

***Вихри в сверхпроводниках
как пример задачи нелинейной
физики***

***А.С.Мельников
Институт физики микроструктур РАН
Нижий Новгород***

*Отдел сверхпроводимости Института Физики Микроструктур РАН,
Нижний Новгород*



Лаборатория теории мезоскопических систем

*А.С.Мельников, Водолазов Д.Ю., Самохвалов А.В.,
И.Д.Токман, А.Ю.Аладышкин, С.В.Шаров, Д.Савинов,
И.Шерешевский, В.Позднякова, Н.Вдовичева
Аспиранты: А.Зотова, А.Путилов, В.Вадимов, А.Копасов,
П.Марычев
Алumni: М.Силаев, И.Хаймович, С.В.Миронов, А.Беспалов*

Введение, история, дела давно минувших дней

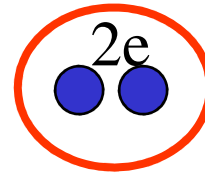
- ◆ Сверхпроводники в магнитном поле.
Сверхпроводимость I и II рода.
- ◆ Феноменологическая теория сверхпроводимости
Гинзбурга-Ландау
- ◆ Изолированный вихрь. Вихревая решетка.
- ◆ Динамика вихрей. Вихри как частицы. Как запретить вихрям двигаться? Нестационарная теория Гинзбурга-Ландау.

Vortex matter: вчера, сегодня, завтра

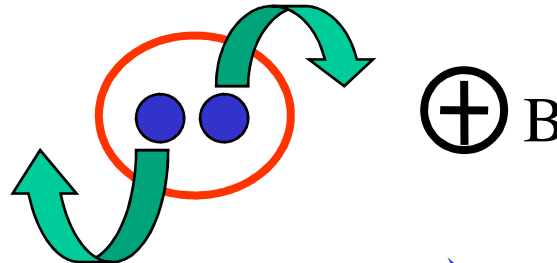
- ◆ Зоопарк вихревых структур. Все уже известно?
- ◆ Все немного сложнее, чем хотелось бы...
Электроны, дырки и вихри.
О микро-теории.
- ◆ Современные материалы и структуры. Экспериментальные подходы и проблемы.

Почему магнитное поле разрушает сверхпроводимость?

Механизмы взаимодействия магнитного поля с куперовской парой

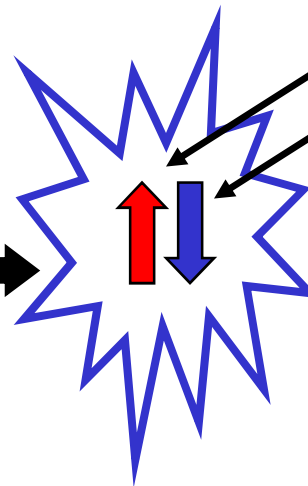


✿ орбитальный (электромагнитный) механизм



✿ взаимодействие с электронными спинами

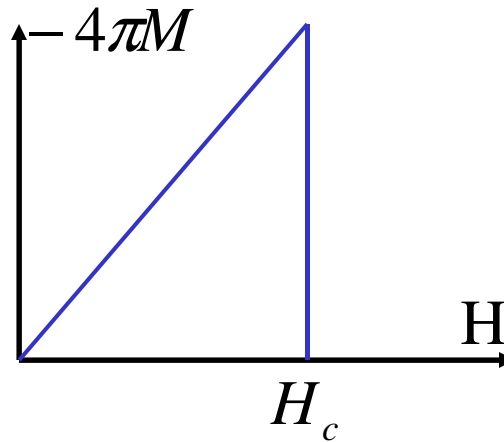
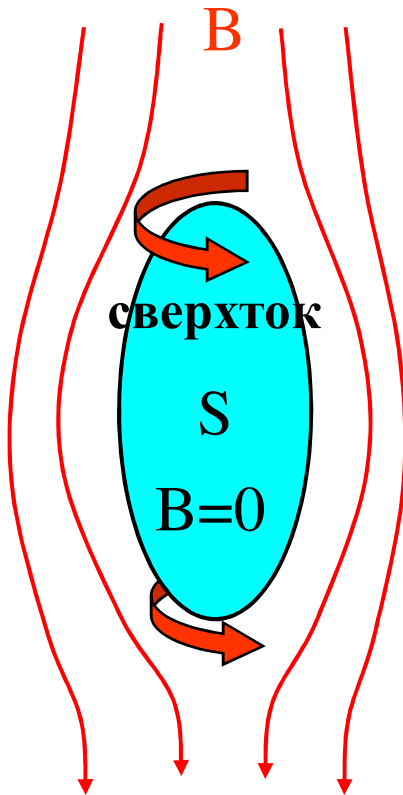
B



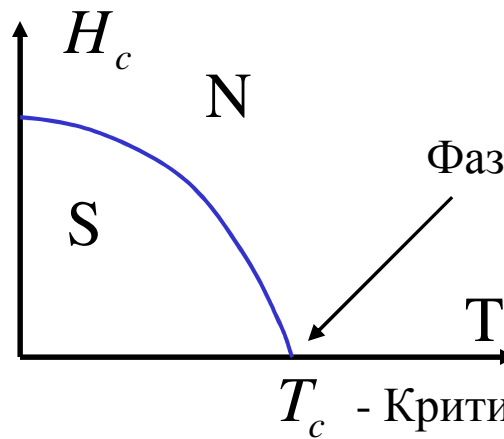
Спины электронов в паре

Сверхпроводники в магнитном поле.

Эффект
Мейсснера –
Оксенфельда
(1933)



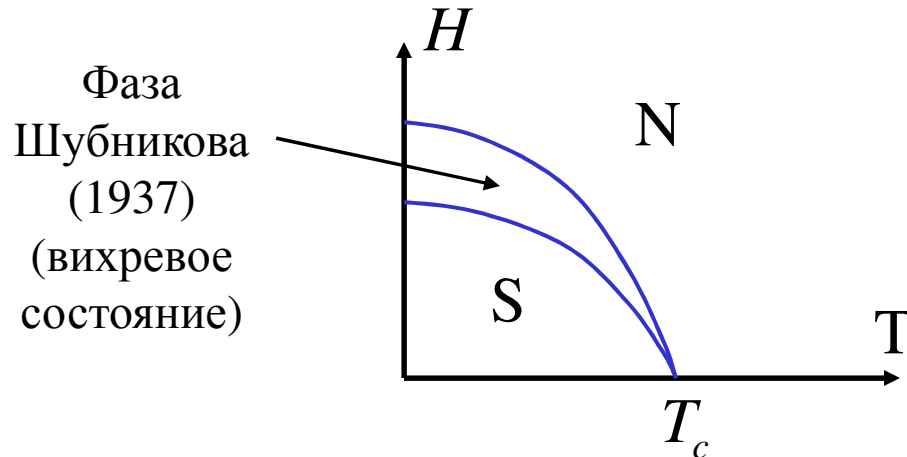
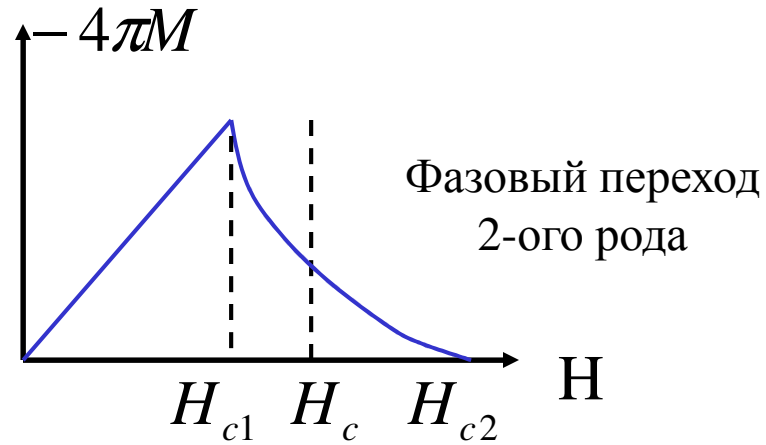
Фазовый переход 1-ого рода



Фазовый переход 2-ого рода

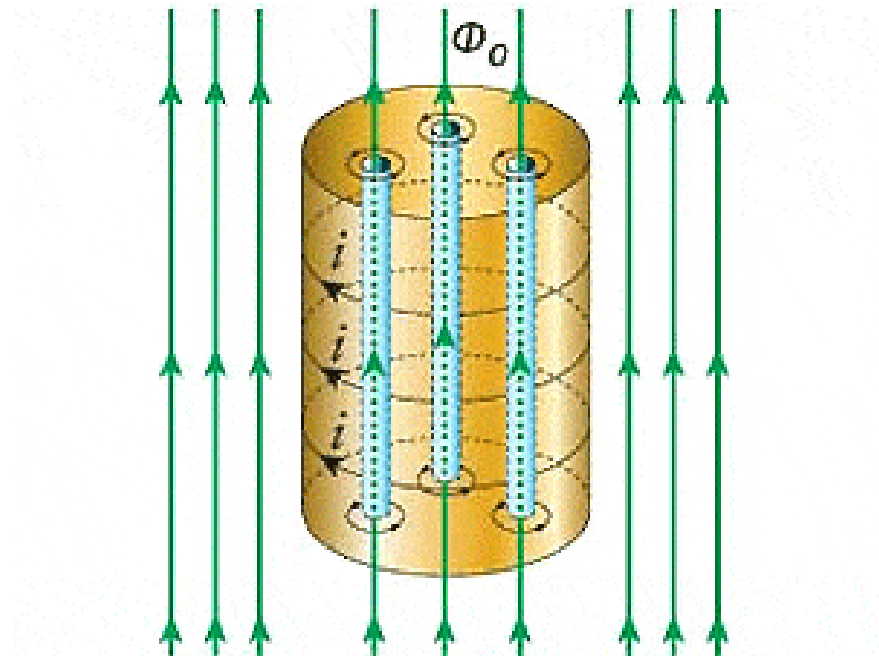
Сверхпроводимость I рода.

Сверхпроводимость II рода. Сплавы. Высокие критические поля и токи



Сверхпроводимость второго рода. Вихри Абрикосова– трубки магнитного потока.

Нобелевская премия-2003



Феноменологическая теория сверхпроводимости Гинзбурга-Ландау

Параметр порядка $\Psi = \sqrt{\frac{n_s}{2}} e^{i\varphi}$ ← Плотность
сверхпроводящих
электронов

Для медленных изменений параметра порядка в пространстве:

Свободная энергия $F = F_n + \int \left(\frac{\hbar^2}{4m} |\nabla\Psi|^2 + a|\Psi|^2 + \frac{b}{2} |\Psi|^4 \right) dV$

Свободная энергия
нормального состояния $a = \alpha(T - T_c)$

Равновесный параметр порядка в
однородном сверхпроводнике

$$|\Psi|^2 = \frac{\alpha(T_c - T)}{b}$$

Включаем магнитное поле:

Требование калибровочной
инвариантности

$$\nabla\Psi \rightarrow \nabla\Psi - \frac{2ie}{\hbar c} \vec{A}\Psi$$

← ?

$$\tilde{F} = F_n + \int \left(\frac{\hbar^2}{4m} \left| \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c} \vec{A} \right) \Psi \right|^2 + a|\Psi|^2 + \frac{b}{2}|\Psi|^4 + \frac{\vec{B}^2}{8\pi} - \frac{\vec{B}\vec{H}}{4\pi} \right) dV$$

Энергия магнитного поля При заданном поле \vec{H}

Вариация функционала

по Ψ^* 

Уравнение Гинзбурга-Ландау

по \vec{A} 

Уравнение Максвелла

$$-\frac{\hbar^2}{4m} \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c} \vec{A} \right)^2 \Psi + a\Psi + b|\Psi|^2 \Psi = 0$$

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{j} = -\frac{ie\hbar}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{2e^2}{mc} |\Psi|^2 \vec{A}$$

$$\vec{j} = \frac{e\hbar}{m} |\Psi|^2 \left(-\frac{2e}{\hbar c} \vec{A} + \nabla \varphi \right)$$

$$\vec{j} = -\frac{e^2 n_s}{mc} \vec{A}$$

Уравнение Лондонов

Граничные условия

I-S

$$\vec{n} \left(\nabla \Psi - \frac{2ie}{\hbar c} \vec{A} \Psi \right) = 0$$

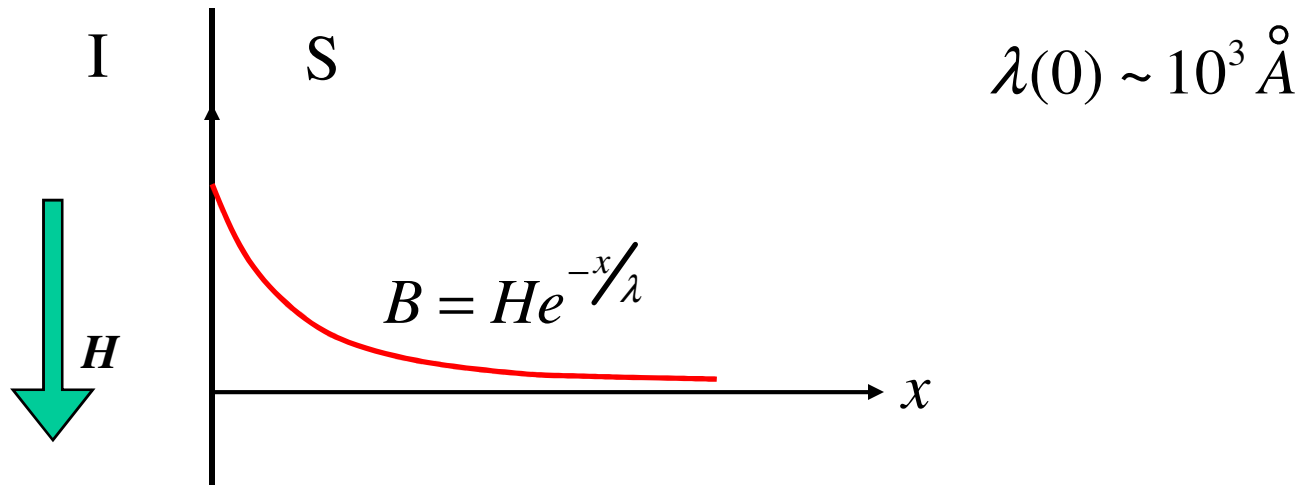
N-S

$$\Psi = 0$$

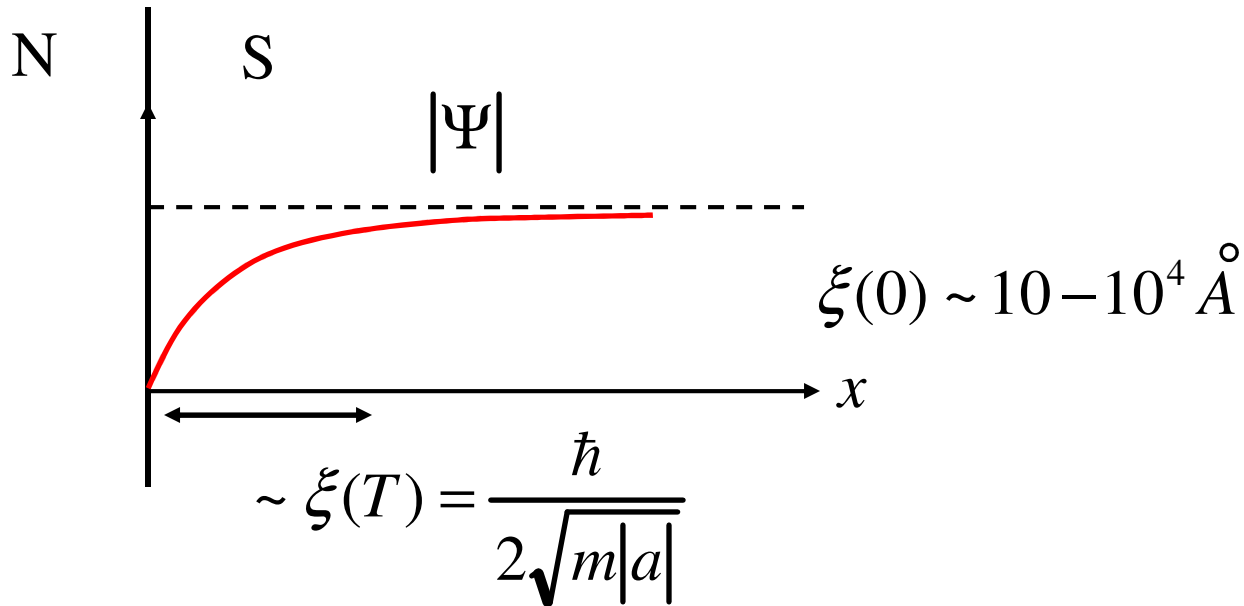
Характерные длины в теории Гинзбурга - Ландау

Глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник = Лондоновская глубина проникновения

$$\lambda(T) = \sqrt{\frac{mc^2 b}{8\pi e^2 |a|}} = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi e^2 n_s}}$$

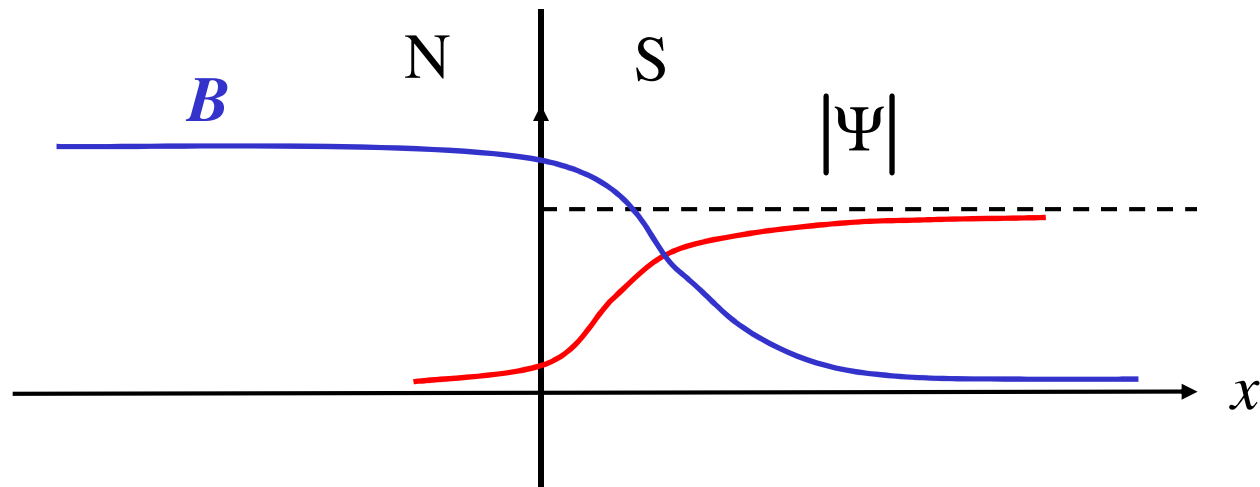


Корреляционная длина = характерный масштаб изменения параметра порядка



Параметр Гинзбурга-Ландау = $\kappa = \frac{\lambda(T)}{\xi(T)}$

Энергия границы раздела N-S



$$\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Коэффициент поверхностного натяжения > 0

$$\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Коэффициент поверхностного натяжения < 0

$\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$  *SN границы энергетически выгодны*

Что такое вихри и зачем они нужны ?

