶ Сосуществование большого количества аттракторов (буферность) — рассматривается в следующей части

Y., Wolfrum, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 9 (2010) 519
Lichtner, Wolfrum, Y., *SIAM J. Math. Anal.* 43 (2011) 788
Wolfrum, Y., Hövel, Schöll, *Eur. Phys. J. Special Topics* 191 (2010) 91
Y., Lücken, Wolfrum, Mielke, *Discr. Cont. Dyn. Sys. A* 35 (2015) 537
Y., Giacomelli, *Phys. Rev. Lett.* 112 (2014) 174103

Основные тезисы 1 части

- Уравнения с запаздыванием — бесконечномерные динамические системы
- Небольшое запаздывание — «маломерная» динамика и бифуркации (DDE-Biftool)
- Большое запаздывание (существенно больше других временных масштабов):
 - ▶ Псевдо-непрерывный спектр
 - ▶ Малые изменения параметра приводит к множественным бифуркациям
 - ▶ Нормальные формы в виде ур. в частных производных
 - ▶ Динамика многомерная: пространственно-временной хаос, турбулентность, дефекты, фронты и т.д. (в данном докладе не рассматривается) [see video]
 - ▶ Сосуществование большого количества аттракторов (буферность) — рассматривается в следующей части

Y., Wolfrum, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 9 (2010) 519
Lichtner, Wolfrum, Y., *SIAM J. Math. Anal.* 43 (2011) 788
Wolfrum, Y., Hövel, Schöll, *Eur. Phys. J. Special Topics* 191 (2010) 91
Y., Lücken, Wolfrum, Mielke, *Discr. Cont. Dyn. Sys. A* 35 (2015) 537
Y., Giacomelli, *Phys. Rev. Lett.* 112 (2014) 174103

Основные тезисы 1 части

- Уравнения с запаздыванием — бесконечномерные динамические системы
- Небольшое запаздывание — «маломерная» динамика и бифуркации (DDE-Biftool)
- Большое запаздывание (существенно больше других временных масштабов):
 - ▶ Псевдо-непрерывный спектр
 - ▶ Малые изменения параметра приводит к множественным бифуркациям
 - ▶ Нормальные формы в виде ур. в частных производных
 - ▶ Динамика многомерная: пространственно-временной хаос, турбулентность, дефекты, фронты и т.д. (в данном докладе не рассматривается) [see video]
 - ▶ Сосуществование большого количества аттракторов (буферность) — рассматривается в следующей части

Y., Wolfrum, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 9 (2010) 519
Lichtner, Wolfrum, Y., *SIAM J. Math. Anal.* 43 (2011) 788
Wolfrum, Y., Hövel, Schöll, *Eur. Phys. J. Special Topics* 191 (2010) 91
Y., Lücken, Wolfrum, Mielke, *Discr. Cont. Dyn. Sys. A* 35 (2015) 537
Y., Giacomelli, *Phys. Rev. Lett.* 112 (2014) 174103

Outline

- 1 Уравнения с запаздыванием и их основные свойства
 - Начальная задача, примеры, пространства
 - Устойчивость
 - Большое запаздывание
- 2 Рост числа периодических решений (reappearance)
 - Рост числа решений с увеличением запаздывания
 - Устойчивость
- 3 Преобразование временных запаздываний в динамических сетях
 - Преобразование временных сдвигов
 - Создание структур с помощью запаздываний
 - Структуры на двухмерной решетке

Повторение (rearrange) периодических решений

$$x'(t) = f(x(t), x(t - \tau))$$

- Если при $\tau = \tau_0$ существует периодическое решение

$$x_0(t) = x_0(t + T_0), \quad T_0 \text{ — период}$$

- Тогда то же решение существует при $\tau_n = \tau_0 + nT_0$.

$$\begin{aligned} x'_0(t) &= f(x_0(t), x_0(t - \tau_0)) = \\ &= f(x_0(t), x_0(t - \tau_0 - nT_0)) = f(x_0(t), x_0(t - \tau_n)) \end{aligned}$$

Повторение (rearrange) периодических решений

$$x'(t) = f(x(t), x(t - \tau))$$

- Если при $\tau = \tau_0$ существует периодическое решение

$$x_0(t) = x_0(t + T_0), \quad T_0 \text{ — период}$$

- Тогда то же решение существует при $\tau_n = \tau_0 + nT_0$.

$$\begin{aligned} x'_0(t) &= f(x_0(t), x_0(t - \tau_0)) = \\ &= f(x_0(t), x_0(t - \tau_0 - nT_0)) = f(x_0(t), x_0(t - \tau_n)) \end{aligned}$$

Повторение (rearrange) периодических решений

$$x'(t) = f(x(t), x(t - \tau))$$

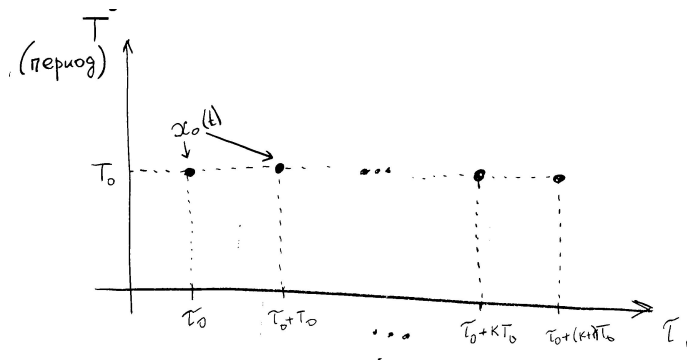
- Если при $\tau = \tau_0$ существует периодическое решение

$$x_0(t) = x_0(t + T_0), \quad T_0 \text{ — период}$$

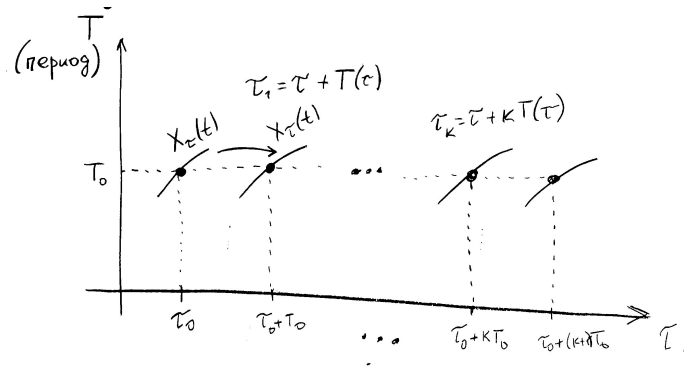
- Тогда **то же** решение существует при $\tau_n = \tau_0 + nT_0$.

$$\begin{aligned} x'_0(t) &= f(x_0(t), x_0(t - \tau_0)) = \\ &= f(x_0(t), x_0(t - \tau_0 - nT_0)) = f(x_0(t), x_0(t - \tau_n)) \end{aligned}$$

Повторное возникновение семейств периодических решений



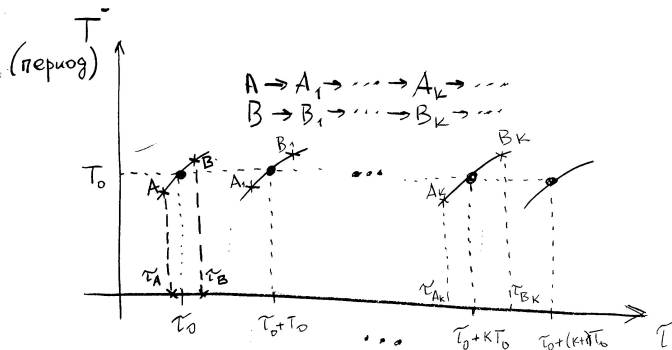
Повторное возникновение семейств периодических решений



- Решение $x_0(t)$ может быть продолжено вдоль параметра τ : $x_0(t; \tau)$
- Семейство периодических решений также переносится