*Частичное проникновение
магнитного поля в
сверхпроводник
(неполная экранировка)*

Уравнение Лондонов

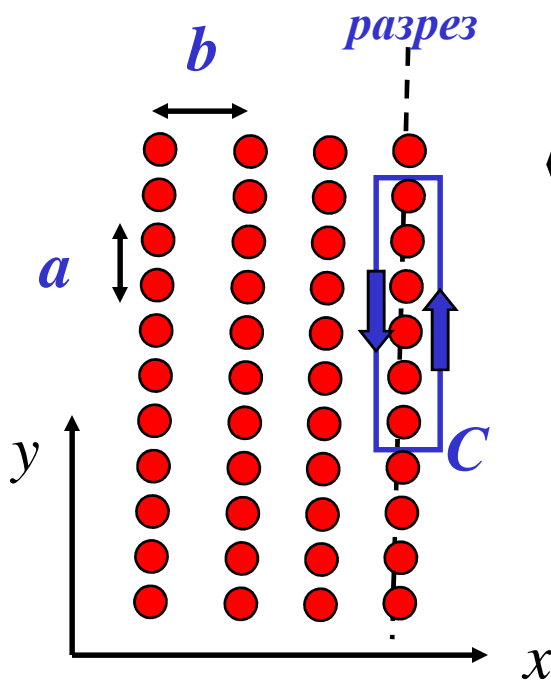
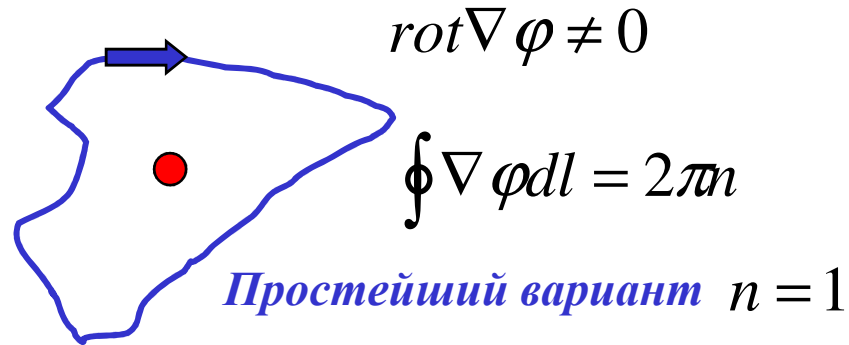
$$\vec{j} = -\frac{e^2 n_s}{mc} \vec{A}$$

*Линейно растущий с
координатой член в
токе*

Противоречие ?

Ответ: необходимо учесть особенности фазы параметра порядка чтобы устранить расходимость сверхтока

$$\vec{j} = \frac{e\hbar}{m} |\Psi|^2 \left(-\frac{2e}{\hbar c} \vec{A} + \nabla \varphi \right)$$



$$\langle \Delta(\nabla \varphi) \rangle_y = \frac{1}{Na} \oint_C \nabla \varphi dl = \frac{2\pi N}{Na} = \frac{2\pi}{a}$$

$$\vec{A} = \vec{y}_0 \bar{B}_z x + \vec{\tilde{A}}$$

$$\frac{2e}{\hbar c} \bar{B}_z b = \frac{2\pi}{a} \quad \text{- компенсация}$$

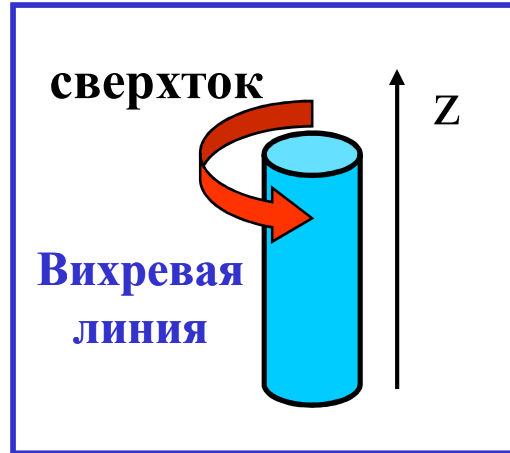
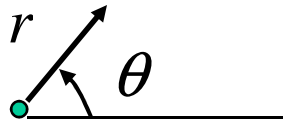
$$\bar{B}_z S = \int B_z ds = \frac{\pi \hbar c}{e} = \phi_0 \quad \leftarrow \text{квант магнитного потока}$$

Изолированный вихрь. Слабые магнитные поля.

$$\text{rot} \nabla \varphi = 2\pi \delta(\vec{r}) \vec{z}_0$$

Структура параметра
порядка

$$\Psi = f(r) e^{i\theta}$$

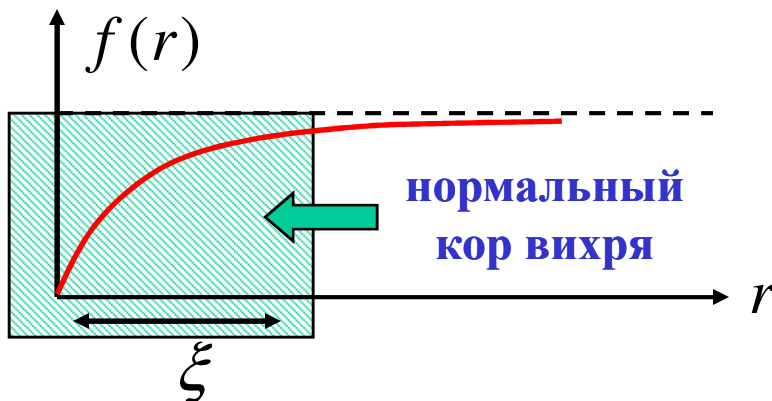


Структура магнитного
поля

$$\kappa \gg 1 \quad r \gg \xi$$

$$-\Delta \vec{B} + \vec{B} = \phi_0 \delta(\vec{r}) \vec{z}_0$$

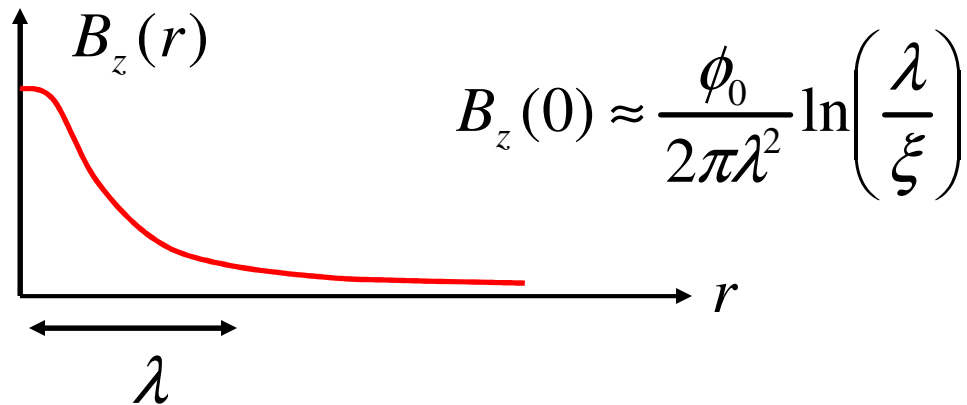
$f(0) = 0$ ← однозначность Ψ



$$\vec{B} = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0(r/\lambda) \vec{z}_0 \quad \text{Ф.Макдональда}$$

$$r \gg \lambda \quad \vec{B} \approx \frac{\phi_0 \vec{z}_0}{\sqrt{8\pi r} \lambda^3} e^{-r/\lambda}$$

$$\xi \ll r \ll \lambda \quad \vec{B} \approx \frac{\phi_0 \vec{z}_0}{2\pi\lambda^2} \ln\left(\frac{\lambda}{r}\right)$$



Свободная энергия вихревой
нити (на ед. длины)

$$\varepsilon \approx \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2 \left(\ln\left(\frac{\lambda}{\xi}\right) + \gamma\right)$$

Нижнее критическое поле

$$H_{c1} = \frac{4\pi\varepsilon}{\phi_0}$$

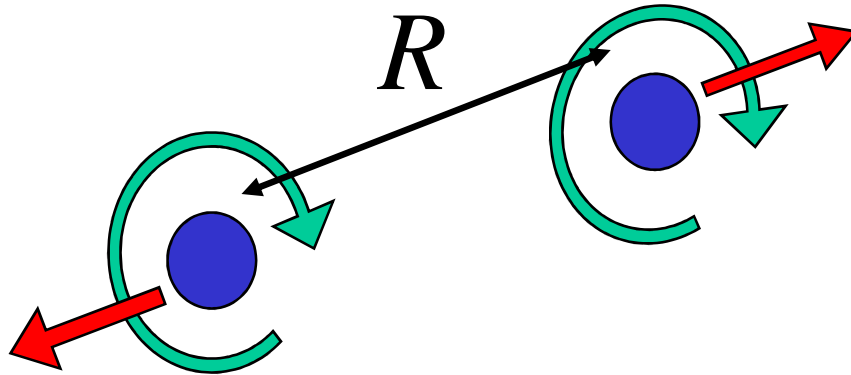
Вихри энергетически выгодны при $H > H_{c1}$

(в бесконечном цилиндре в продольном поле)

Interaction between vortices in type-II superconductors: bulk samples

◆ repulsive interaction between vortices

◆ hexagonal vortex lattice



$$\vec{F} = \frac{\phi_0}{c} [\vec{j}, \vec{z}_0]$$

$$\mathcal{E}_{\text{int}} \approx \frac{\phi_0^2 d}{8\pi^2 \lambda^2} K_0\left(\frac{R}{\lambda}\right)$$

$$R \ll \lambda \quad K_0\left(\frac{R}{\lambda}\right) \approx \ln\left(\frac{\lambda}{R}\right)$$

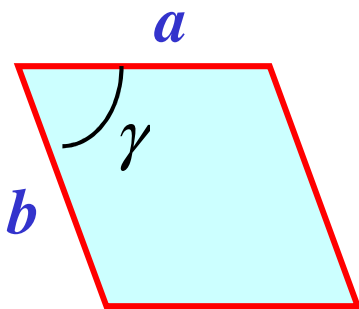
$$R \gg \lambda \quad K_0\left(\frac{R}{\lambda}\right) \approx \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2R}} \cdot e^{-R/\lambda}$$

Vortex lattice structure.

◆ 1 vortex per unit cell

◆ magnetic flux through the lattice cell:

$$\iint B dS = \phi_0 = \frac{\pi \hbar c}{e}$$



Primitive cell:

$$ab \sin \gamma = 2\pi L_H^2$$

$$\rho = \frac{b \cos \gamma}{a}$$

$$\sigma = \frac{b \sin \gamma}{a}$$

Hexagonal lattice:

$$\rho = \frac{1}{2} \quad \sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Energy minimum

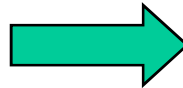
**Сильные магнитные поля.
Задача о верхнем критическом поле.**

$$-\frac{\hbar^2}{4m} \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c} \vec{A} \right)^2 \Psi = -a \Psi$$

↑
Энергия E

$$\vec{A} = -\vec{x}_0 H_z y$$

Min E



Max критической T (H)

$$E_0 = \frac{e\hbar H}{2mc}$$



$$H_{c2} = \frac{\phi_0}{2\pi\xi^2}$$

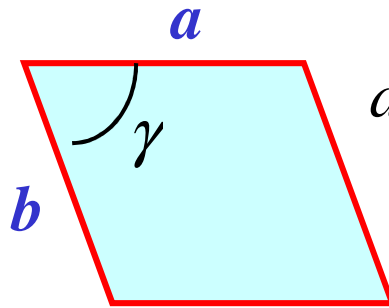
**Сверхпроводящий
зародыш**

$$\Psi = A \exp \left(ikx - \frac{(y - kL_H^2)^2}{2L_H^2} \right)$$

Магнитная длина $L_H = \sqrt{\frac{\hbar c}{2eH}}$

Вихревая решетка. Задача Абрикосова (1957)

Элементарная ячейка:



$$ab \sin \gamma = 2\pi L_H^2$$

$$\rho = \frac{b \cos \gamma}{a} \quad \sigma = \frac{b \sin \gamma}{a}$$

$$\Psi = A \sum_n \exp \left(i\pi \rho n(n-1) + \frac{i2\pi n x}{a} - \frac{(y - n\sigma a)^2}{2L_H^2} \right)$$

Квадратная решетка:

$$\rho = 0 \quad \sigma = 1$$

Седловая точка

$$\min_{\rho, \sigma} \frac{\langle |\Psi|^4 \rangle}{\langle |\Psi|^2 \rangle^2} = ?$$

**Правильная
треугольная решетка:**

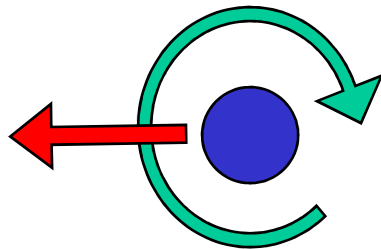
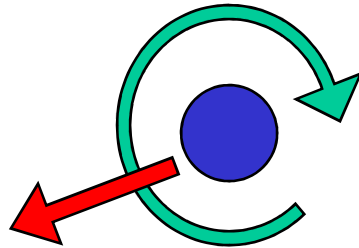
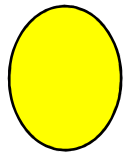
$$\rho = \frac{1}{2} \quad \sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Точка минимума

Транспортные свойства вихревого состояния. Vortex matter.

Пиннинг вихрей.

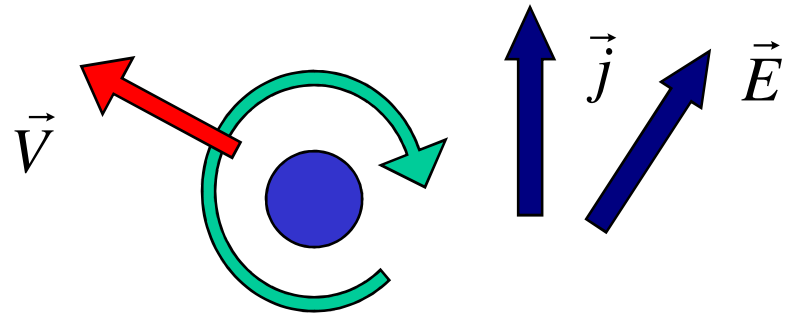
Полость или
дефект с
пониженной T_c



Граница с
изолятором

Вязкое течение потока.

(диссипация – за счет нормальных токов в
коре+релаксация параметра порядка)



$$\rho = \rho_n \frac{H}{H_{c2}}$$

Нестационарная теория Гинзбурга - Ландау

$$\gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} - 2ie\Phi \right) \Psi = \left(\frac{1}{4m} \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c} \vec{A} \right)^2 + a \right) \Psi - b |\Psi|^2 \Psi$$

$$\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$$

$$\vec{j} = \vec{j}_s + \vec{j}_n = \vec{j}_s + \sigma \vec{E}$$

Дифференциальное уравнение 1 порядка по времени неверно для сверхпроводников!

Оправдания:

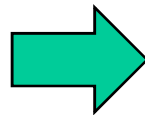
- 1. Простота и доступность для народных масс.**
- 2. Бесщелевая сверхпроводимость.**
- 3. В малой окрестности сверхпроводящего перехода верно.**

Вихрь+поправки (2D солитон + поле)
Горьков – Копнин (1975)

$$\Psi = \Psi_0(\vec{r} - \vec{V}t) + \Psi_1$$

$$\hat{L}\Psi_1 = G(\Psi_0)$$

Нерасходимость
поправки



Уравнение
движения вихря

Вихри как частицы. Масса, вязкость вихря

$$\dots + m \frac{d\vec{V}}{dt} + \eta \vec{V} + \alpha [\vec{n}, \vec{V}] = \vec{F}(t)$$

Масса

(инерция – за
электродинамики
+ запаздывание)

Частотная

зависимость
импеданса в
магнитном поле

Вязкость

(диссипация – за счет
нормальных токов в коре
+ релаксация параметра
порядка)

**Сопротивление в
магнитном поле**

**Увлечение вихрей
поток**

Эффект Холла

$$\vec{F} = \frac{\phi_0}{c} [\vec{j}, \vec{z}_0] + \vec{F}_{pin}$$

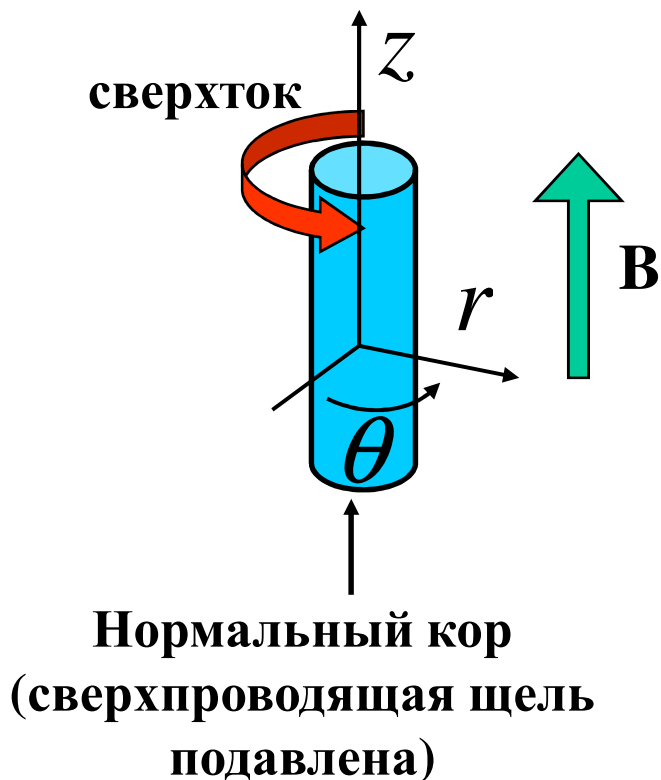
$$\vec{E} = \frac{1}{c} [\vec{V}, \vec{B}]$$

Почему вихри в сверхпроводниках так уж интересны для нас?