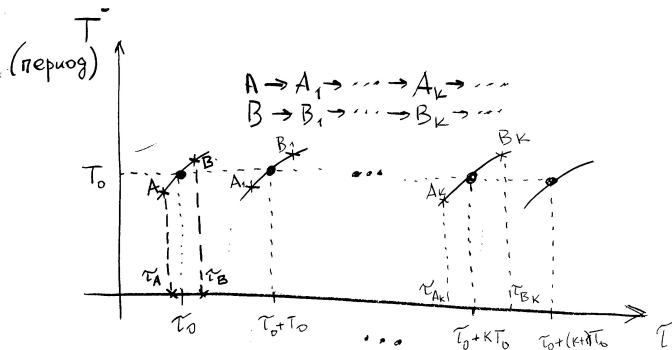
$$\tau_k(\tau) = \tau + kT(\tau)$$

Свойства отображения $\tau_k(\tau) = \tau + kT(\tau)$



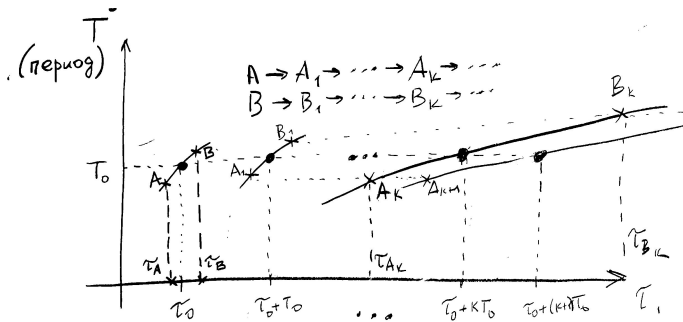
- рассмотрим отображение интервала $[\tau_A, \tau_B] \rightarrow [\tau_{A_1}, \tau_{B_2}] \rightarrow \dots \rightarrow [\tau_{A_k}, \tau_{B_k}] \rightarrow \dots$
- $\tau_{B_k} - \tau_{A_k} = \tau_B + kT(\tau_B) - \tau_A - kT(\tau_A) = \tau_B - \tau_A + k(T(\tau_B) - T(\tau_A))$
- с увеличением k , интервал увеличивается (в общем случае $T(\tau_B) \neq T(\tau_A)$)
- длина интервала $\tau_{B_k} - \tau_{A_k}$ растёт линейно с ростом запаздывания
- интервалы перекрываются, что ведёт к мультистабильности

Свойства отображения $\tau_k(\tau) = \tau + kT(\tau)$



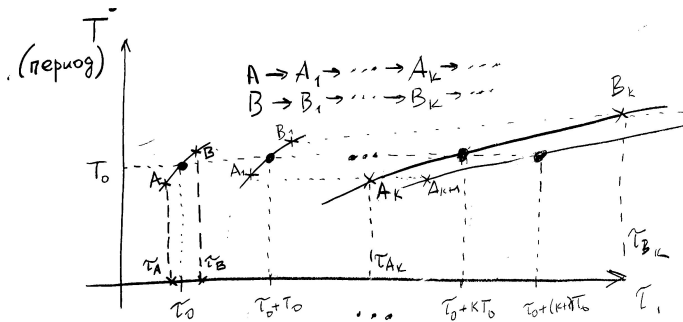
- рассмотрим отображение интервала $[\tau_A, \tau_B] \rightarrow [\tau_{A_1}, \tau_{B_2}] \rightarrow \dots \rightarrow [\tau_{A_k}, \tau_{B_k}] \rightarrow \dots$
- $\tau_{B_k} - \tau_{A_k} = \tau_B + kT(\tau_B) - \tau_A - kT(\tau_A) = \tau_B - \tau_A + k(T(\tau_B) - T(\tau_A))$
- с увеличением k , интервал увеличивается (в общем случае $T(\tau_B) \neq T(\tau_A)$)
- длина интервала $\tau_{B_k} - \tau_{A_k}$ растет линейно с ростом запаздывания
- интервалы перекрываются, что ведет к мультистабильности

Свойства отображения $\tau_k(\tau) = \tau + kT(\tau)$



- рассмотрим отображение интервала $[\tau_A, \tau_B] \rightarrow [\tau_{A_1}, \tau_{B_1}] \rightarrow \dots \rightarrow [\tau_{A_k}, \tau_{B_k}] \rightarrow \dots$
- $\tau_{B_k} - \tau_{A_k} = \tau_B + kT(\tau_B) - \tau_A - kT(\tau_A) = \tau_B - \tau_A + k(T(\tau_B) - T(\tau_A))$
- с увеличением k , интервал увеличивается (в общем случае $T(\tau_B) \neq T(\tau_A)$)
- длина интервала $\tau_{B_k} - \tau_{A_k}$ растет линейно с ростом запаздывания
- интервалы перекрываются, что ведет к мультистабильности

Свойства отображения $\tau_k(\tau) = \tau + kT(\tau)$



- рассмотрим отображение интервала $[\tau_A, \tau_B] \rightarrow [\tau_{A_1}, \tau_{B_2}] \rightarrow \dots \rightarrow [\tau_{A_k}, \tau_{B_k}] \rightarrow \dots$
- $\tau_{B_k} - \tau_{A_k} = \tau_B + kT(\tau_B) - \tau_A - kT(\tau_A) = \tau_B - \tau_A + k(T(\tau_B) - T(\tau_A))$
- с увеличением k , интервал увеличивается (в общем случае $T(\tau_B) \neq T(\tau_A)$)
- длина интервала $\tau_{B_k} - \tau_{A_k}$ растёт линейно с ростом запаздывания
- интервалы перекрываются, что ведёт к мультистабильности

Общие следствия, вытекающие из отображения $\tau_k(\tau) = \tau + kT(\tau)$

- Количество сосуществующих периодических решений в системах с запаздывания растет линейно с ростом τ

$$N \approx \left(\frac{1}{T_{\min}} - \frac{1}{T_{\max}} \right) \tau$$

- Свойства семейств зависят от функции $T(\tau)$
- Седло-узловые бифуркации

$$\tau'_k(\tau) = 1 + kT'(\tau) = 0$$

для больших k определяются условием $T'(\tau) = 0$ и также повторяются счетное количество раз с ростом τ

Общие следствия, вытекающие из отображения $\tau_k(\tau) = \tau + kT(\tau)$

- Количество сосуществующих периодических решений в системах с запаздывания растет линейно с ростом τ

$$N \approx \left(\frac{1}{T_{\min}} - \frac{1}{T_{\max}} \right) \tau$$

- Свойства семейств зависят от функции $T(\tau)$
- Седло-узловые бифуркации

$$\tau'_k(\tau) = 1 + kT'(\tau) = 0$$

для больших k определяются условием $T'(\tau) = 0$ и также повторяются счетное количество раз с ростом τ

Общие следствия, вытекающие из отображения $\tau_k(\tau) = \tau + kT(\tau)$

- Количество сосуществующих периодических решений в системах с запаздывания растет линейно с ростом τ

$$N \approx \left(\frac{1}{T_{\min}} - \frac{1}{T_{\max}} \right) \tau$$

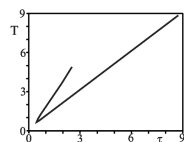
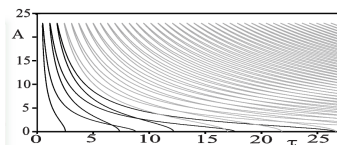
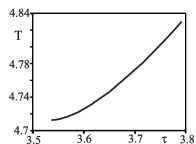
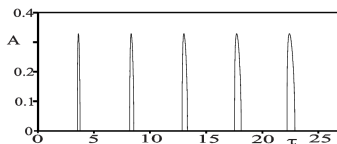
- Свойства семейств зависят от функции $T(\tau)$
- Седло-узловые бифуркации

$$\tau'_k(\tau) = 1 + kT'(\tau) = 0$$

для больших k определяются условием $T'(\tau) = 0$ и также повторяются счетное количество раз с ростом τ

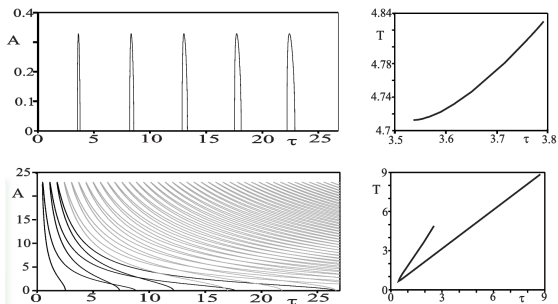
Примеры

- Осциллятор Дуффинга $x''(t) + dx'(t) + ax(t) + x^3(t) + b(x(t) - x(t - \tau)) = 0$

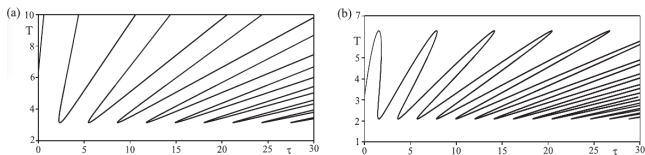


Примеры

- Осциллятор Дуффинга $x''(t) + dx'(t) + ax(t) + x^3(t) + b(x(t) - x(t - \tau)) = 0$



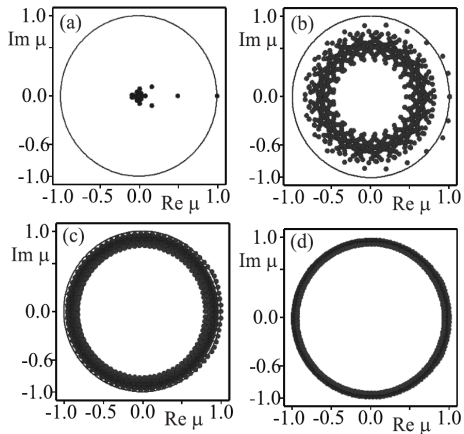
- "Стюарт-Ландау" осциллятор $z'(t) = (\alpha + i\beta)z(t) - z(t)|z(t)|^2 + z(t - \tau)$



Outline

- 1 Уравнения с запаздыванием и их основные свойства
 - Начальная задача, примеры, пространства
 - Устойчивость
 - Большое запаздывание
- 2 Рост числа периодических решений (reappearance)
 - Рост числа решений с увеличением запаздывания
 - **Устойчивость**
- 3 Преобразование временных запаздываний в динамических сетях
 - Преобразование временных сдвигов
 - Создание структур с помощью запаздываний
 - Структуры на двухмерной решетке

Пример численного счета Флоке мультипликаторов

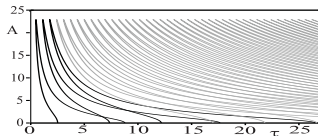


(a) $n = 2$ ($\tau = 2.2$)

(b) $n = 20$ ($\tau = 23.7$)

(c) $n = 80$ ($\tau = 91.6$)

(d) $n = 140$ ($\tau = 159.5$)



С увеличением запаздывания, подсчет мультипликаторов становится все более сложным

Устойчивость периодических решений

Линеаризация на решении

$$x_n(t; \tau) = x_0(t, l)$$

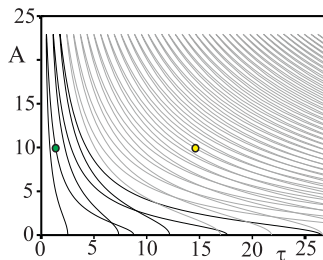
на n -той ветке, $\tau = l + nT(l)$

$$\xi'(t) = A(t; l)\xi(t) + B(t; l)\xi(t - \tau),$$

где

$$A(t; l) = D_1 f(x_0(t; l), x_0(t - l; l)),$$

$$B(t; l) = D_2 f(x_0(t; l), x_0(t - l; l))$$



$\mu = e^{\lambda T}$ — Флоке мультипликатор $\Leftrightarrow \xi(t) = p(t)e^{\lambda t}$, $p(t) = p(t + T)$ (Хейл, 1970)

$$p'(t) = (A(t; l) - \lambda \text{Id})p(t) + e^{-\lambda \tau} B(t; l)p(t - \tau)$$

Поскольку $p(t)$ является T -периодическим, то $p(t - \tau) = p(t - l - nT(l)) = p(t - l)$ и

$$p'(t) = (A(t; l) - \lambda \text{Id})p(t) + e^{-\lambda \tau} B(t; l)p(t - l)$$

Устойчивость периодических решений

Линеаризация на решении

$$x_n(t; \tau) = x_0(t, l)$$

на n -той ветке, $\tau = l + nT(l)$

$$\xi'(t) = A(t; l)\xi(t) + B(t; l)\xi(t - \tau),$$

где

$$A(t; l) = D_1 f(x_0(t; l), x_0(t - l; l)),$$

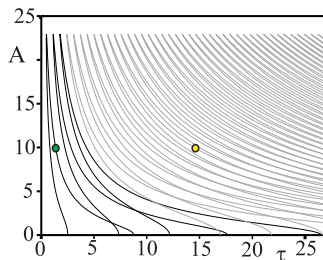
$$B(t; l) = D_2 f(x_0(t; l), x_0(t - l; l))$$

$\mu = e^{\lambda T}$ — Флоке мультипликатор $\Leftrightarrow \xi(t) = p(t)e^{\lambda t}$, $p(t) = p(t + T)$ (Хейл, 1970)

$$p'(t) = (A(t; l) - \lambda \text{Id})p(t) + e^{-\lambda \tau} B(t; l)p(t - \tau)$$

Поскольку $p(t)$ является T -периодическим, то $p(t - \tau) = p(t - l - nT(l)) = p(t - l)$ и

$$p'(t) = (A(t; l) - \lambda \text{Id})p(t) + e^{-\lambda \tau} B(t; l)p(t - l)$$



Устойчивость периодических решений

Линеаризация на решении

$$x_n(t; \tau) = x_0(t, l)$$

на n -той ветке, $\tau = l + nT(l)$

$$\xi'(t) = A(t; l)\xi(t) + B(t; l)\xi(t - \tau),$$

где

$$A(t; l) = D_1 f(x_0(t; l), x_0(t - l; l)),$$

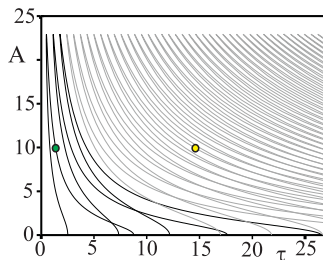
$$B(t; l) = D_2 f(x_0(t; l), x_0(t - l; l))$$

$\mu = e^{\lambda T}$ — Флоке мультипликатор $\Leftrightarrow \xi(t) = p(t)e^{\lambda t}$, $p(t) = p(t + T)$ (Хейл, 1970)

$$p'(t) = (A(t; l) - \lambda \text{Id})p(t) + e^{-\lambda \tau} B(t; l)p(t - \tau)$$

Поскольку $p(t)$ является T -периодическим, то $p(t - \tau) = p(t - l - nT(l)) = p(t - l)$ и

$$p'(t) = (A(t; l) - \lambda \text{Id})p(t) + e^{-\lambda \tau} B(t; l)p(t - l)$$



Псевдо-непрерывный спектр

$$p'(t) = (A(t; l) - \lambda \text{Id})p(t) + e^{-\lambda \tau} B(t; l)p(t-l)$$

- запаздывание входит только в виде параметра $e^{-\lambda \tau}$
- согласно [1-2], существует характеристическая функция

$$\chi(\lambda, e^{-\lambda \tau}) = 0$$

нули которой определяют Флоке экспоненты λ (мультипликаторы $\mu = e^{\lambda T}$)

- Из вида зависимости уравнения $\chi(\lambda, e^{-\lambda \tau}) = 0$ от запаздывания следует существование псевдо-непрерывного спектра

-
- [1] Szalai, Stepan, Hogan, SIAM J. Sci. Comp. 28, 1301 (2006)
 - [2] Sieber, Szalai, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 10,129 (2011)
 - [3] Y., Perlikowski, Phys. Rev. E. 79 (2009) 046221
 - [4] Sieber, Wolfrum, Lichtner, Y., Discr. Cont. Dyn. Syst. A 33, 3109 (2013)

Псевдо-непрерывный спектр

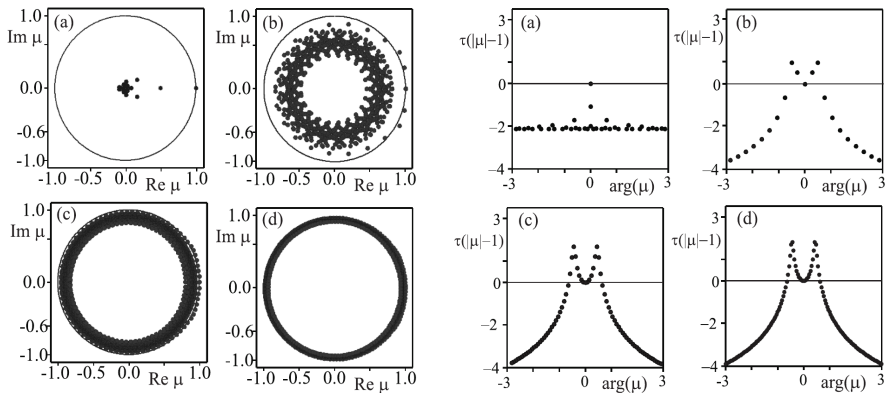
- Существует семейство Флоке мультипликаторов

$$|\mu_\omega| = 1 + \frac{1}{\tau} \gamma(\omega) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\tau^2}\right)$$