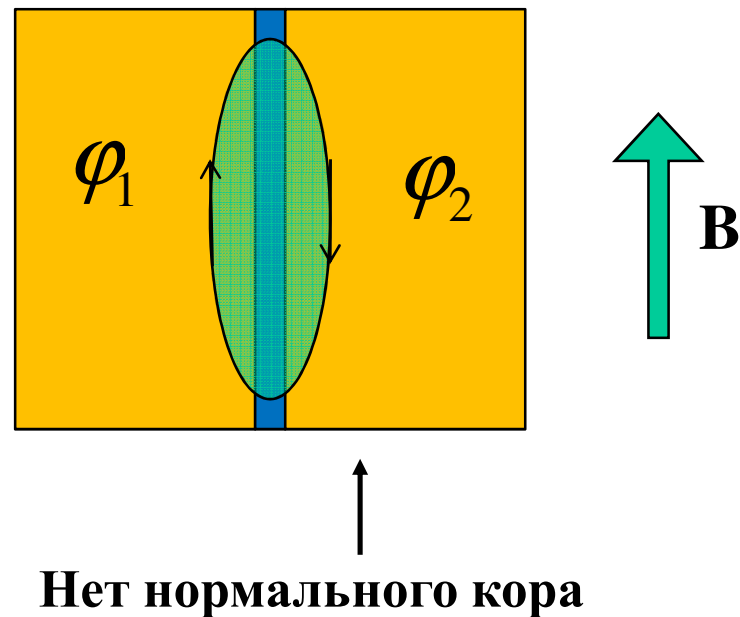
- **Они определяют сопротивление в магнитном поле**
 - **Они есть во всех высокотемпературных сверхпроводниках**
- **Разглядывая вихри, мы можем что-то узнать о природе сверхпроводимости**
- **Манипулируя вихрями, мы можем управлять транспортом заряда и тепла в сверхпроводнике**

*Зоопарк видов вихрей.
Немного классификации и названий...*

Вихрь Абрикосова

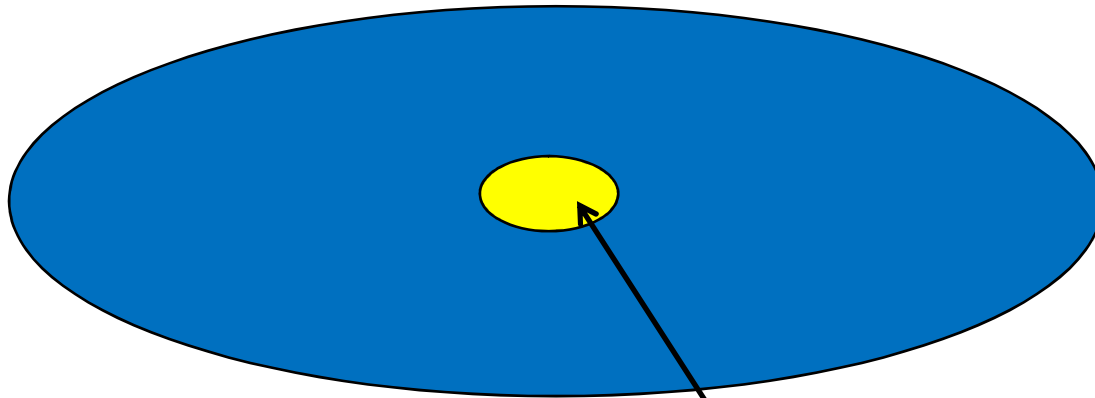


Вихрь Джозефсона



**Unconventional structure of vortices in layered superconductors.
High-Tc cuprates.
Weak anisotropy limit.**

Anisotropic magnetic field profile

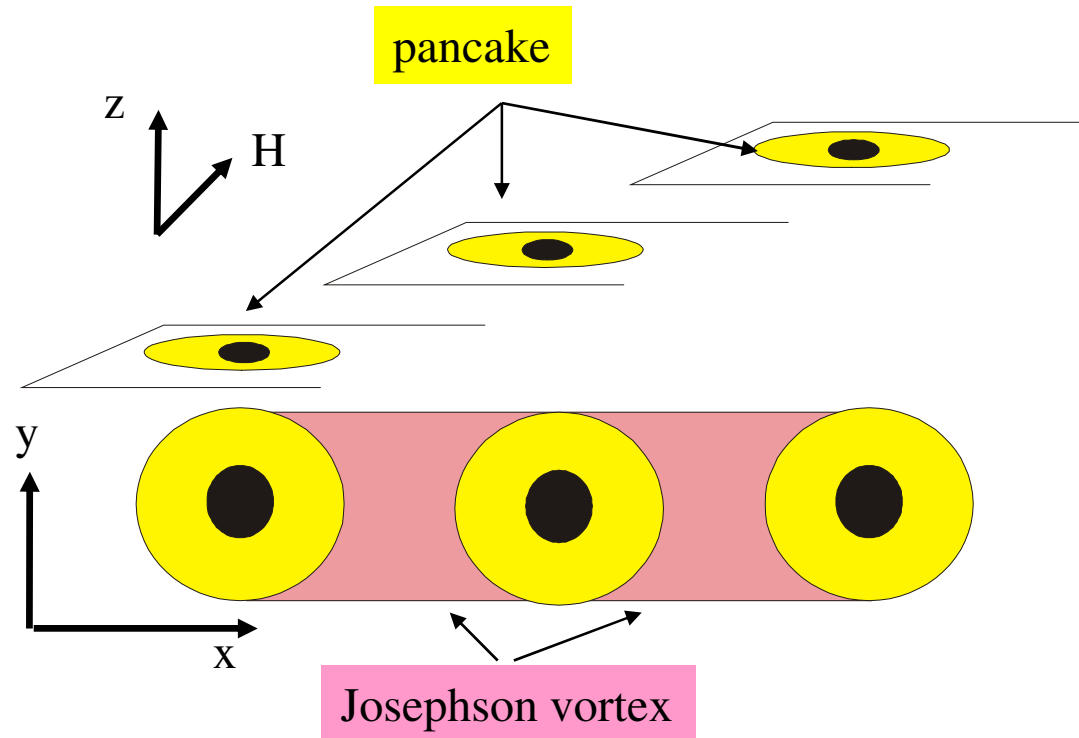


Anisotropic core

Anisotropic Ginzburg – Landau model

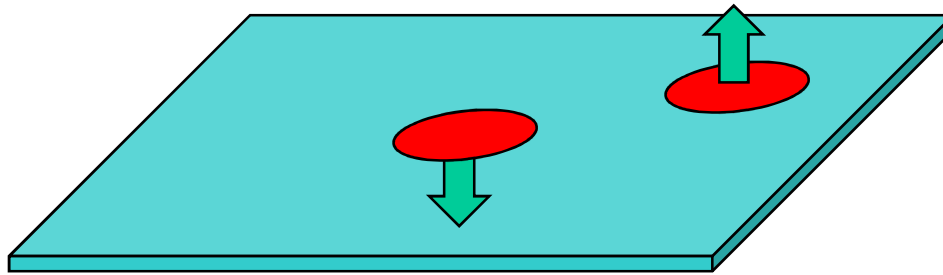
$$\tilde{F} = F_n + \int \left(\frac{\hbar^2}{4} \left(\left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c} \vec{A} \right) \Psi \right)^* \hat{m}^{-1} \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c} \vec{A} \right) \Psi + a |\Psi|^2 + \frac{b}{2} |\Psi|^4 + \frac{\vec{B}^2}{8\pi} - \frac{\vec{B}\vec{H}}{4\pi} \right) dV$$

**Unconventional structure of vortices in layered superconductors.
High-Tc cuprates.
Strong anisotropy limit.**



Lawrence – Doniach model

Можно обойтись без внешнего магнитного поля...
Флуктуационные вихри в квази-двумерных сверхпроводниках

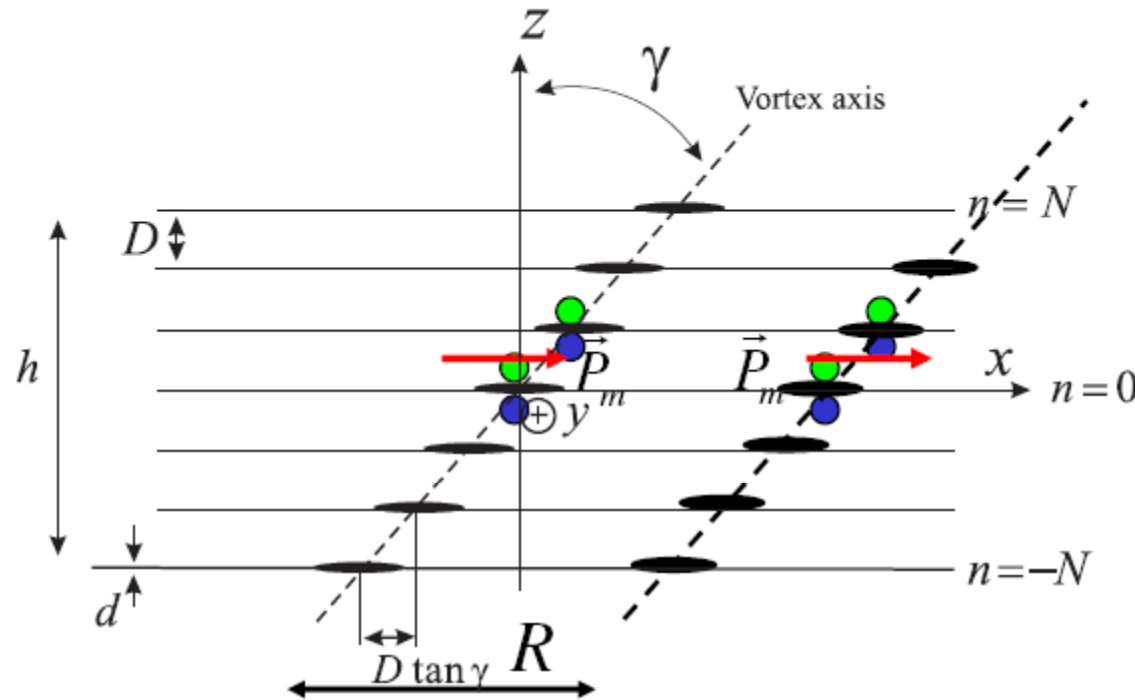


**Пары вихрь-антивихрь,
Переход Березинского-Костерлица-Таулесса**

$$F = \varepsilon \ln r - T \ln s$$

Притяжение вихрей?

Layered superconductors



Magnetic field in between the layers (at large distances r) = field of $2D$ magnetic dipoles \vec{P}_m

$$P_m \propto \phi_0 \tan \gamma$$

Interaction energy of 2D magnetic dipoles

$$E_{\text{int}} \propto -\frac{P_m^2}{R^2} \propto -\frac{\phi_0^2 \tan^2 \gamma}{R^2}$$

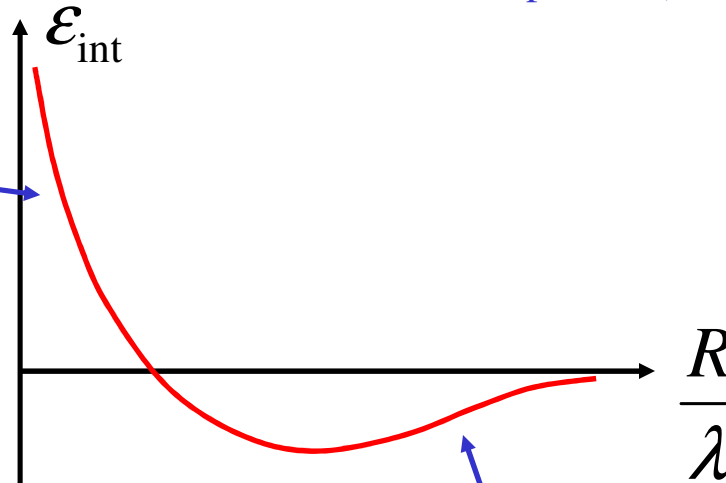
Attraction of vortices in anisotropic superconductors

A.I.Buzdin and A.Yu.Simonov (1990)
A.M.Grishin, A.Yu.Martynovich, and
S.V.Yampolskii (1990)

$$\mathcal{E}_{\text{int}} \approx \frac{\phi_0^2 d}{8\pi^2 \lambda^2} K_0\left(\frac{R}{\lambda}\right)$$

$$R \ll \lambda$$

$$K_0\left(\frac{R}{\lambda}\right) \approx \ln\left(\frac{\lambda}{R}\right)$$



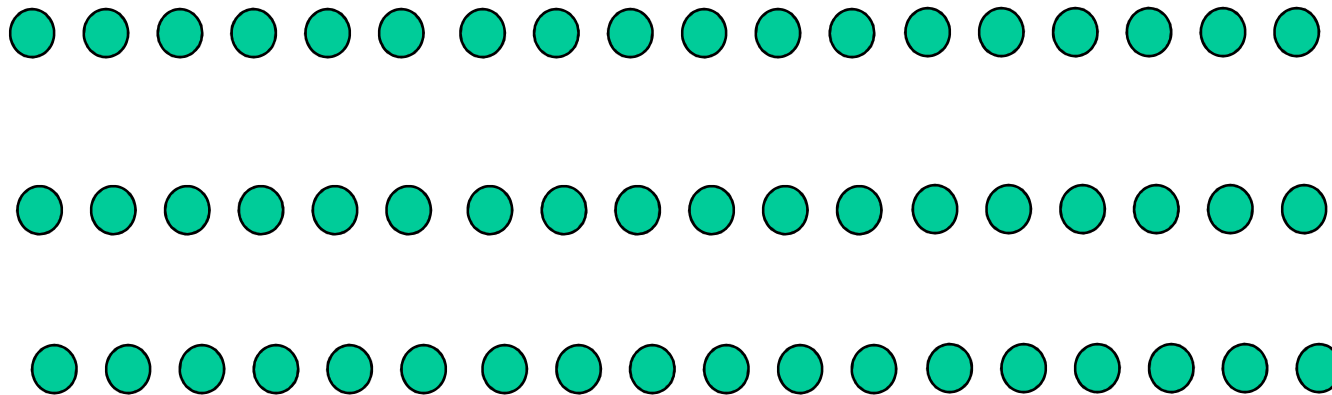
$$\mathcal{E}_{\text{int}} \approx -\frac{\phi_0^2}{8\pi^2} \frac{d \tan^2 \gamma}{R^2}$$

Vortex chains in anisotropic superconductors in tilted magnetic fields

YBCO (high-resolution Bitter patterns): P.L. Gammel et al (1992)

NbSe₂ (STM): H.F.Hess et al
(1992)

YBCO (Lorentz microscopy): A.Tonomura et al
(2002)



Lorentz microscopy measurements. A.Tonomura et al (2002)