где $\omega \in [0, 2\pi]$ параметр вдоль семейства

- Основные свойства:
 - 1 $|\mu_\omega| \rightarrow 1$ при $\tau \rightarrow \infty$
 - 2 Функция (знак) $\gamma(\omega)$ определяет устойчивость
 - 3 Для любого фиксированного τ , параметр ω принимает счетное число значений ω_j , причем $\omega_{j+1} - \omega_j \approx 2\pi/\tau$

Пример псевдо-непрерывного спектра Флоке



(a) $n = 2$ ($\tau = 2.2$); (b) $n = 20$ ($\tau = 23.7$); (c) $n = 80$ ($\tau = 91.6$); (d) $n = 140$ ($\tau = 159.5$)

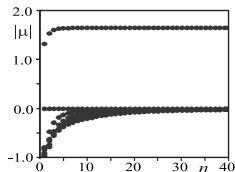
$$|\mu_\omega| = 1 + \frac{1}{\tau} \gamma(\omega) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\tau^2}\right)$$

Сильно-неустойчивый спектр Флоке

$$\mu \rightarrow \bar{\mu}, \quad |\bar{\mu}| > 1.$$

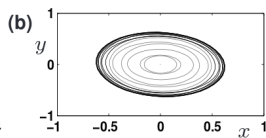
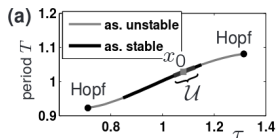
- $|\bar{\mu}| > 1$ — пер. решение сильно неустойчиво
- Соответствующий мультипликатор \approx мультипликатор ОДУ

$$\xi'(t) = A(t; l)\xi(t) + \cancel{B(t; l)\xi(t-t)}$$



Интересные следствия

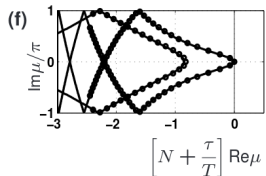
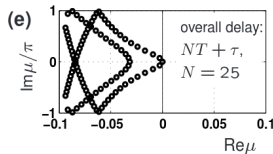
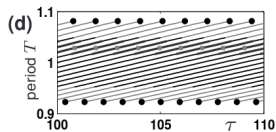
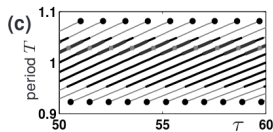
- при условиях:
 - ▶ если сильно-неустойчивый спектр отсутствует
 - ▶ псевдо-непрерывный спектр устойчив
- система имеет $\sim \tau$ устойчивых периодических решений (аттракторов)



- пример:

$$x' = \alpha x - 2\pi y - x(x^2 + y^2)$$

$$y' = 2\pi x + \alpha y - y(x^2 + y^2) + y(t - \tau)$$



Sieber, Wolfrum, Lichtner, Y.,
 Discr. Cont. Dyn. Syst. A 33,
 3109 (2013)

Основные тезисы 2 части

- Количество сосуществующих периодических решений растёт по крайней мере $\sim \tau$
- Количество устойчивых пер. решений $\sim \tau$ при условии устойчивости ПНС (грубая ситуация)
- Достаточно найти одну ветвь периодических решений, далее использовать $\tau_k = \tau + kT(\tau)$

Y., Perlikowski, *Phys. Rev. E*. 79 (2009) 046221

Sieber, Wolfrum, Lichtner, Y., *Discr. Cont. Dyn. Syst. A* 33 (2013) 3109

Основные тезисы 2 части

- Количество сосуществующих периодических решений растёт по крайней мере $\sim \tau$
- Количество устойчивых пер. решений $\sim \tau$ при условии устойчивости ПНС (грубая ситуация)
- Достаточно найти одну ветвь периодических решений, далее использовать $\tau_k = \tau + kT(\tau)$

Y., Perlikowski, *Phys. Rev. E*. 79 (2009) 046221

Sieber, Wolfrum, Lichtner, Y., *Discr. Cont. Dyn. Syst. A* 33 (2013) 3109

Основные тезисы 2 части

- Количество сосуществующих периодических решений растёт по крайней мере $\sim \tau$
- Количество устойчивых пер. решений $\sim \tau$ при условии устойчивости ПНС (грубая ситуация)
- Достаточно найти одну ветвь периодических решений, далее использовать $\tau_k = \tau + kT(\tau)$

Y., Perlikowski, *Phys. Rev. E*. 79 (2009) 046221

Sieber, Wolfrum, Lichtner, Y., *Discr. Cont. Dyn. Syst. A* 33 (2013) 3109

Outline

- 1 Уравнения с запаздыванием и их основные свойства
 - Начальная задача, примеры, пространства
 - Устойчивость
 - Большое запаздывание
- 2 Рост числа периодических решений (reappearance)
 - Рост числа решений с увеличением запаздывания
 - Устойчивость
- 3 Преобразование временных запаздываний в динамических сетях
 - Преобразование временных сдвигов
 - Создание структур с помощью запаздываний
 - Структуры на двухмерной решетке

Outline

1 Уравнения с запаздыванием и их основные свойства

- Начальная задача, примеры, пространства
- Устойчивость
- Большое запаздывание

2 Рост числа периодических решений (reappearance)

- Рост числа решений с увеличением запаздывания
- Устойчивость

3 Преобразование временных запаздываний в динамических сетях

- Преобразование временных сдвигов
- Создание структур с помощью запаздываний
- Структуры на двухмерной решетке

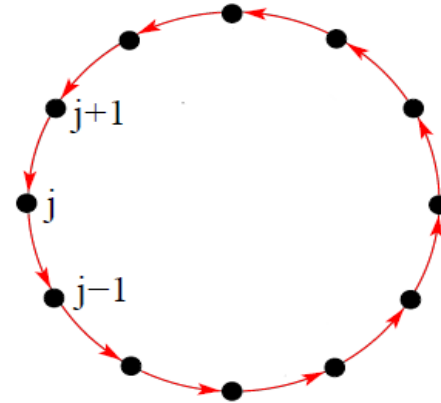
Outline

- 1 Уравнения с запаздыванием и их основные свойства
 - Начальная задача, примеры, пространства
 - Устойчивость
 - Большое запаздывание
- 2 Рост числа периодических решений (reappearance)
 - Рост числа решений с увеличением запаздывания
 - Устойчивость
- 3 Преобразование временных запаздываний в динамических сетях
 - Преобразование временных сдвигов
 - Создание структур с помощью запаздываний
 - Структуры на двухмерной решетке

Time-shift transformation, Simple example

- Ring of delay-coupled systems

$$u'_j = f(u_j(t), u_{j+1}(t - \tau_j))$$



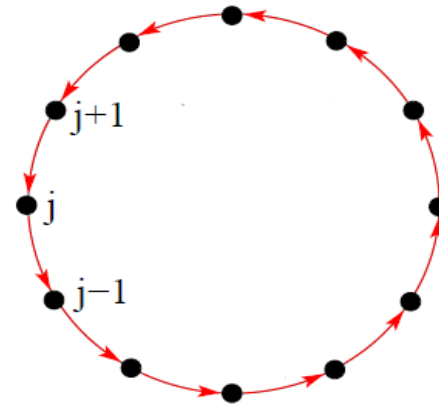
Time-shift transformation, Simple example

- Ring of delay-coupled systems

$$u'_j = f(u_j(t), u_{j+1}(t - \tau_j))$$

- Transformation

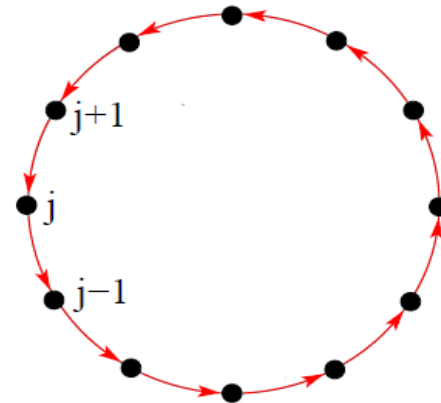
$$v_j(t) = u_j(t - \eta_j)$$



Time-shift transformation, Simple example

- Ring of delay-coupled systems

$$u'_j = f(u_j(t), u_{j+1}(t - \tau_j))$$



- Transformation

$$v_j(t) = u_j(t - \eta_j)$$

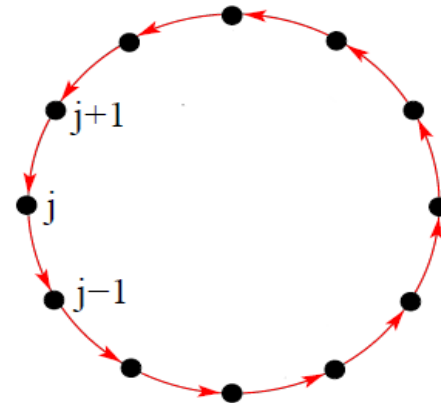
$$\begin{aligned} v'_j &= f(v_j(t), u_{j+1}(t - \eta_j - \tau_j)) = f(v_j(t), u_{j+1}(t - \eta_{j+1} + \eta_{j+1} - \eta_j - \tau_j)) \\ &= f(v_j(t), v_{j+1}(t + \eta_{j+1} - \eta_j - \tau_j)) \end{aligned}$$

$$v'_j = f(v_j(t), v_{j+1}(t - \tilde{\tau}_j)), \quad \tilde{\tau}_j = \tau_j - \eta_{j+1} + \eta_j$$