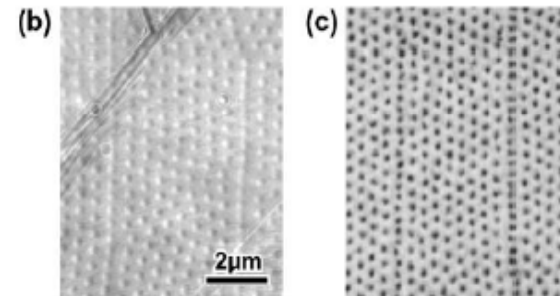
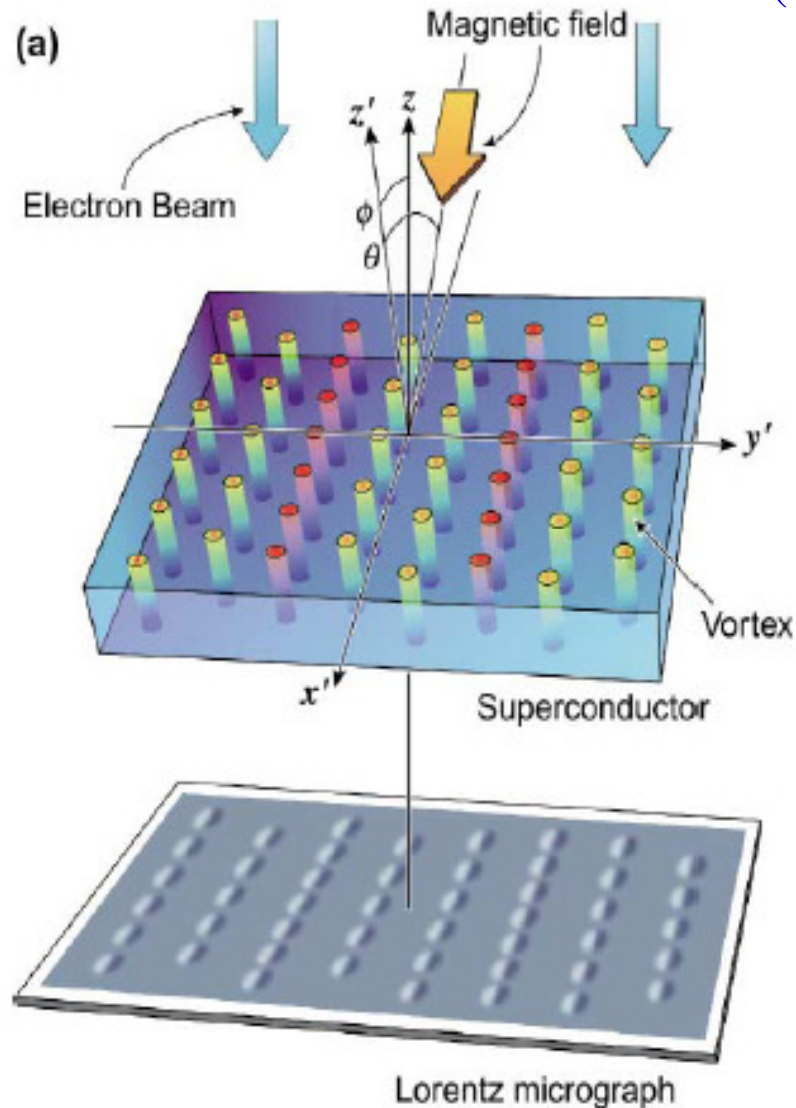
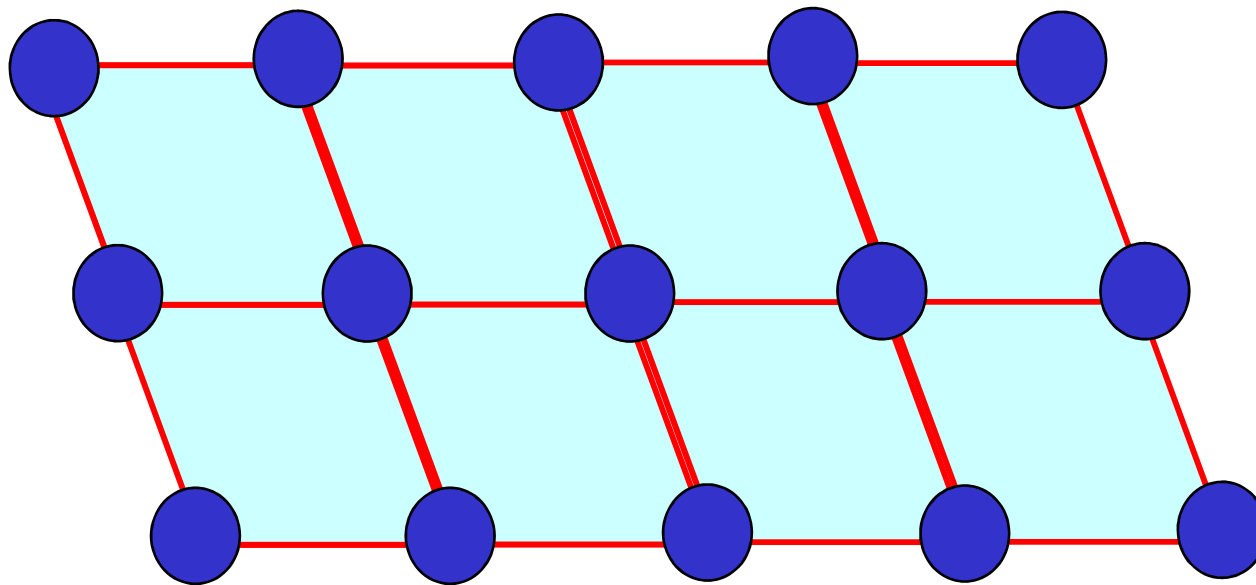
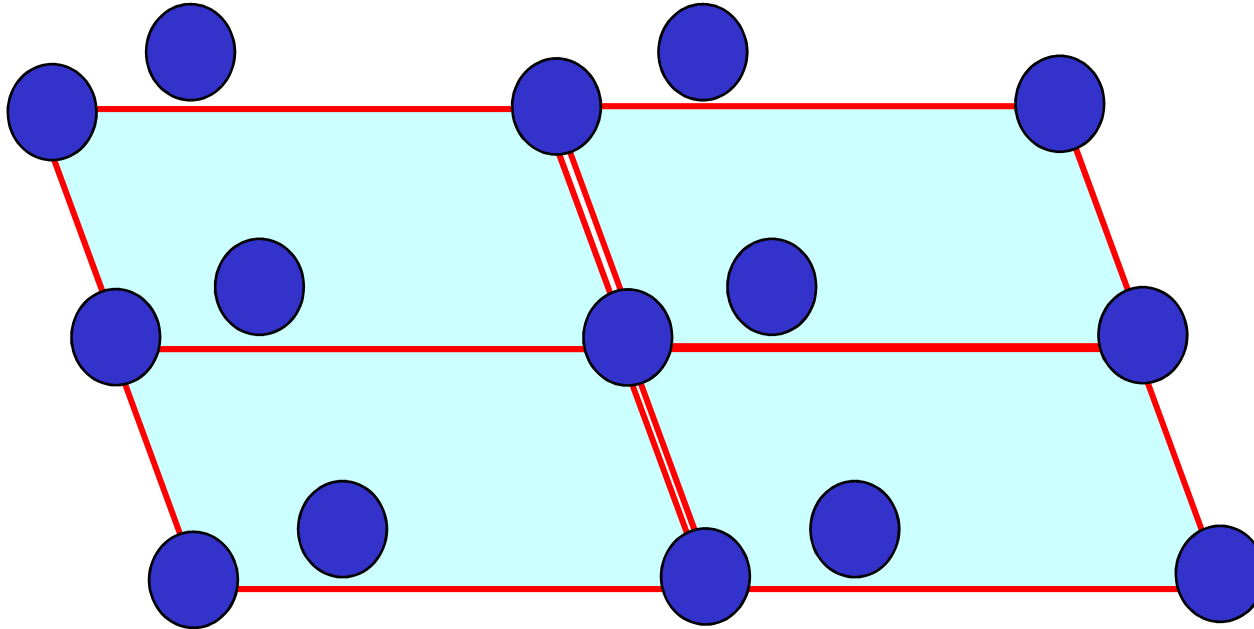


FIG. 1 (color). Observation of magnetic vortices in high- T_c superconductors at a tilted magnetic field. (a) Lorentz microscopy of vortices in a superconducting thin film. (b) Lorentz micrograph of vortices in Bi-2212 film. (c) Bitter pattern of vortices in Bi-2212. Similar chain-lattice patterns are observed in both (b) and (c). However, these two images are different in that Lorentz micrograph [14] is formed by the electron phase shifts caused mainly due to the vortex magnetic field inside the film and that Bitter pattern [1] is formed by the fine iron particles gathered at the locations where the vortex magnetic field appeared just outside the superconductor surface.

Question: can we get more than 1 vortex per unit cell?



Question: can we get more than 1 vortex per unit cell?



We need attraction between vortices!

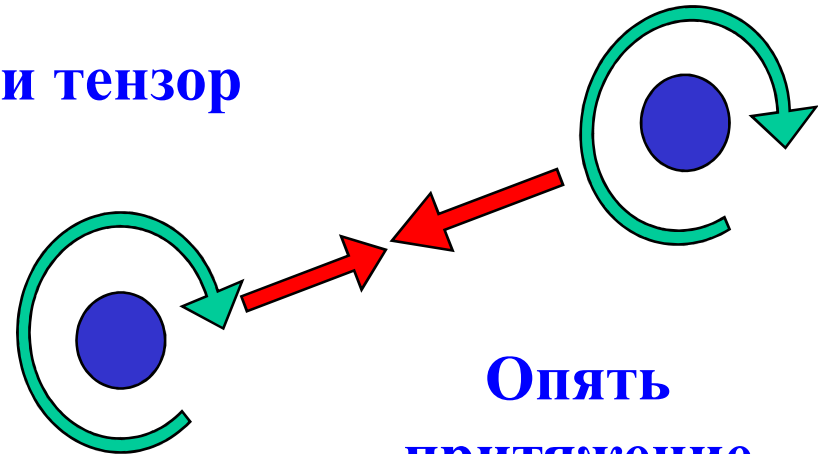
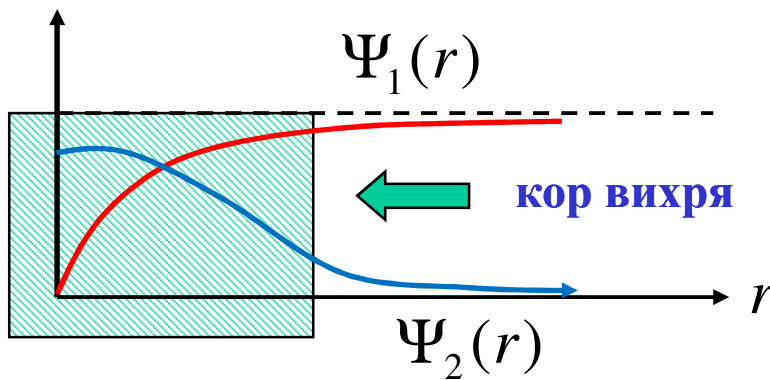
Example:

- 1. Layered superconductors.**
- 2. vortices in superconductors with two order parameter components.**

Вихри в сверхпроводниках с многокомпонентным параметром порядка

Железные сверхпроводники, урановые соединения, Гелий-3

$\Psi =$ Вектор или тензор



Опять притяжение вихрей

Вихри в системах с одновременным существованием сверхпроводимости и магнетизма

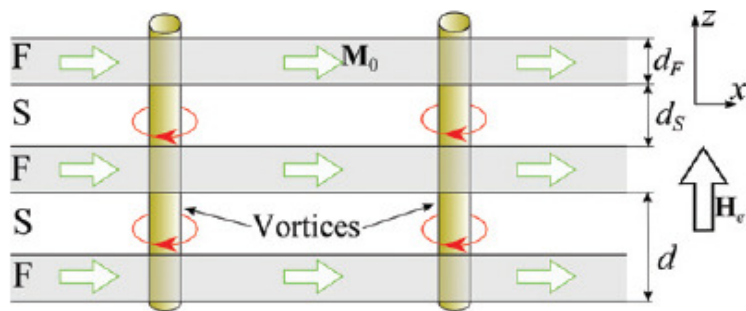
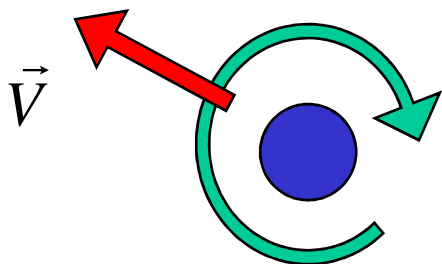


Fig. 1: (Colour on-line) Vortex lines in the SF superlattice with codirectional magnetic moments M_0 in all layers.

Излучение магнонов при движении вихря



Притяжение вихрей: доменизированное состояние

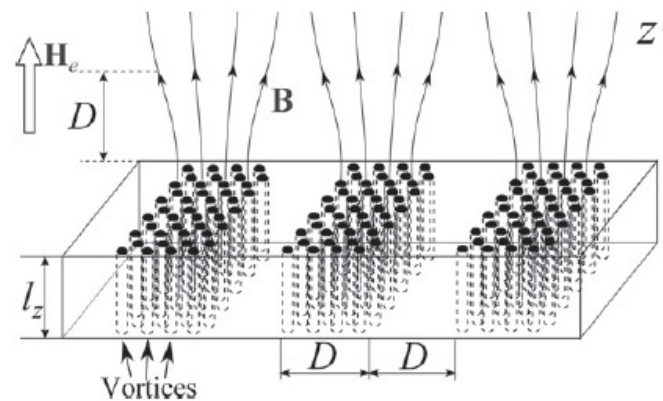
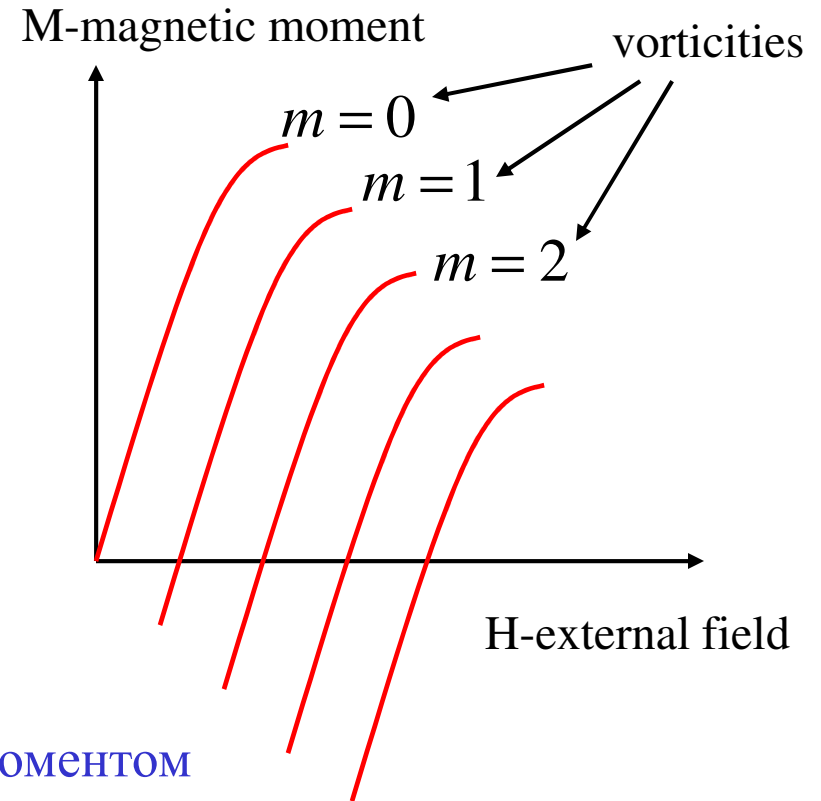
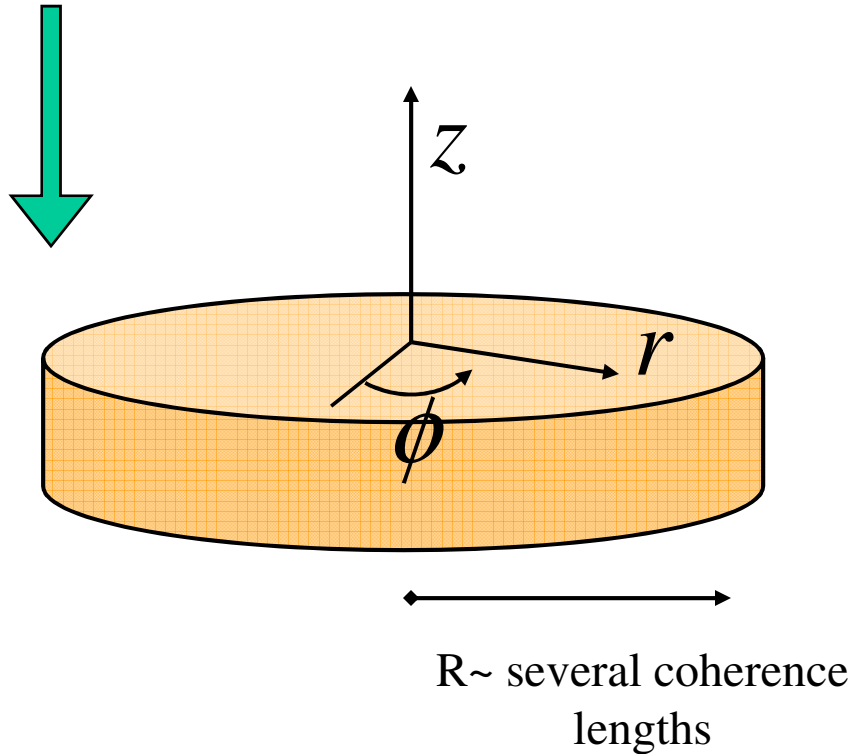


Fig. 5: A schematic picture of the stripe domain structure in the intermediate mixed state of the SF system at $H_{ez} \approx B_{0z}(H_{c1})/2$.