Time-shift transformation, Simple example

- Ring of delay-coupled systems

$$u'_j = f(u_j(t), u_{j+1}(t - \tau_j))$$



- Transformation

$$v_j(t) = u_j(t - \eta_j)$$

$$\begin{aligned} v'_j &= f(v_j(t), u_{j+1}(t - \eta_j - \tau_j)) = f(v_j(t), u_{j+1}(t - \eta_{j+1} + \eta_{j+1} - \eta_j - \tau_j)) \\ &= f(v_j(t), v_{j+1}(t + \eta_{j+1} - \eta_j - \tau_j)) \end{aligned}$$

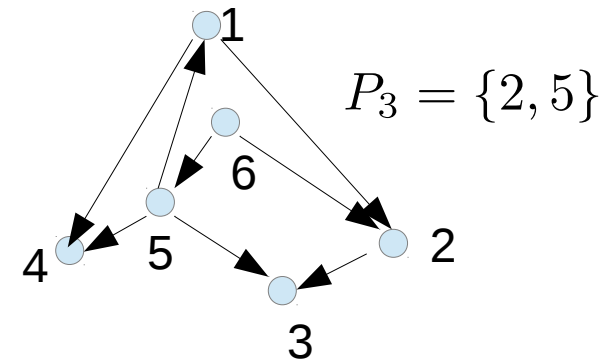
$$v'_j = f(v_j(t), v_{j+1}(t - \tilde{\tau}_j)), \quad \tilde{\tau}_j = \tau_j - \eta_{j+1} + \eta_j$$

- Reduce all delays, except one
- Make all delays identical $\tilde{\tau}_j = \tau$ - additional symmetry
- “Round-trip” delay remains invariant $\sum \tilde{\tau}_j = \sum \tau_j = \text{const}$

Time-shift transformation, arbitrary networks

$$u'_j = f_j \left(u_j(t), (u_k(t - \tau_k))_{k \in P_j} \right)$$

e.g. $u'_3 = f_3(u_3(t), u_2(t - \tau_2), u_5(t - \tau_5))$



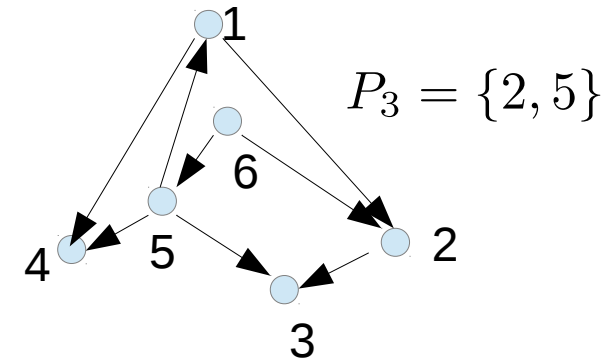
Time-shift transformation, arbitrary networks

$$u'_j = f_j \left(u_j(t), (u_k(t - \tau_k))_{k \in P_j} \right)$$

Transformation

$$v_j(t) = u_j(t - \eta_j)$$

$$v'_j = f_j \left(v_j(t), (v_k(t - \tilde{\tau}_k))_{k \in P_j} \right) \quad \tilde{\tau}_k = \tau_k - \eta_{k+1} + \eta_k$$



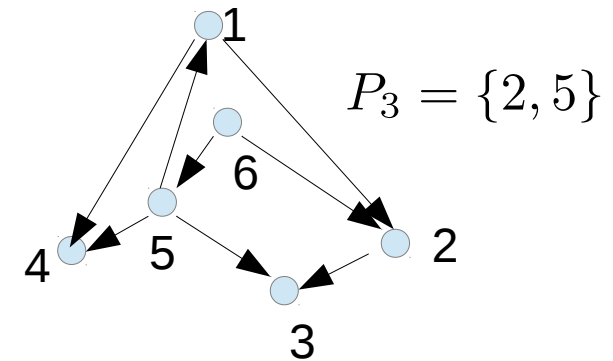
Time-shift transformation, arbitrary networks

$$u'_j = f_j \left(u_j(t), (u_k(t - \tau_k))_{k \in P_j} \right)$$

Transformation

$$v_j(t) = u_j(t - \eta_j)$$

$$v'_j = f_j \left(v_j(t), (v_k(t - \tilde{\tau}_k))_{k \in P_j} \right) \quad \tilde{\tau}_k = \tau_k - \eta_{k+1} + \eta_k$$



- Roundtrip-time along any closed path is invariant

$$T(c) = \left| \sum_{\ell_j \in c} \sigma_j \tau_j \right|, \quad \sigma_j = \pm 1$$

- Number of delays can be reduced to

$$C = L - N + 1$$

(maximal number of independent cycles)

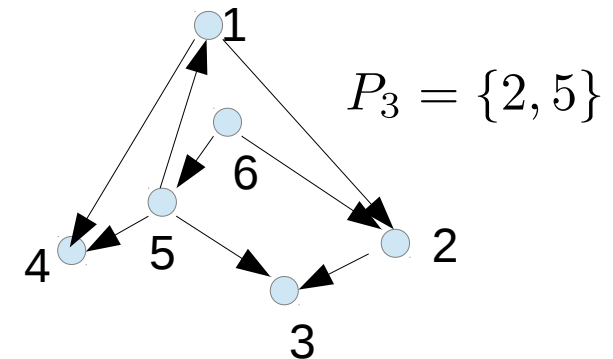
Time-shift transformation, arbitrary networks

$$u'_j = f_j \left(u_j(t), (u_k(t - \tau_k))_{k \in P_j} \right)$$

Transformation

$$v_j(t) = u_j(t - \eta_j)$$

$$v'_j = f_j \left(v_j(t), (v_k(t - \tilde{\tau}_k))_{k \in P_j} \right) \quad \tilde{\tau}_k = \tau_k - \eta_{k+1} + \eta_k$$



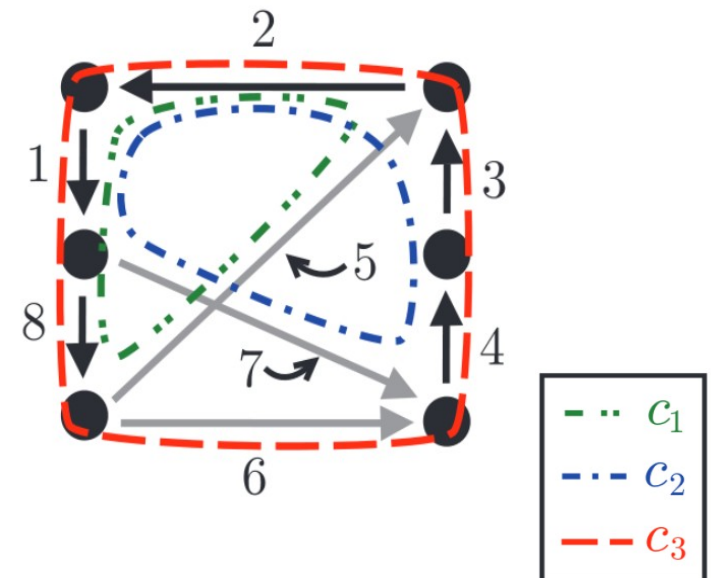
- Roundtrip-time along any closed path is invariant

$$T(c) = \left| \sum_{\ell_j \in c} \sigma_j \tau_j \right|, \quad \sigma_j = \pm 1$$

- Number of delays can be reduced to

$$C = L - N + 1$$

(maximal number of independent cycles)



Time-shift transformation, properties

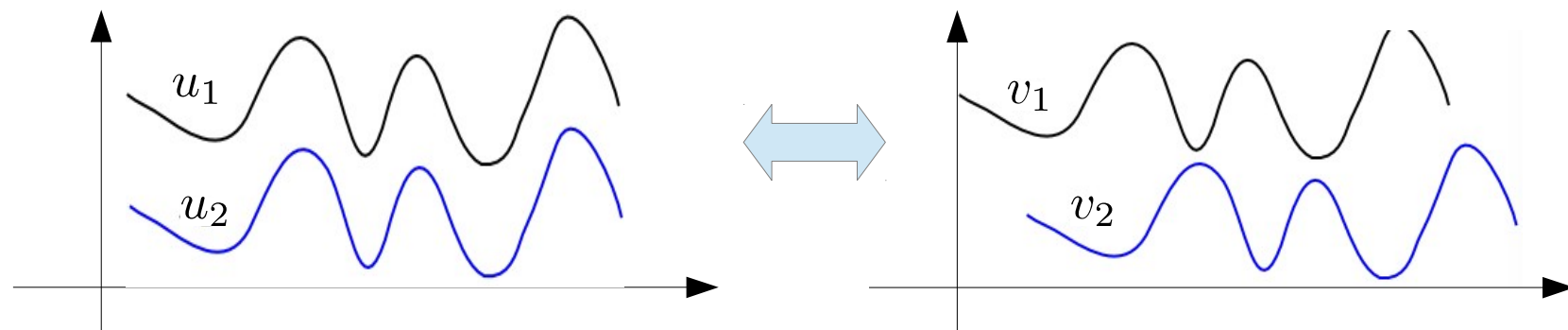
$$u'_j = f_j \left(u_j(t), (u_k(t - \tau_k))_{k \in P_j} \right) \quad (1)$$

$$v'_j = f_j \left(v_j(t), (v_k(t - \tilde{\tau}_k))_{k \in P_j} \right) \quad (2)$$

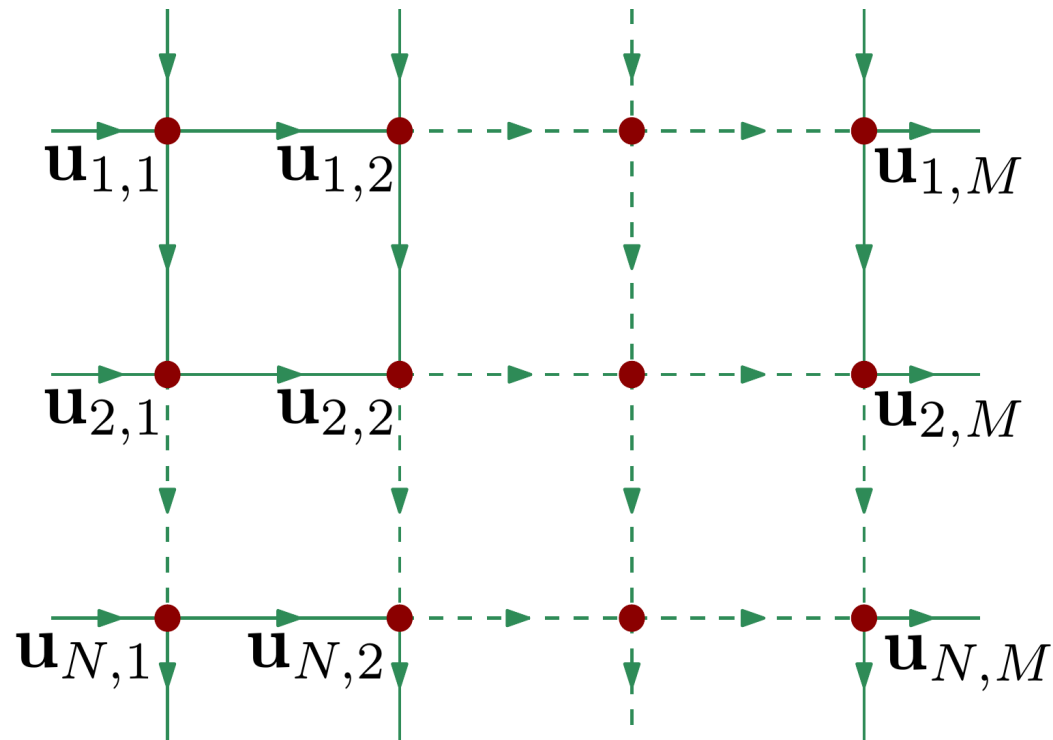
$$v_j(t) = u_j(t - \eta_j)$$

$$\tilde{\tau}_k = \tau_k - \eta_{k+1} + \eta_k$$

- Lücken, Pade, Knauer, Y., Europhys. Lett. 103, 2013
Lücken, Pade, Knauer, SIADS 14, 2015
- There is 1-1 correspondence between the invariant sets of (1) and (2)
- Lyapunov exponents (Floquet multipliers) are the same



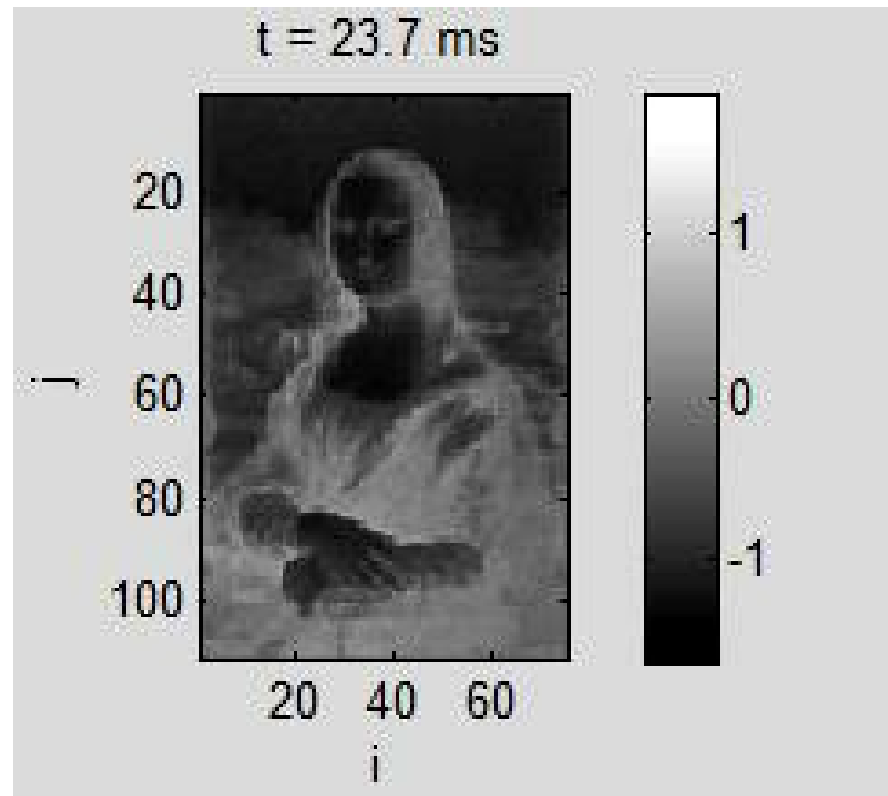
2D lattice



$$\frac{du_{nm}(t)}{dt} = F(u_{nm}(t), u_{n-1,m}(t - \tau_{nm}^{\downarrow}), u_{n,m-1}(t - \tau_{nm}^{\rightarrow}))$$

- Unidirectional coupling
- Delays in the coupling
- Periodic boundary conditions (2D torus)

Example of a pattern



- 2D lattice of 100×80 FitzHugh-Nagumo neurons with non-homogeneous delays.
- Time-evolution of the voltage is shown in gray scale

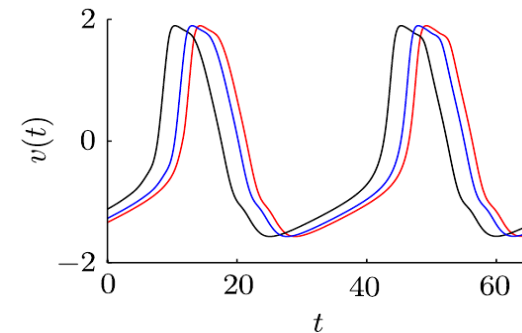
Example models

- FitzHugh-Nagumo neurons with synaptic coupling

$$\dot{x}_{nm} = x_{nm} - \frac{1}{3}x_{nm}^3 - y_{nm} + I + \frac{C}{2}(V_0 - x_{nm})(z_{n-1,m}(t - \tau) + z_{n,m-1}(t - \tau))$$

$$\dot{y}_{nm} = 0.08(x_{nm} + 0.7 - 0.8y_{nm})$$

$$\dot{z}_{nm} = 0.5 \frac{1 - z_{nm}}{1 + e^{-5(x_{nm} - 1)}} - 0.6z_{nm}$$



- Stuart-Landau oscillators

$$\dot{z}_{nm} = (\alpha + i\beta)z - z|z|^2 + \frac{C}{2}(z_{n-1,m}(t - \tau) + z_{n,m-1}(t - \tau))$$