Вихри в мезоскопических образцах

H-external field



- Состояния с разным орбитальным моментом
- Квантовомеханические размерные эффекты
- Мезоскопический транспорт, управляемый магнитным полем

**Квантовая механика квазичастиц в вихрях
Абрикосова как пример приложения
методов квазиклассической теории
сверхпроводимости**

Вихри как ловушки для электронов и дырок

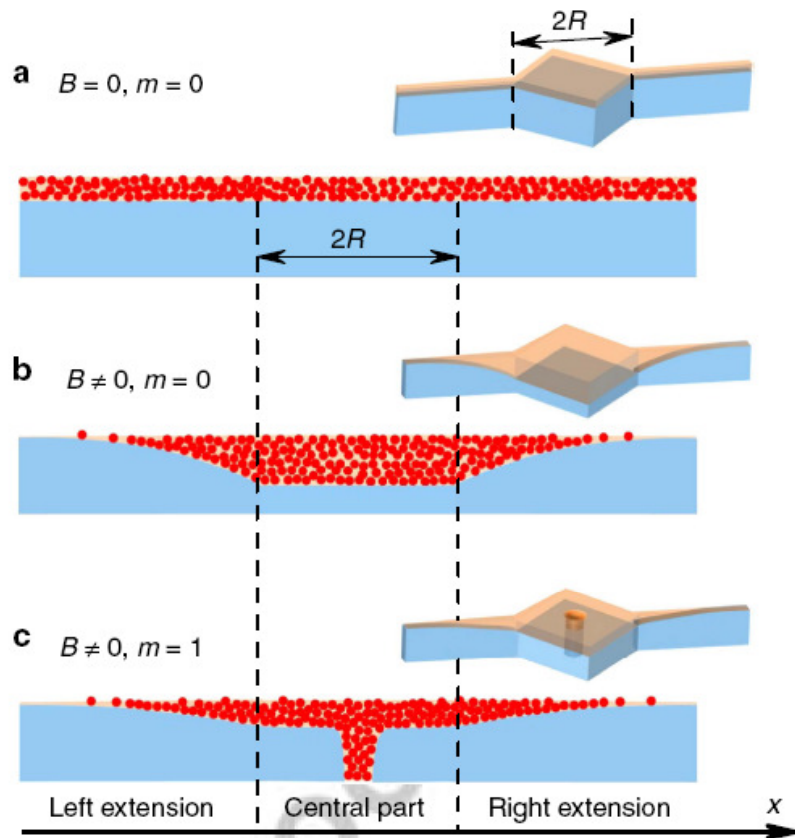
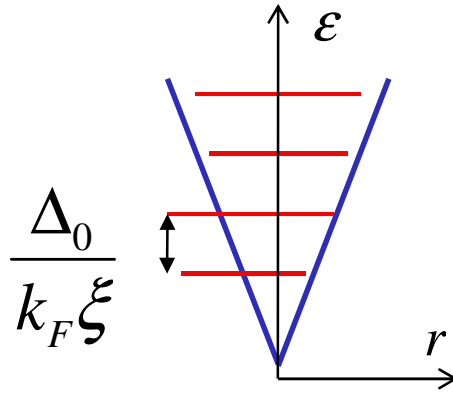


Figure 1 | QP density and gap distributions in a S disc. The S gap $E_g(B, x)$ in a S disc with narrow extensions (Sample A) is represented by the height of the blue volume, while the QP density $n_{qp}(x)$ is shown by red circles; m is the vorticity of the island, B is the magnetic field acting on the sample. The wide central part of a Sample A of size $2R$ is limited by vertical dashed lines, the narrow extensions are located on the sides. **(a)** Uniform zero magnetic field state; **(b)** Meissner state with reduced $E_g(B, x)$ in the central part at small fields in a vortex free state; **(c)** Single-vortex state with smaller gap reduction outside the vortex core than in **(b)**. The 3D schematics depict the corresponding $E_g(B, x)$ (in blue) and $n_{qp}(x)$ (in orange semitransparent).

Электронная структура вихревого состояния

Связанные состояния фермионных возбуждений в коре вихря

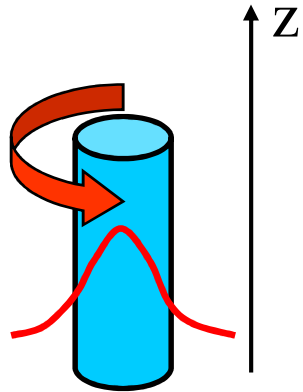
Профиль сверхпроводящей щели: потенциальная яма для электронов



Оценка минищели в спектре возбуждений

$$\varepsilon_{\min} \sim \frac{\hbar^2}{m\xi^2} \sim \frac{\hbar^2 \Delta_0}{m\hbar v_F \xi} \sim \frac{\Delta_0}{k_F \xi}$$

C.Caroli, P.G.de Gennes,
J.Matricon (1964)



$$\varepsilon_{\mu}(k_r) \approx \frac{\mu\Delta}{k_r \xi}$$

$$k_r = \sqrt{k_F^2 - k_z^2}$$

Фермионные возбуждения в вихревой фазе сверхпроводников

Почему они важны?

Local DOS

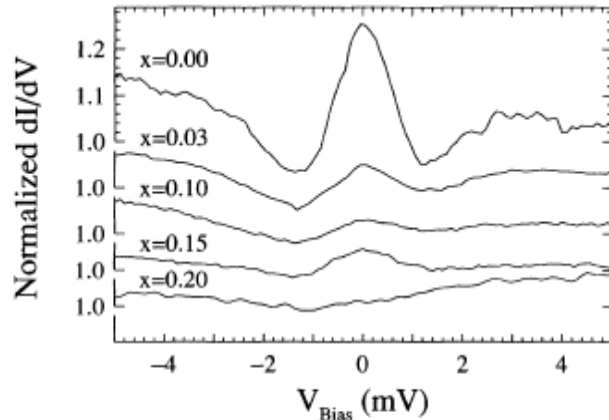
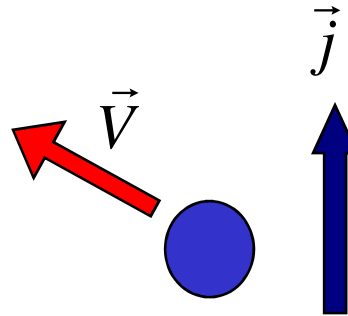


FIG. 3. Spectra taken at the center of a vortex core for various Ta substitutions at 1.3 K and 0.3 T. The spectra are normalized to the differential conductance at high bias.

Ch. Renner et al
(1991)

Динамика
вихрей:
Диссипация и
эффект Холла
в вихревой
фазе



Thermal transport

Thermal conductivity
along magnetic field:

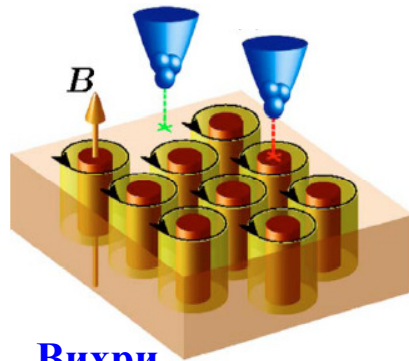
$$\kappa(B) = n\kappa_v \propto \kappa_n \frac{B}{H_{c2}}$$

Experiment

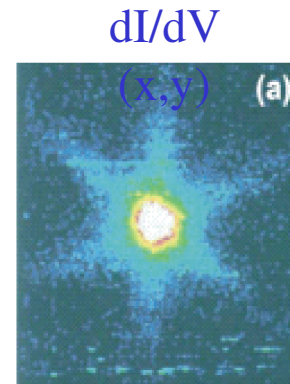
$$\kappa(B) \ll \kappa_n \frac{B}{H_{c2}}$$

Экспериментальные указания на тип сверхпроводящего спаривания

**Сканирующая туннельная микроскопия/спектроскопия.
Эффективный метод исследования природы сверхпроводящего спаривания.**



Вихри



Пик плотности состояний в центре вихря

Reference STM images of vortex cores.

VOLUME 67, NUMBER 12

PHYSICAL REVIEW LETTERS

16 SEPTEMBER 1991

Scanning Tunneling Spectroscopy of a Vortex Core from the Clean to the Dirty Limit

Ch. Renner, A. D. Kent, Ph. Niedermann, and Ø. Fischer

Département de Physique de la Matière Condensée, University of Geneva, 24 quai Ernest-Ansermet, CH-1211 Geneva, Switzerland

F. Lévy

Institut de Physique Appliquée, Ecole Polytechnique Fédérale Lausanne, CH-1015 Lausanne, Switzerland

(Received 1 July 1991)

The local density of states of a superconducting vortex core has been measured as a function of disorder in the alloy system $\text{Nb}_{1-x}\text{Ta}_x\text{Se}_2$ using a low-temperature scanning tunneling microscope. The peak observed in the zero-bias conductance at a vortex center is found to be very sensitive to disorder. As the mean free path is decreased by substitutional alloying the peak gradually disappears and for $x=0.2$ the density of states in the vortex center is found to be equal to that in the normal state. The vortex-core spectra hence may provide a sensitive measure of the quasiparticle scattering time.

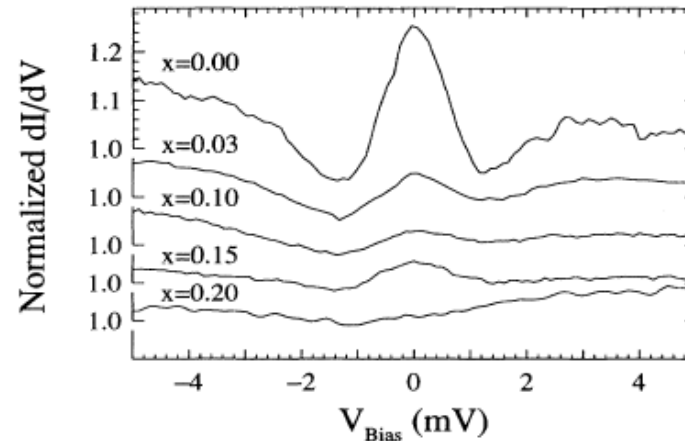


FIG. 3. Spectra taken at the center of a vortex core for various Ta substitutions at 1.3 K and 0.3 T. The spectra are normalized to the differential conductance at high bias.

STM наблюдения вихрей. DOS

$$LDOS = \sum_{\lambda} |u_{\lambda}(\vec{r})|^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\lambda})$$

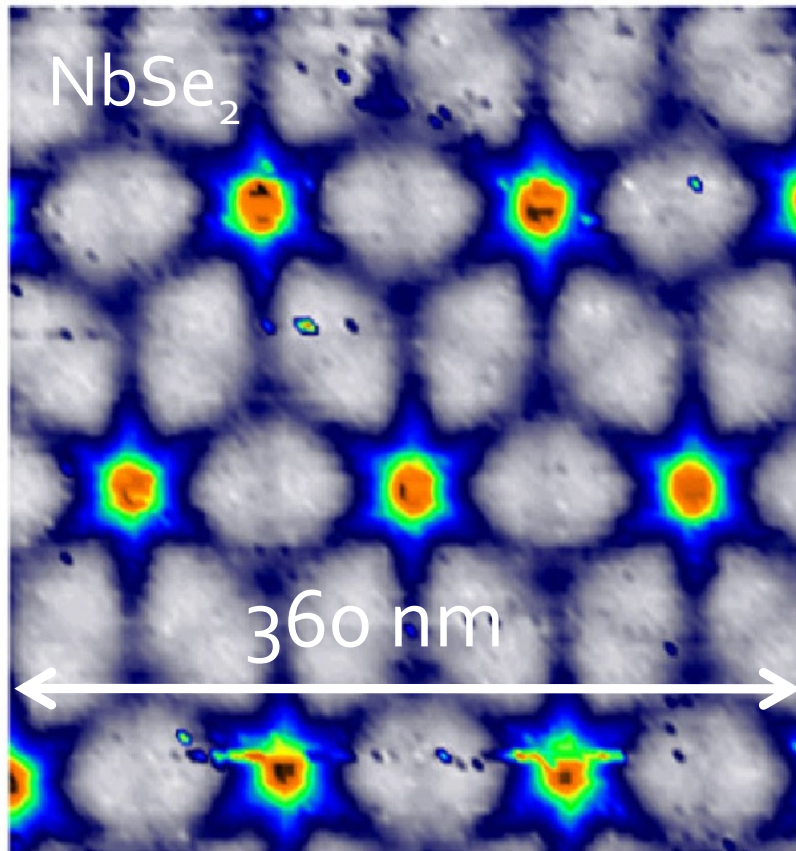
PRL **101**, 166407 (2008)

PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending
17 OCTOBER 2008

Superconducting Density of States and Vortex Cores of 2H-NbS₂

I. Guillamón,¹ H. Suderow,¹ S. Vieira,¹ L. Cario,² P. Diener,³ and P. Rodière³



PRL, **101**, 166407 (2008)

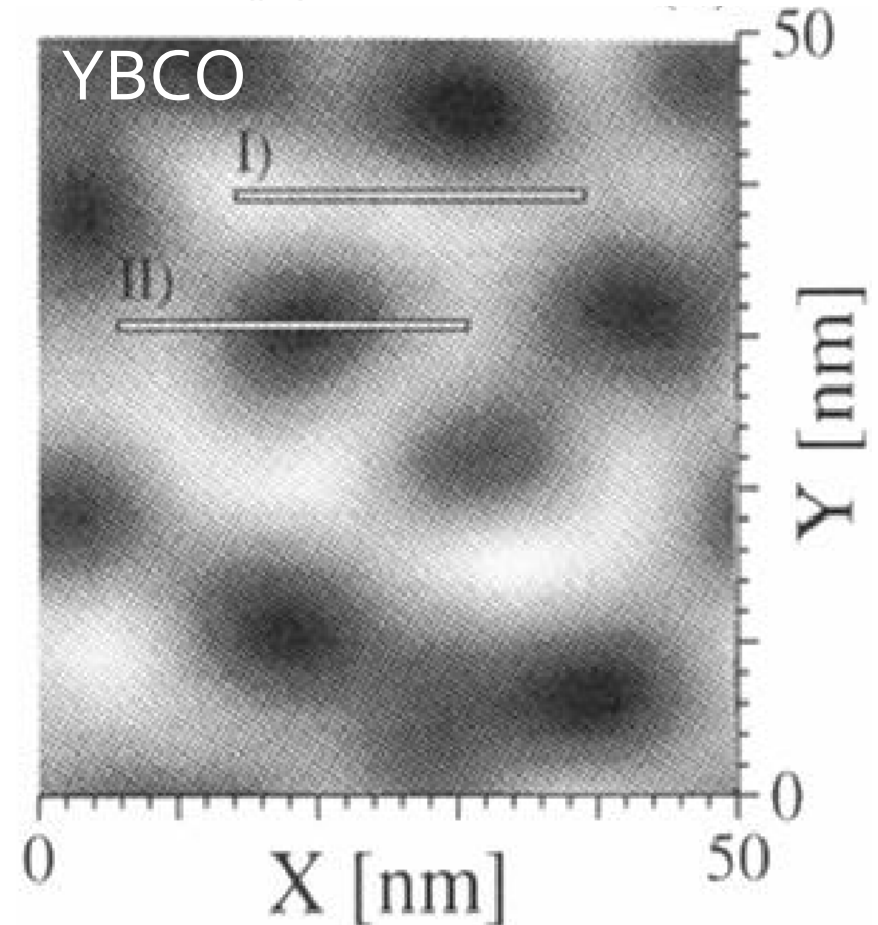
VOLUME 75, NUMBER 14

PHYSICAL REVIEW LETTERS

2 OCTOBER 1995

Direct Vortex Lattice Imaging and Tunneling Spectroscopy of Flux Lines on YBa₂Cu₃O_{7-δ}

I. Maggio-Aprile, Ch. Renner, A. Erb, E. Walker, and Ø. Fischer

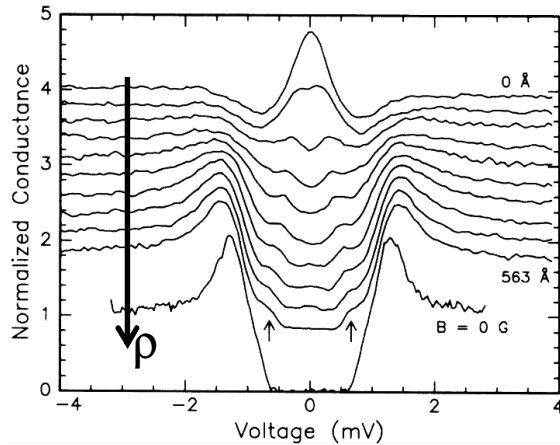


PRL, **75**, 2754 (1995)

STM experimental results

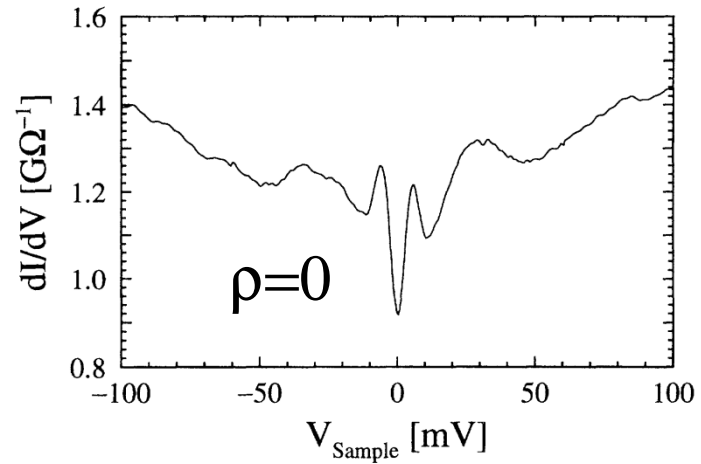
H. F. Hess et al PRL (1990)

$NbSe_2$

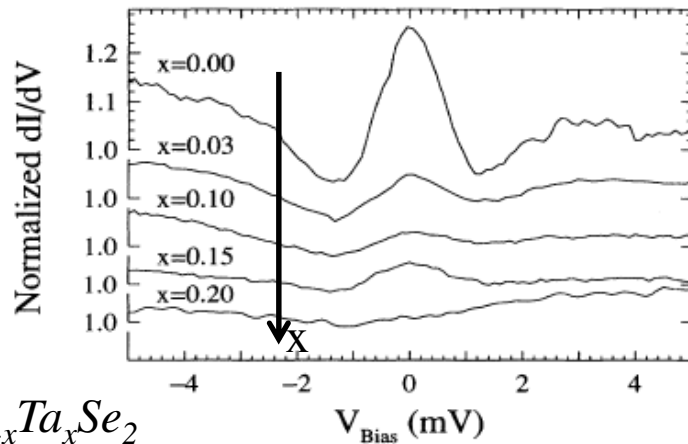


I. Maggio-Aprile et al PRL (1995)

YBCO

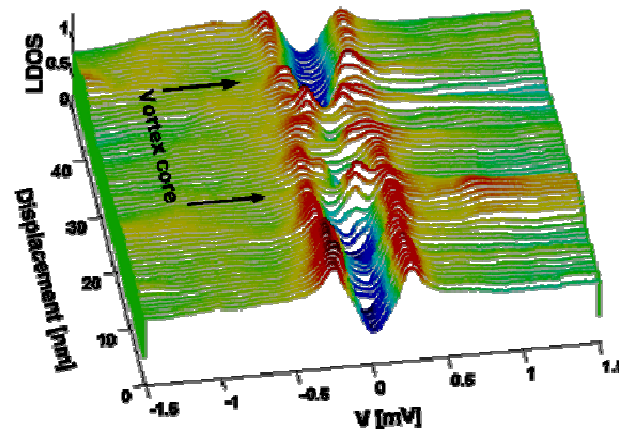


Ch. Renner et al PRL (1991)