Rigorous results

Identical delays

Homogeneous (synchronous) solutions

$$\frac{du_{nm}(t)}{dt} = F(u_{nm}(t), u_{n-1,m}(t - \tau), u_{n,m-1}(t - \tau))$$

$$\frac{du(t)}{dt} = F(u(t), u(t - \tau), u(t - \tau))$$

- There exist a stable periodic solution $u(t) = u(t + T)$
- For example, for SL oscillators

$$\dot{z} = (\alpha + i\beta)z - z|z|^2 + Cz(t - \tau)$$

$$z(t) = ae^{i\omega t}$$

Periodic solutions can be found analytically

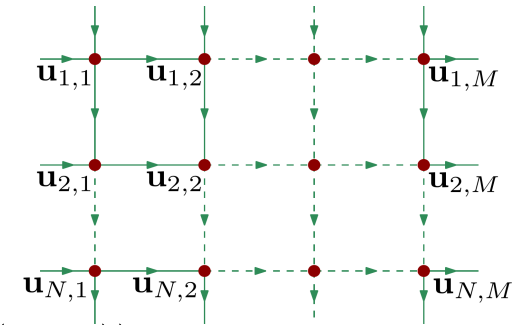
Identical delays: Plane waves

- Plane waves appear due to the symmetry

$$Z_N \times Z_M$$

$$z_{nm}(t) = ae^{i\omega t + iQ_n n + iQ_m m}$$

$$\dot{z}_{nm} = (\alpha + i\beta)z_{nm} - z_{nm}|z_{nm}|^2 + \frac{C}{2} (z_{n-1,m}(t - \tau) + z_{n,m-1}(t - \tau))$$



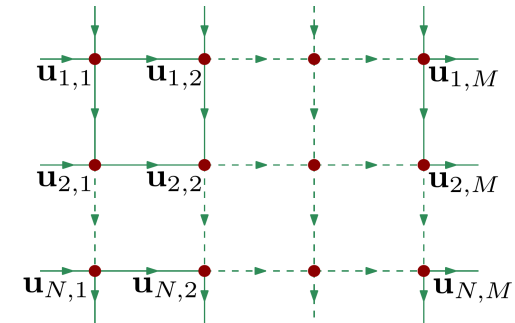
Identical delays: Plane waves

- Plane waves appear due to the symmetry

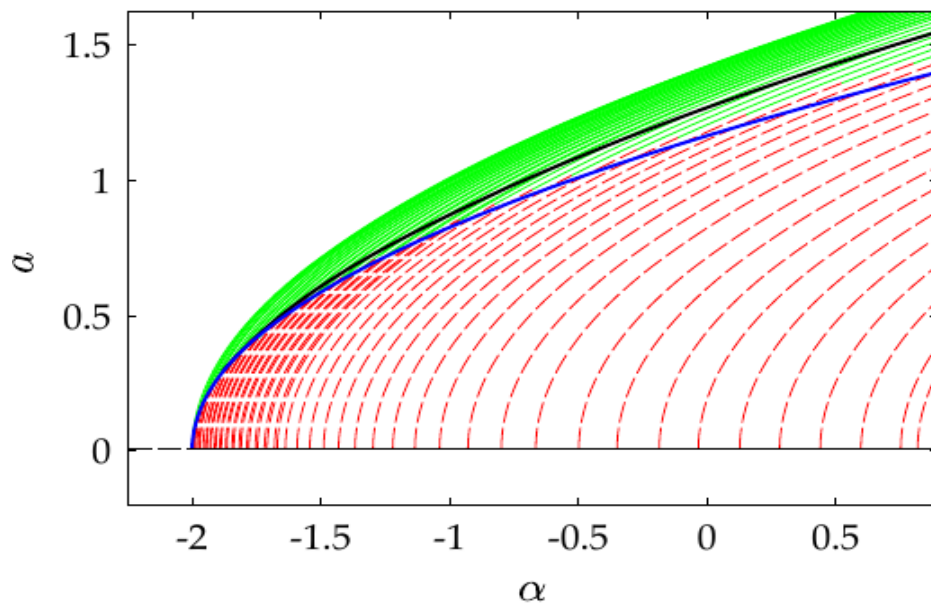
$$Z_N \times Z_M$$

$$z_{nm}(t) = ae^{i\omega t + iQ_n n + iQ_m m}$$

$$\dot{z}_{nm} = (\alpha + i\beta)z_{nm} - z_{nm}|z_{nm}|^2 + \frac{C}{2} (z_{n-1,m}(t - \tau) + z_{n,m-1}(t - \tau))$$

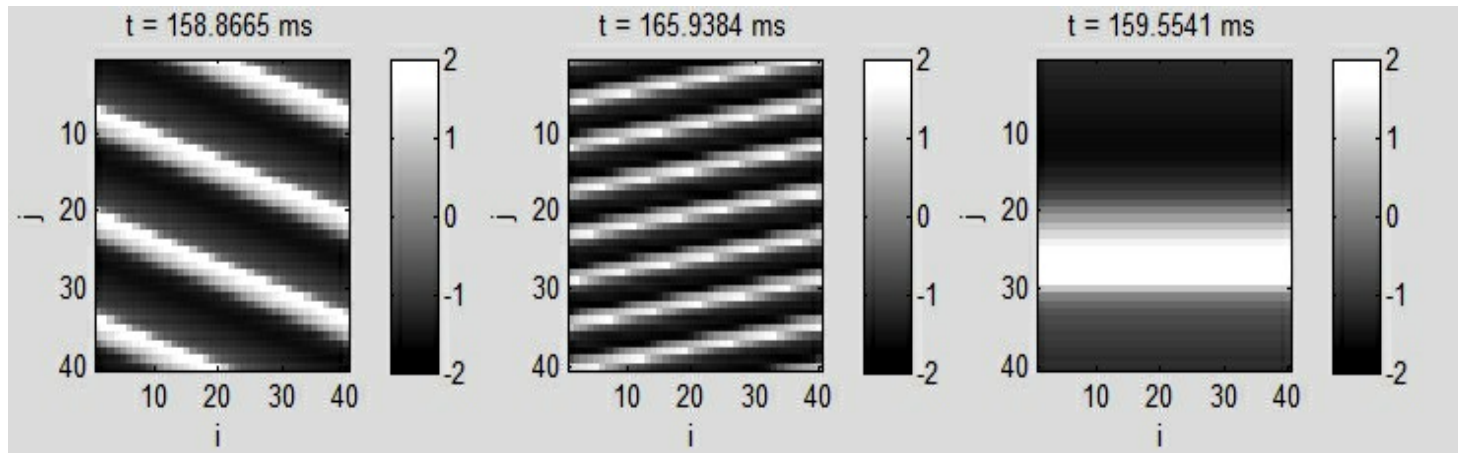
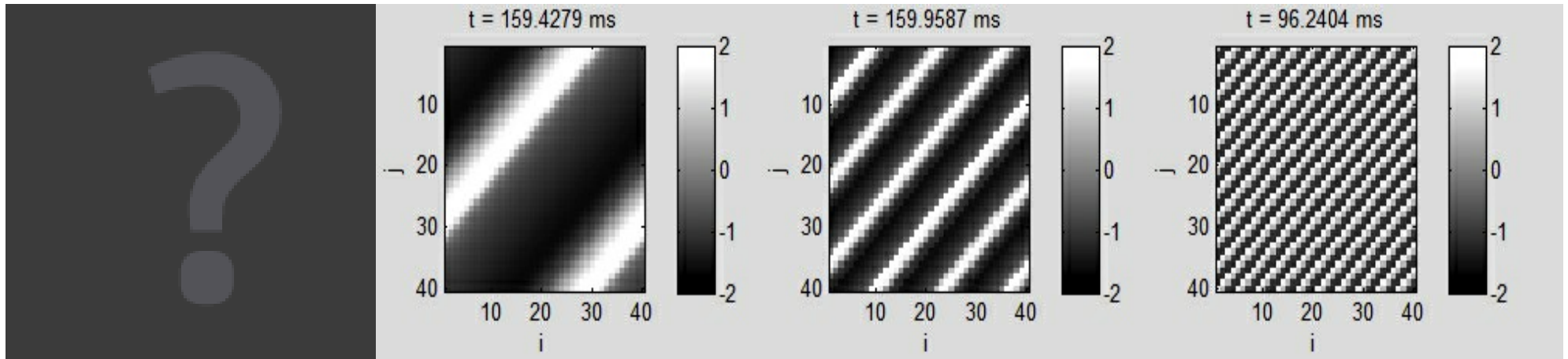