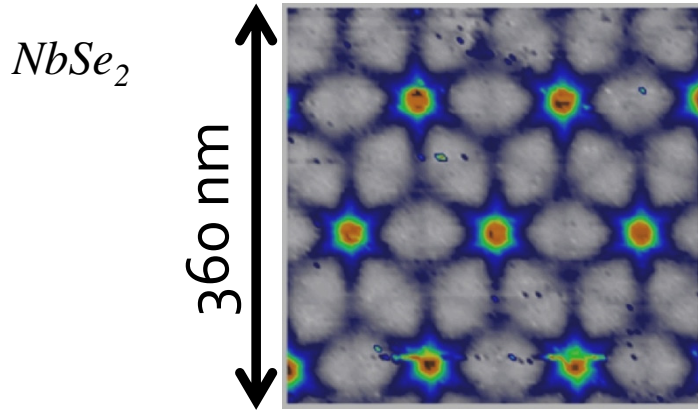
B. Sacepe et al PRL (2006)

Boron
doped
diamond

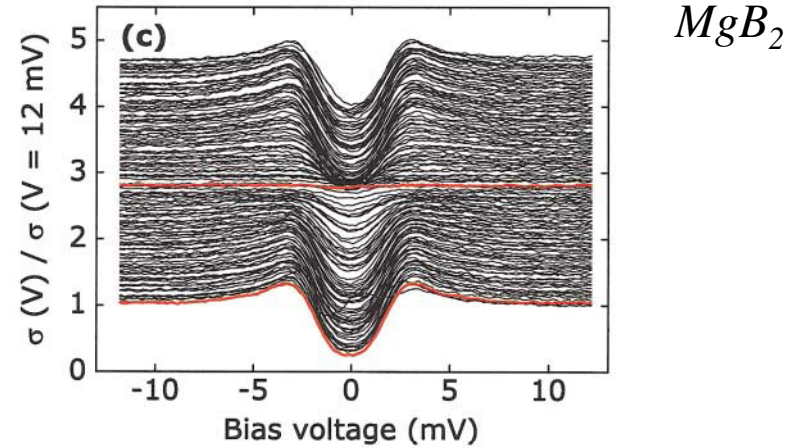


STM experimental results

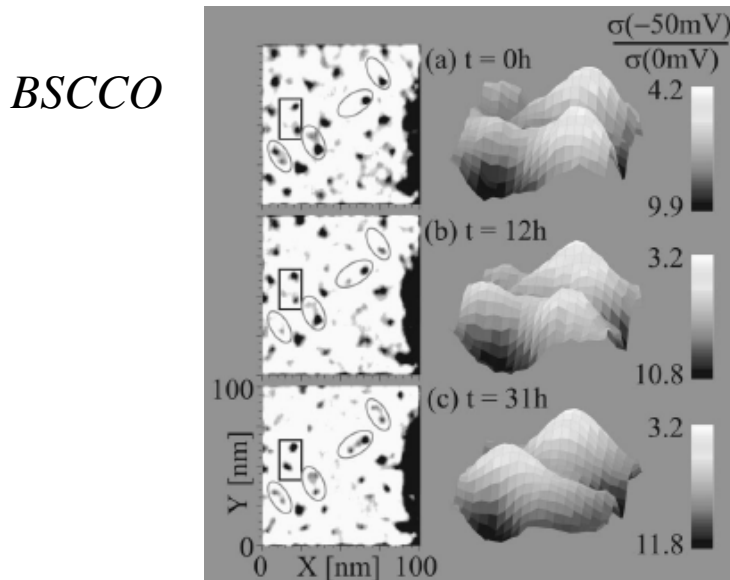
I. Guillamon et al PRL (2008)



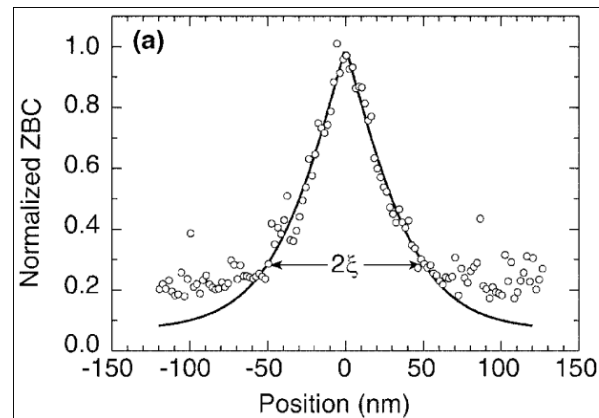
M.R. Eskildsen et al PRL (2002)



B. W. Hoogenboom et al PRB (2000)

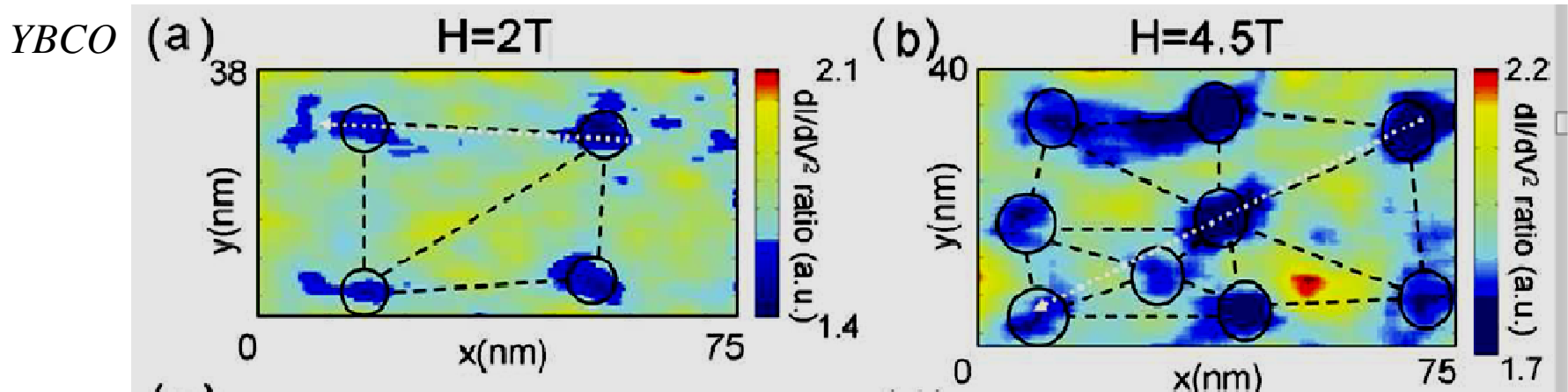


$$\xi_{theor} \sim \sqrt{\Phi_0 / H_{c2}} \ll \xi_{exp}$$



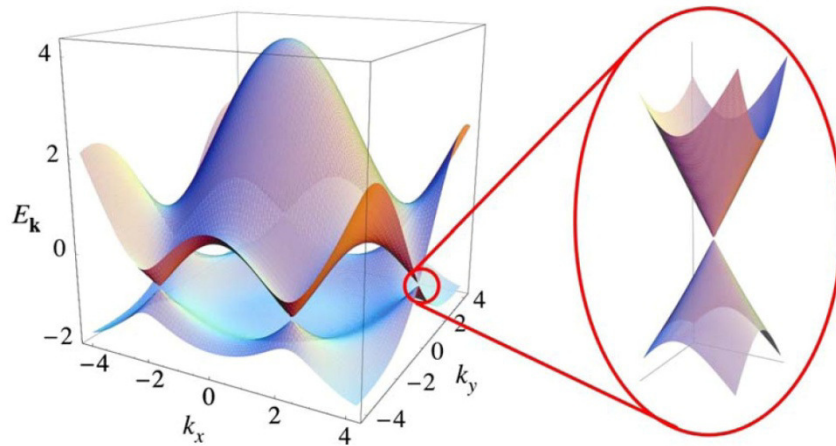
STM experiment: Anomalous Large Vortex Core

N. C. Yeh et al EPL (2009)

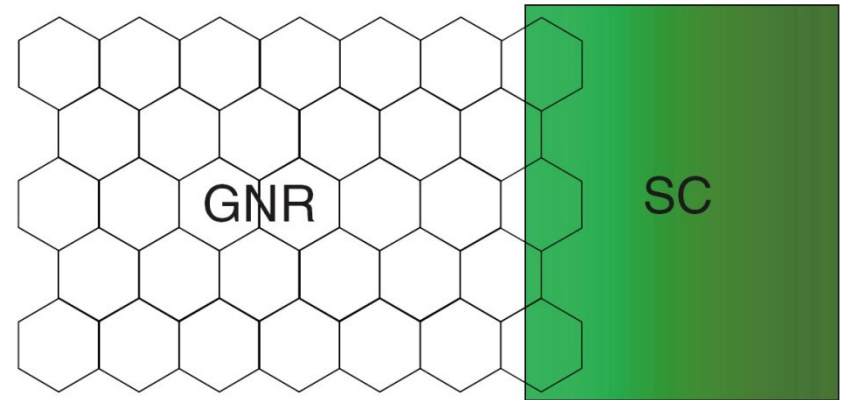


plied by the area, within experimental errors. Thus, we obtain averaged vortex lattice constants $a_B = 33.2$ nm and 23.5 nm for $H = 2$ T and 4.5 T, respectively, comparable to the theoretical values of $a_B = 35.0$ nm and 23.3 nm. On the other hand, the mean “vortex halo” radius ξ_{halo} is much longer than the SC coherence length ξ_{SC} , and the average ξ_{halo} decreases with field. We find $\xi_{\text{halo}} = (7.7 \pm 0.3)$ nm for $H = 2$ T, (6.4 ± 0.6) nm for $H = 4.5$ T, and (5.0 ± 0.7) nm for $H = 6$ T.

Vortex matter in systems with induced superconductivity. graphene and topological insulators etc.



Graphene spectrum



Superconductor – graphene junction

K. Komatsu et al, 2012

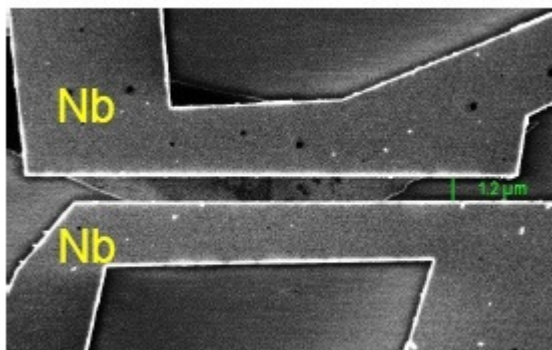
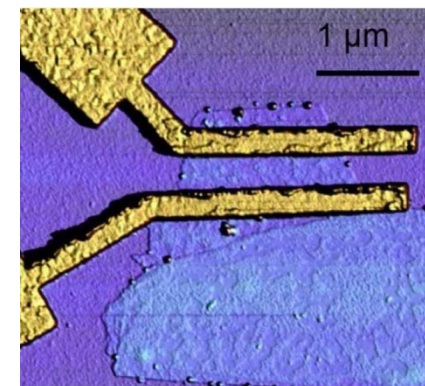


FIG. 2: Scanning electron micrograph of the graphene sample connected to Nb electrodes. The distance between electrodes is $L = 1.2 \mu\text{m}$ and the graphene width is $W = 12 \mu\text{m}$.

Ti/Al



Hubert B. Heersche et al, 2007

Search for Majorana quasiparticles

PRL 114, 017001 (2015)

PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending
9 JANUARY 2015

Experimental Detection of a Majorana Mode in the core of a Magnetic Vortex inside a Topological Insulator-Superconductor $\text{Bi}_2\text{Te}_3/\text{NbSe}_2$ Heterostructure

Jin-Peng Xu,¹ Mei-Xiao Wang,¹ Zhi Long Liu,¹ Jian-Feng Ge,¹ Xiaojun Yang,² Canhua Liu,^{1,5,*}
Zhu An Xu,^{2,5} Dandan Guan,¹ Chun Lei Gao,¹ Dong Qian,¹ Ying Liu,^{1,3,5} Qiang-Hua Wang,^{4,5}
Fu-Chun Zhang,^{2,5} Qi-Kun Xue,⁶ and Jin-Feng Jia^{1,5,†}

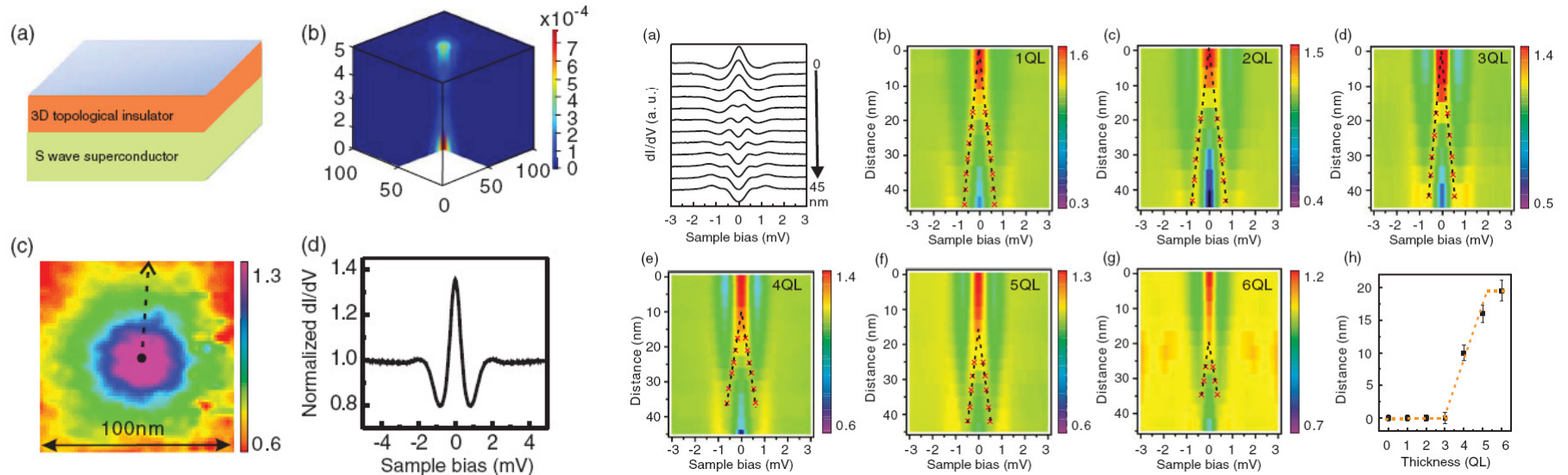
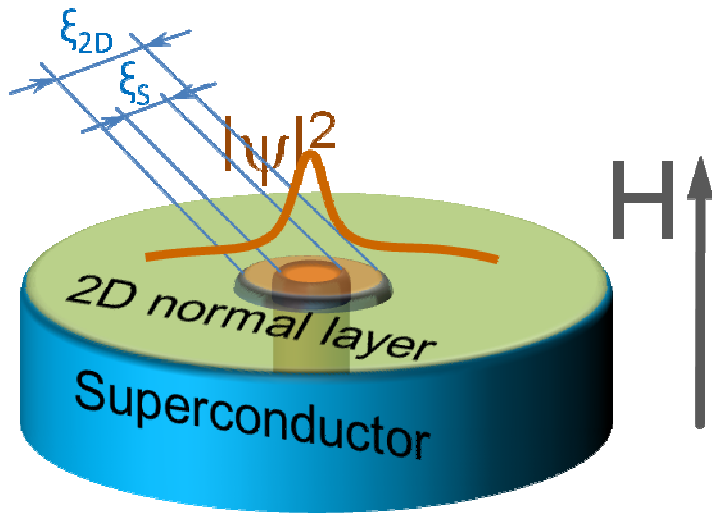


FIG. 1 (color). (a) A schematic illustration of topological insulator-superconductor heterostructure. (b) The calculated results showing two Majorana modes in a vortex core on 5 QL $\text{Bi}_2\text{Te}_3/\text{NbSe}_2$. (c) A vortex mapped by zero-bias dI/dV on 5 QL $\text{Bi}_2\text{Te}_3/\text{NbSe}_2$ at 0.1 T and 0.4 K. (d) A sharp zero-bias peak in the dI/dV spectrum measured at the center of the vortex in (c).

Vortex states in a system with induced superconducting order.

Multiple vortex core.



Small core of the size of a superconducting coherence length

Large core with the size determined by the effective coherence length in a 2D layer

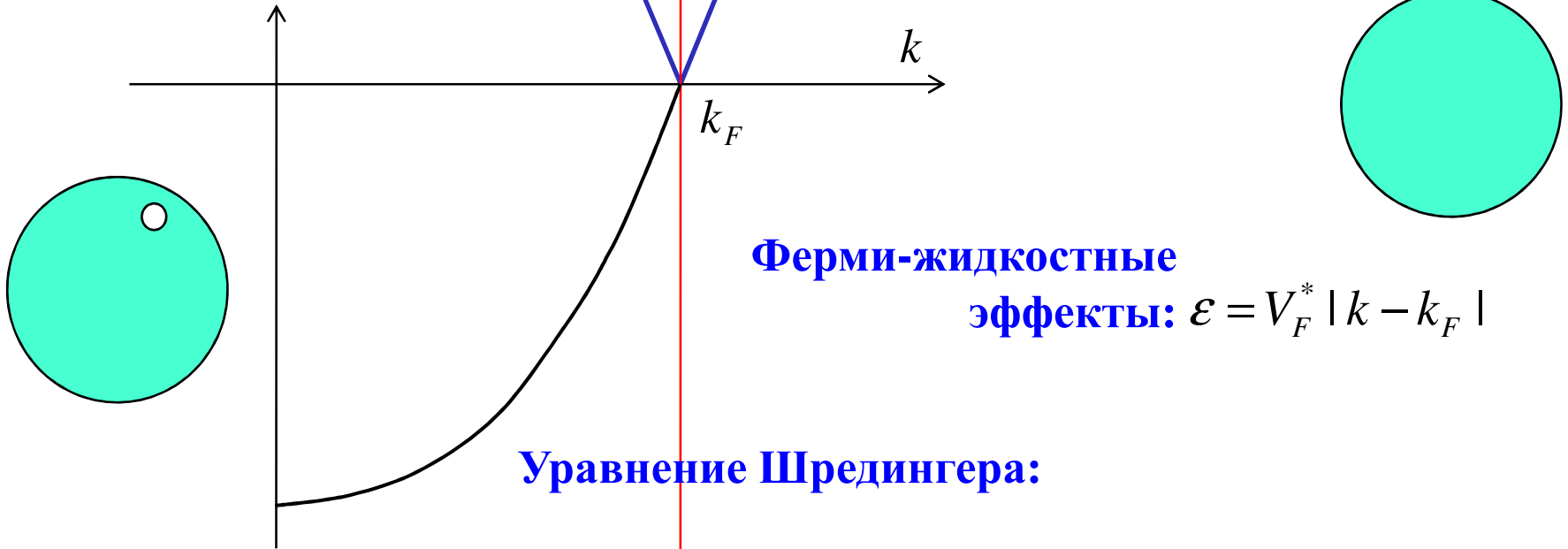
Электроны и дырки в нормальном металле

Дырки

Электроны

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \approx V_F (k_F - k)$$

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \approx V_F (k - k_F)$$



Ферми-жидкостные

эффекты: $\varepsilon = V_F^* |k - k_F|$

Уравнение Шредингера:

$$\left(\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right) v = \varepsilon v$$

$$u = 0$$

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right) u = \varepsilon u$$

$$v = 0$$

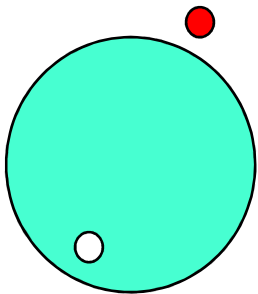
Электроны и дырки в нормальном металле

$$\langle 0 | \hat{a}_q \hat{a}_k^+ | 0 \rangle \neq 0$$

- вероятность рассеяния электрона из состояния $|\hat{a}_k^+ | 0 \rangle$ в состояние $|\hat{a}_q^+ | 0 \rangle$

Электроны и дырки в сверхпроводнике. Аномальные средние.