- Bifurcating periodic solutions in 5x5 torus of SL systems



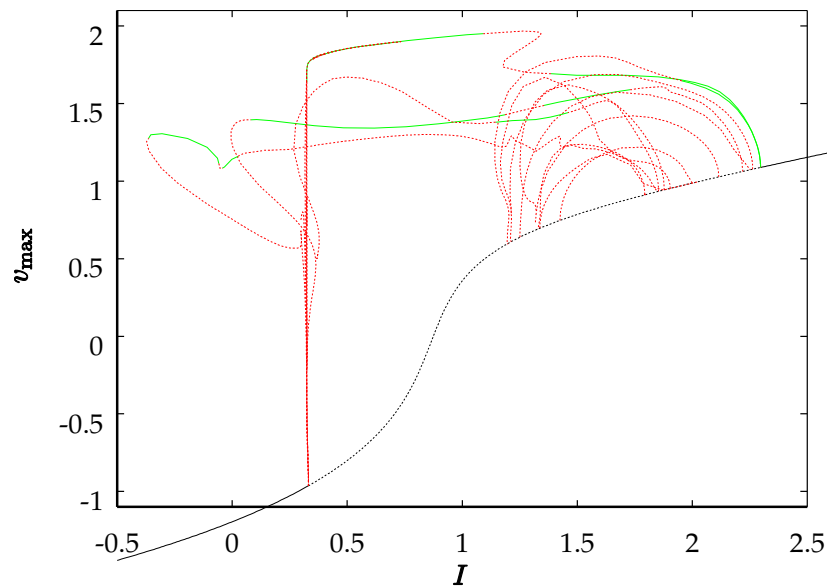
$\tau = 100$
 green – stable
 red – unstable
 blue – Eckhaus line
 first order approximation
 black – Eckhaus line, numerics

Homogeneous system summary: variety of coexisting stable plane waves



Bifurcating plane waves FHN System (numeric)

- Hopf bifurcations
- Numerical bifurcation diagram for FHN system (DDE-Biftool)



3×3 torus
 $\tau = 20, C = 2$
green – stable
red – unstable
black – stat. state

Nonhomogeneous delays

- Componentwise time shift transformation

$$v_{nm}(t) = u_{nm}(t - \eta_{nm})$$

$$\frac{du_{nm}(t)}{dt} = F(u_{nm}(t), u_{n-1,m}(t - \tau), u_{n,m-1}(t - \tau))$$



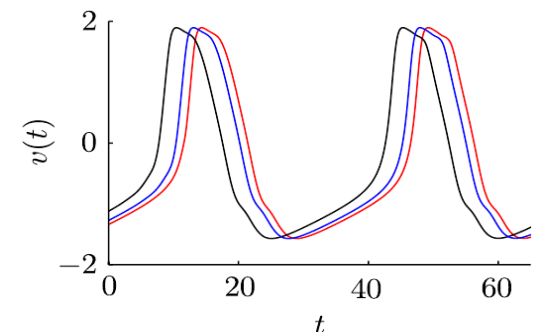
$$\frac{dv_{nm}(t)}{dt} = F(v_{nm}(t), v_{n-1,m}(t - \tau_{nm}^{\downarrow}), v_{n,m-1}(t - \tau_{nm}^{\rightarrow}))$$

- New nonhomogeneous delays

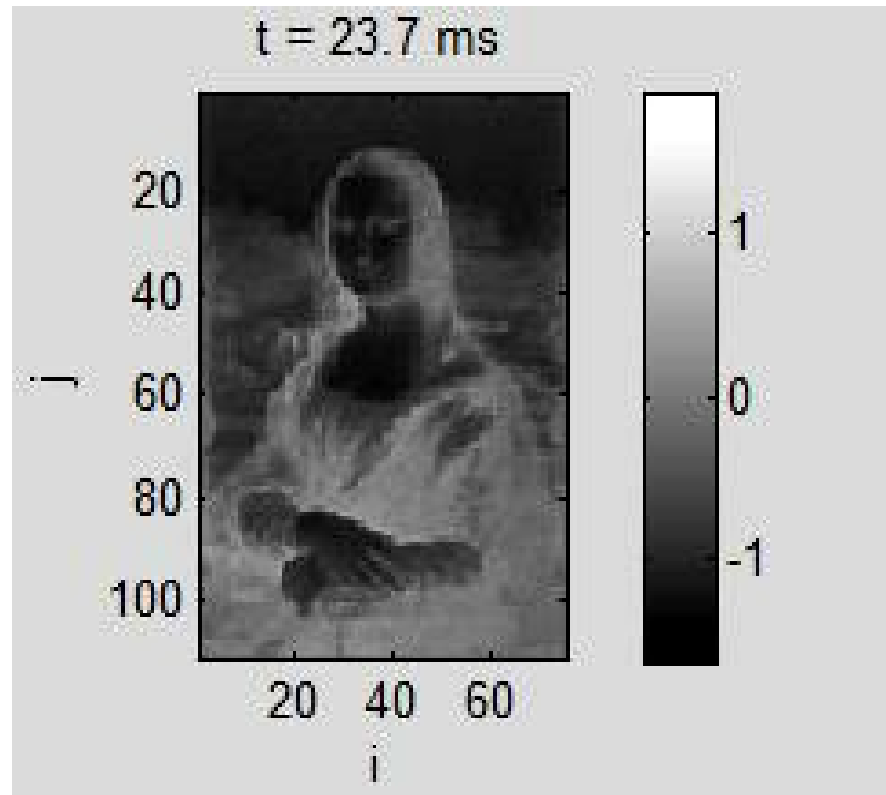
$$\tau_{nm}^{\downarrow} = \tau + \eta_{nm} - \eta_{n-1,m}$$

$$\tau_{nm}^{\rightarrow} = \tau + \eta_{nm} - \eta_{n,m-1}$$

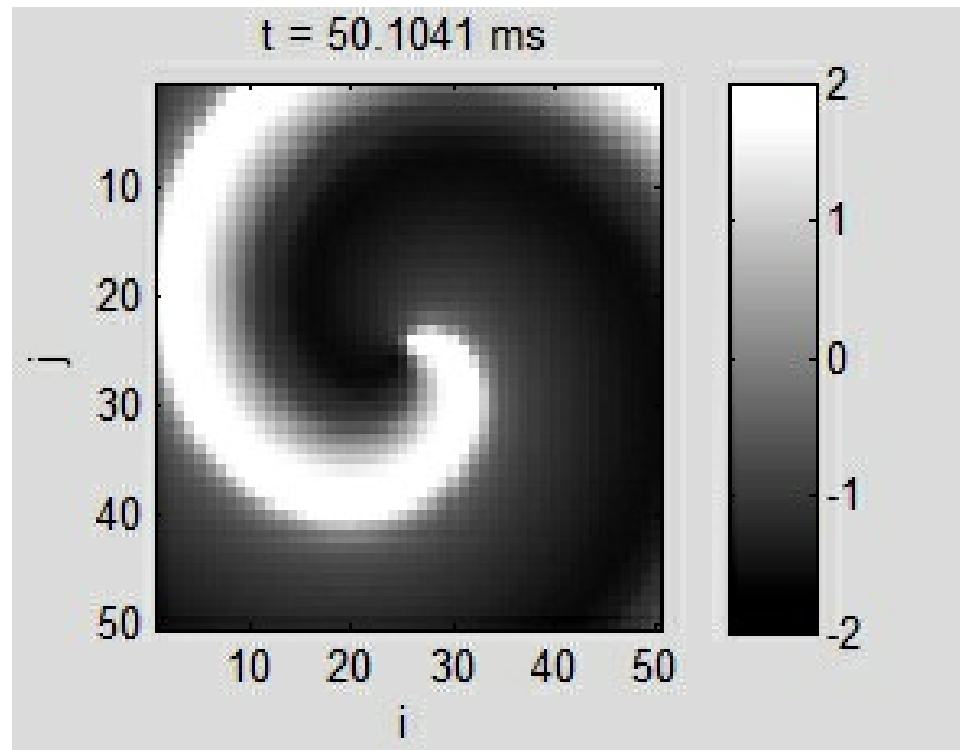
- New nonhomogeneous system has spiking times shifted by η_{nm}



Examples: **stable** 2D patterns



Examples: **stable** 2D patterns



Summary

- Delay coupled systems produce a variety of patterns
- Desired stable 2D patterns can be simply constructed

Lücken, Pade, Knauer, Y., Europhys. Lett. 103, 2013
Kantner, Schöll, Y. , Scientific Reports 5, 8522, 2015