$\langle 0 | \hat{a}_q^+ \hat{a}_k^+ | 0 \rangle \neq 0$ - вероятность рассеяния электрона из состояния $|\hat{a}_k^+ | 0 \rangle$ в дырочное состояние $|\hat{a}_q | 0 \rangle$



2 связанных уравнения Шредингера = уравнения Боголюбова

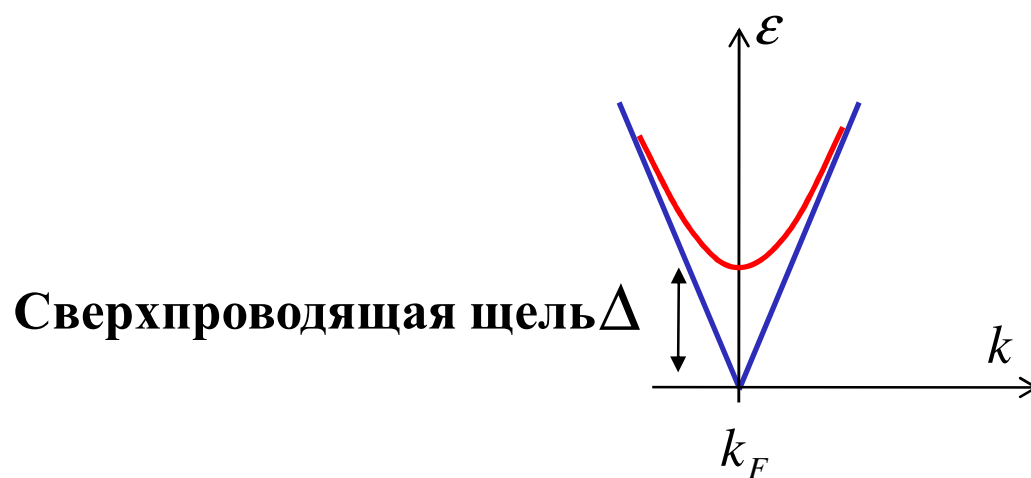
$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right) u + \Delta v = \epsilon u$$

$$\left(\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right) v + \Delta u = \epsilon v$$

Однородное сверхпроводящее состояние:


$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\Delta^2 + (\hbar V_F (k - k_F))^2}$$



Кое-какие «мелочи»:

*магнитное поле, фаза параметра порядка,
калибровочная инвариантность,
потенциальное рассеяние на
неоднородностях, границах, спин*


$$\left(\frac{\hbar^2 \left(\nabla - \frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \right)^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} + U \right) u + \Delta v = (\varepsilon \pm \beta H) u$$
$$\left(\frac{\hbar^2 \left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \right)^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} - U \right) v + \Delta^* u = (\varepsilon \pm \beta H) v$$

*Еще кое-какие «мелочи»:
Что такое оператор дельта?*


*Ответ 1: дельта – это именно тот параметр
порядка, который появляется в теории типа
Гинзбурга-Ландау*

*Ответ 2: дельта – это самосогласованное поле
куперовских пар*

*Ответ 3: дельта – это вообще-то
нелокальный оператор*

$$\hat{\Delta}u = \int \Delta(\vec{r}_1, \vec{r}_2)u(\vec{r}_2)d\vec{r}_2$$

Понизим порядок по производным!
Как устроено квазиклассическое приближение в
сверхпроводниках ?



$$\left(\frac{\hbar^2 \left(\nabla - \frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \right)^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} + U \right) u + \Delta v = (\varepsilon \pm \beta H) u$$

$$\left(\frac{\hbar^2 \left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \right)^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} - U \right) v + \Delta^* u = (\varepsilon \pm \beta H) v$$

*Масштаб
неоднородности
сверхпроводящей щели*

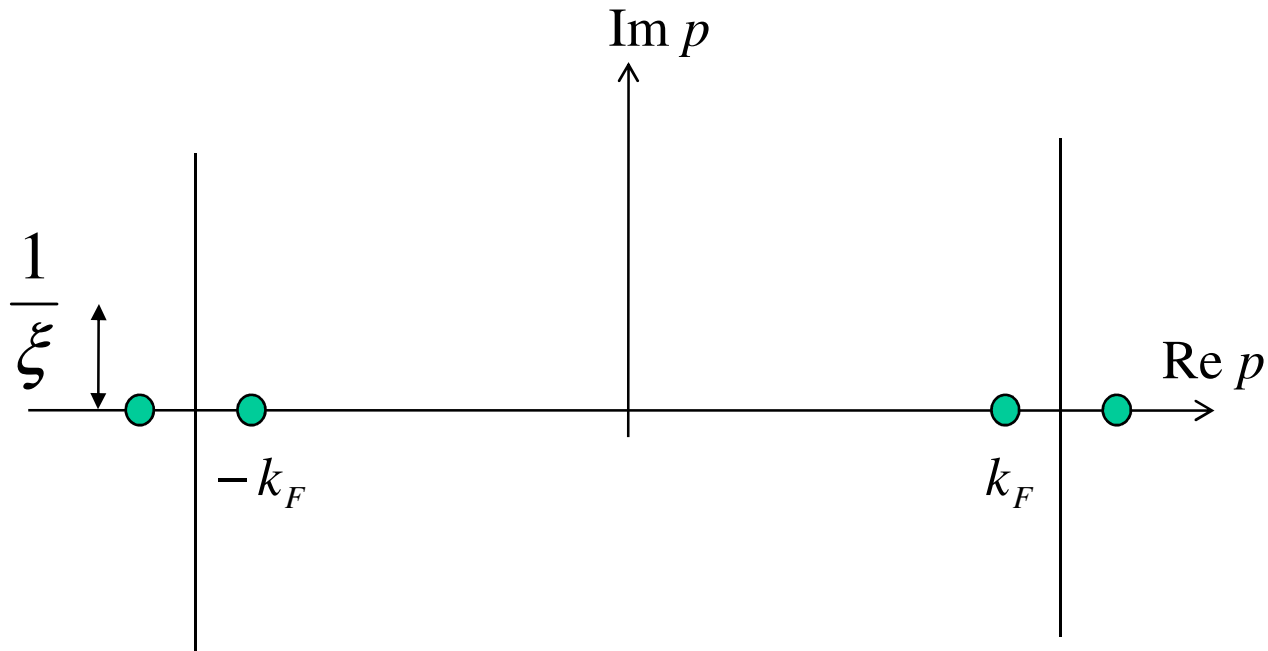
$$\xi = \frac{\hbar V_F}{\Delta}$$

$$\hat{\Psi} = (u, v) = \hat{\psi} e^{iS}$$

$$|\nabla S| = k_F \gg \frac{1}{\xi}$$

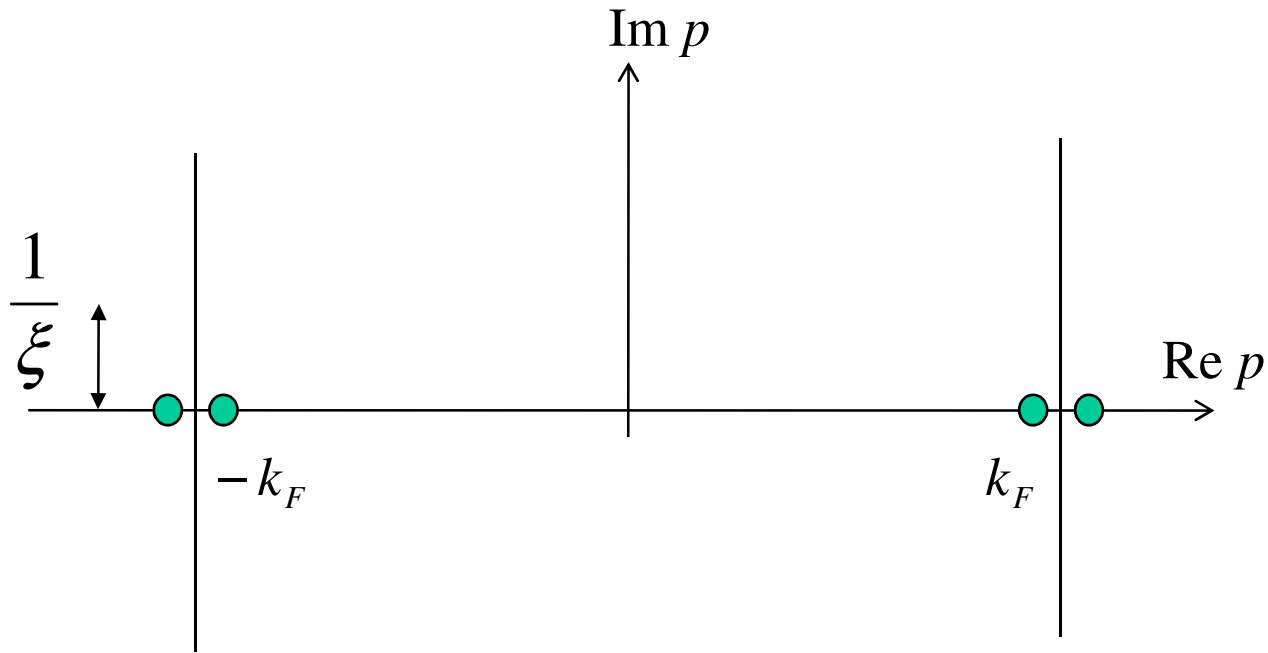
Особенности квазиклассического приближения в уравнениях Боголюбова.

$$p = S'_x$$



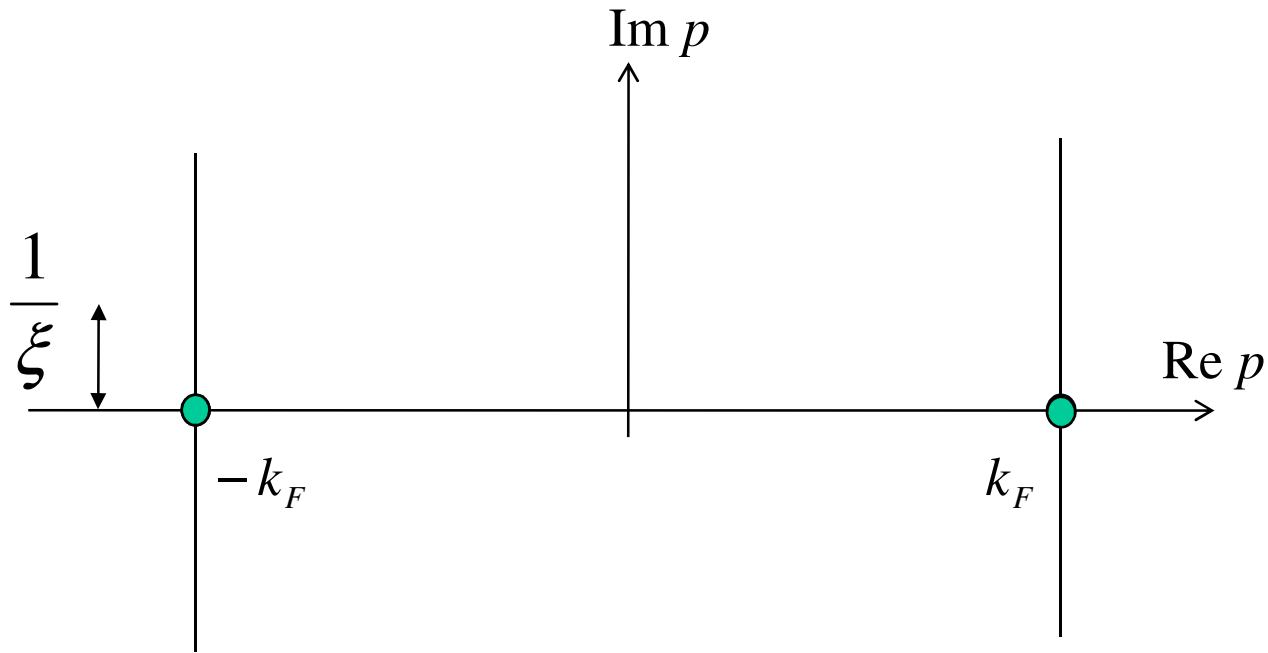
Особенности квазиклассического приближения в уравнениях Боголюбова.

$$p = S'_x$$



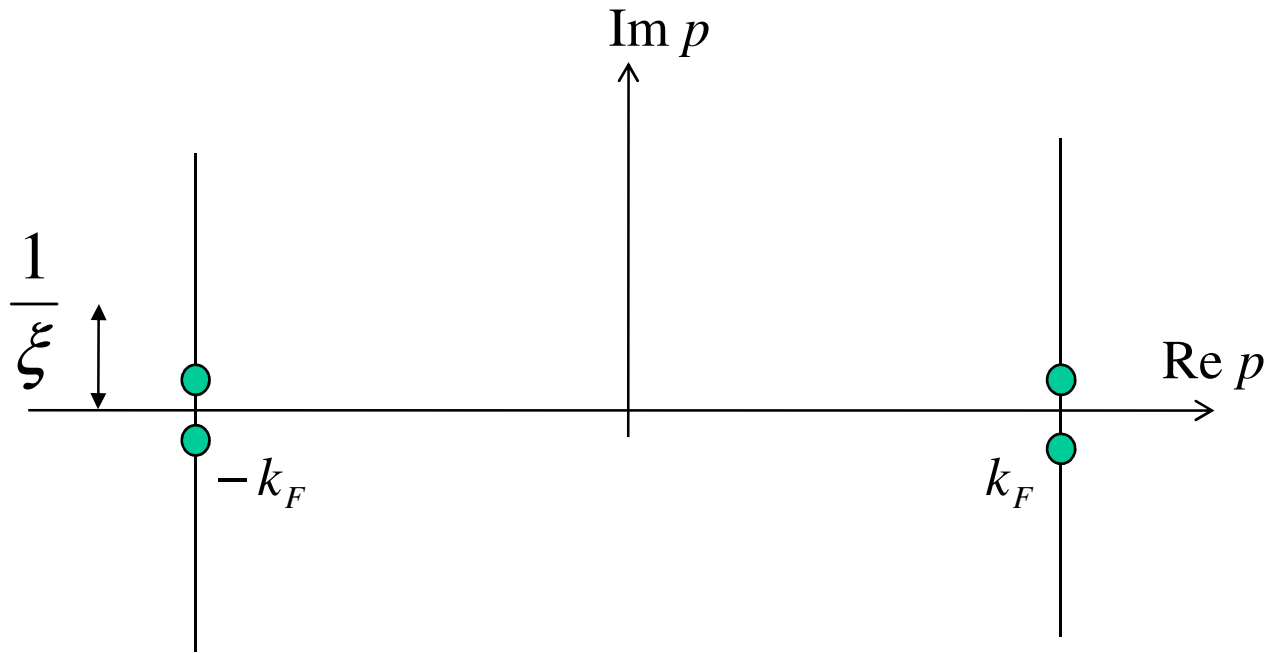
Особенности квазиклассического приближения в уравнениях Боголюбова.

$$p = S'_x$$



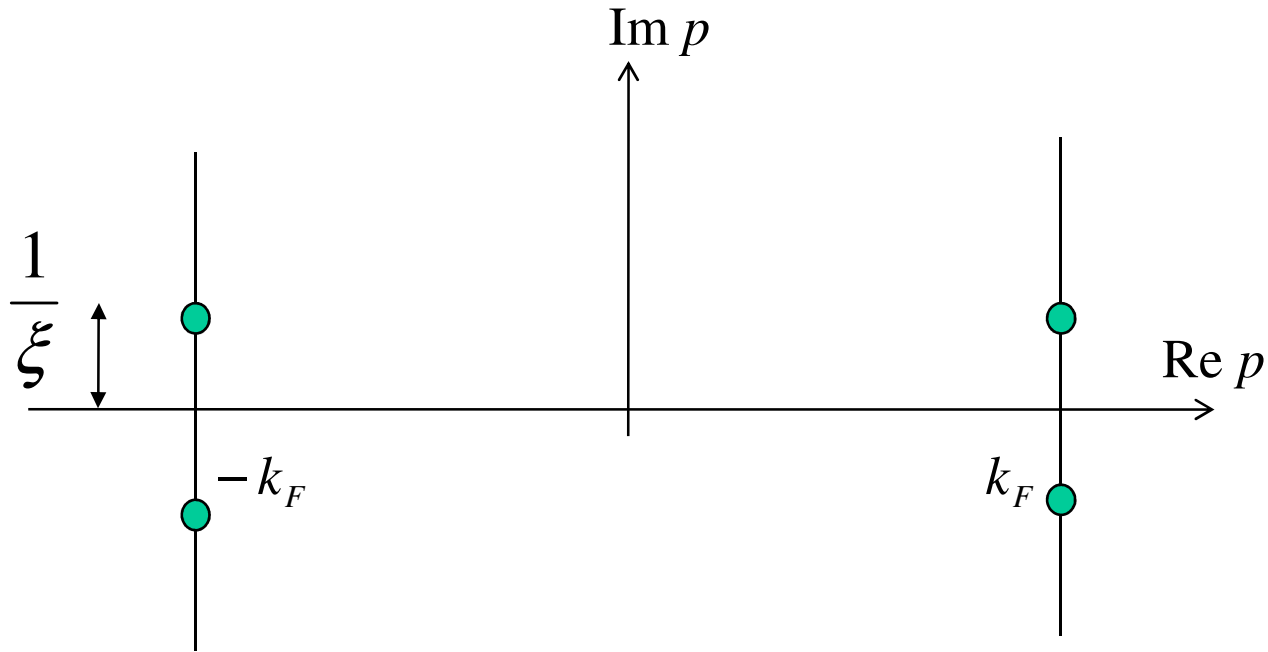
Особенности квазиклассического приближения в уравнениях Боголюбова.

$$p = S'_x$$




Особенности квазиклассического приближения в уравнениях Боголюбова.

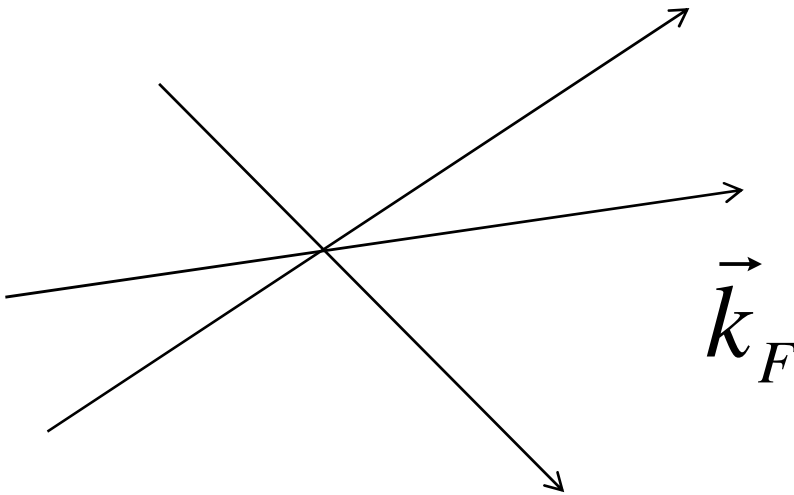
$$p = S'_x$$



Квазиклассическое приближение. Уравнения Андреева.


$$\left(-i\hbar\vec{V}_F \left(\nabla - \frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \right) + U \right) u + \Delta v = (\varepsilon \pm \beta H) u$$

$$\left(i\hbar\vec{V}_F \left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \right) - U \right) v + \Delta^* u = (\varepsilon \pm \beta H) v$$



Недостатки:

Неучет отклонений траекторий в магнитном поле,
Прецессия траекторий (неточный backscattering при андреевском отражении)

Кроме того, эти уравнения неудобны для учета рассеяния на примесях!

Квазиклассическое приближение в уравнениях для функций Грина.

$$k_F \gg \frac{1}{\xi}$$

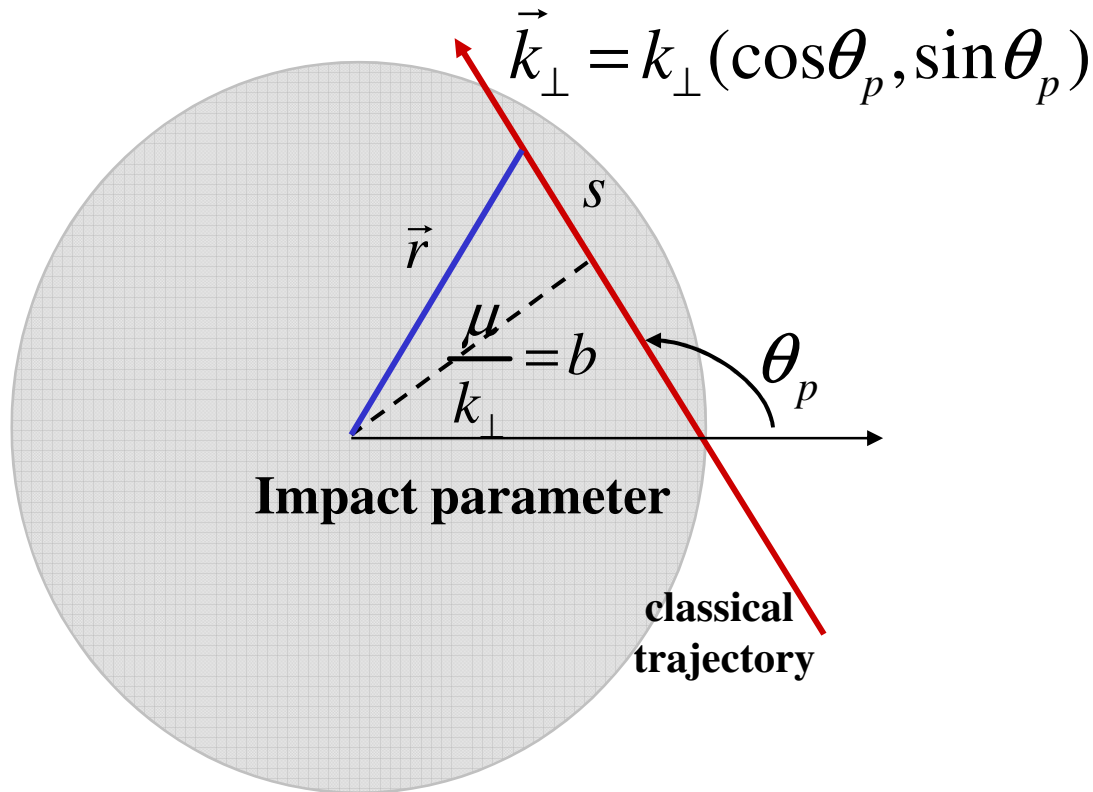
Уравнения Эйленбергера.

Грязный предел.

$$l \ll \xi$$

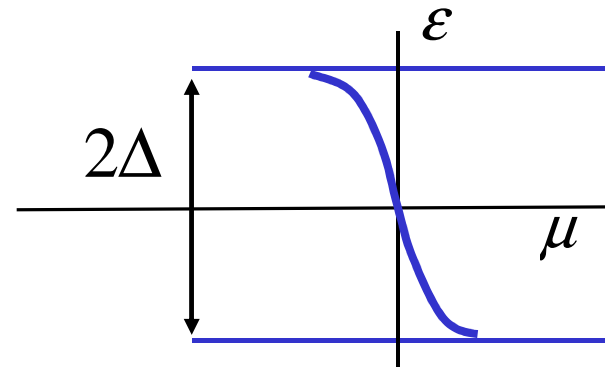
Уравнения Узаделя.

Андреевские уровни квазичастиц в вихрях



$$k_\perp = \sqrt{k_F^2 - k_z^2}$$

Fermi level

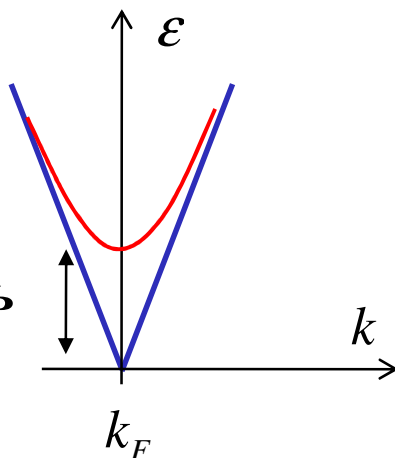


$$\epsilon_\mu(k_\perp) = -\omega\mu \approx -\frac{\mu\Delta_0}{k_\perp\xi}$$

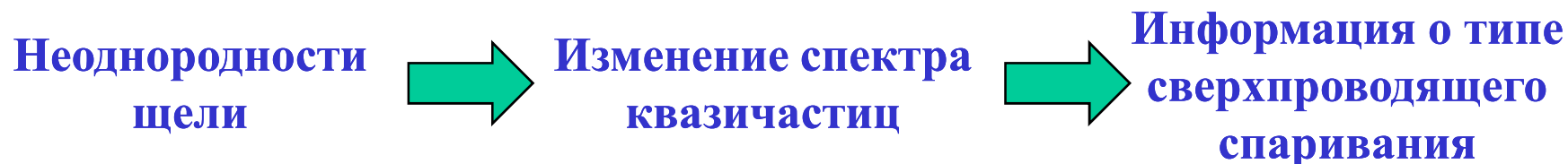
Квантовая механика квазичастиц как тест на тип сверхпроводящего спаривания

Однородное сверхпроводящее состояние:

Сверхпроводящая щель



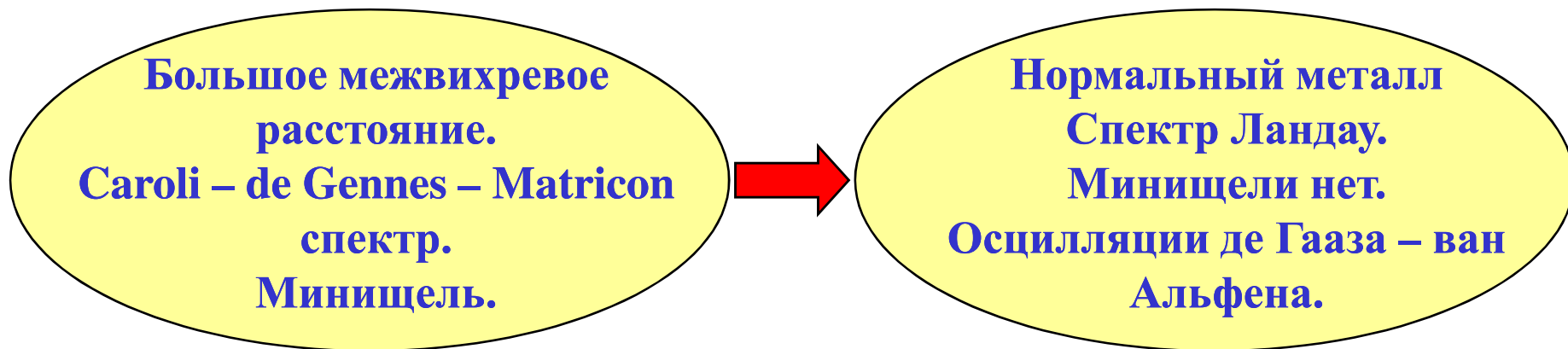
Низкие температуры: в однородном сверхпроводнике с изотропной щелью квазичастиц нет



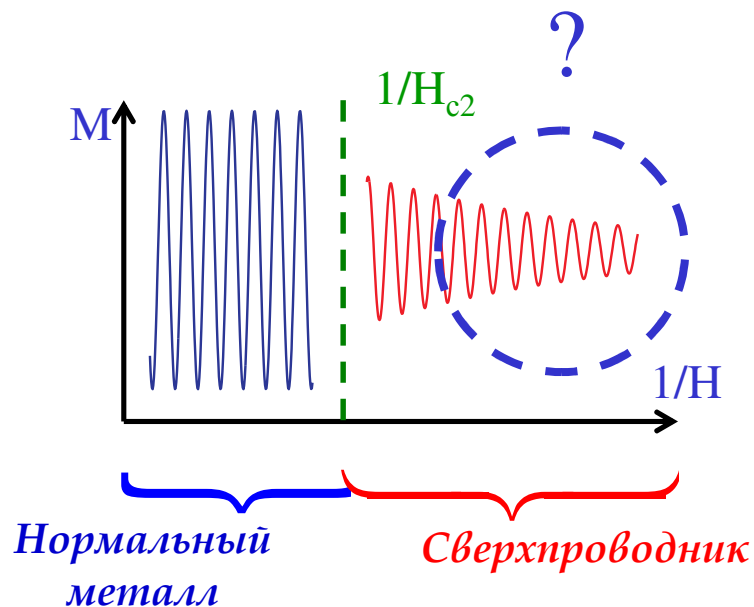
Эксперименты: туннельная спектроскопия, теплопроводность, теплоемкость, поглощение ЭМ волн, спиновая восприимчивость,

.....

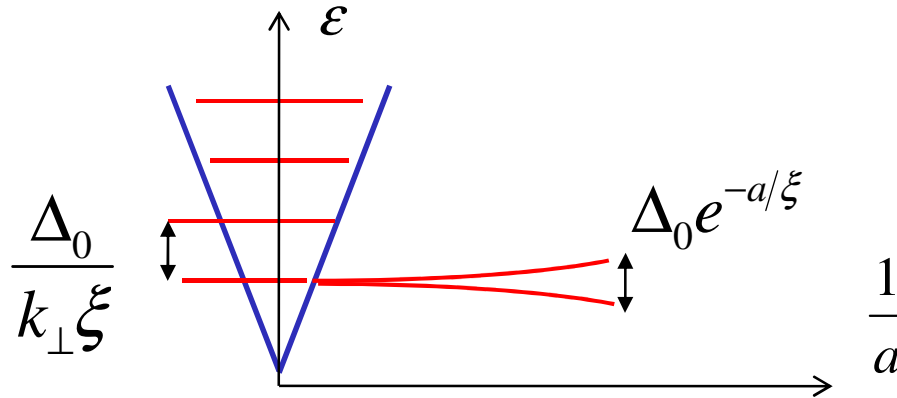
Могут ли электроны туннелировать между вихрями? Квантовые осцилляционные эффекты в сверхпроводниках



Механизм кроссовера ?



Qualitative arguments.
Critical intervortex distance:
minigap = energy level splitting due to tunneling



$$a_c \approx \frac{\xi}{2} \ln(k_F \xi)$$

Typical
 intervortex
 distance $a \sim \sqrt{\frac{\phi_0}{H}}$

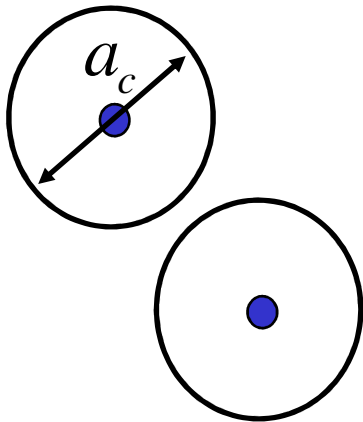
$$k_F \xi \sim 10^2 \div 10^3$$

$$\frac{a_c}{\xi} \approx 2 \div 3$$

$$H^* \sim \frac{\phi_0}{a_c^2} \sim \frac{H_{c2}}{[\ln(k_F \xi)]^2}$$

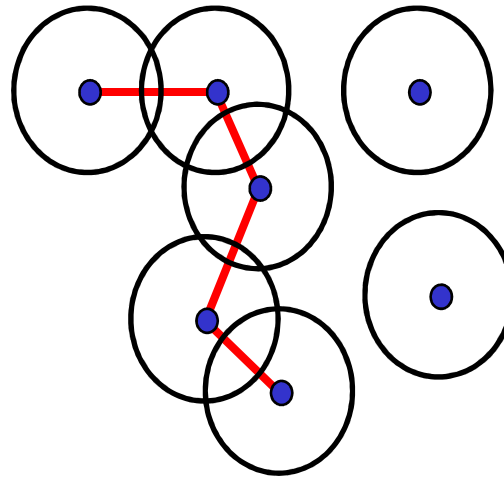
$$a_{ij} > a_c$$

*Intervortex tunneling is negligible.
Degenerate CdGM spectrum.*



$$a_{ij} < a_c$$

Vortices are strongly coupled by tunneling.

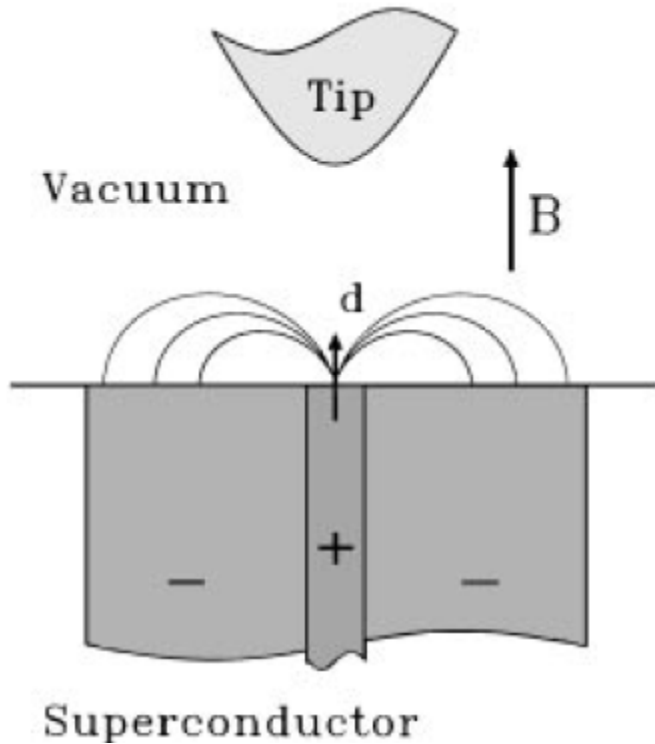


**Vortex cluster in a disordered flux line array:
Spectrum is similar to the one in m-quanta vortex**

**Cluster size~ cyclotron orbit radius.
Can we restore Landau quantization?**

$$a_c \approx \frac{\xi \varepsilon}{2} \ln(k_F \xi)$$

Can we charge the vortex ?



*First answer: not so easy!
vortex charge is very small*

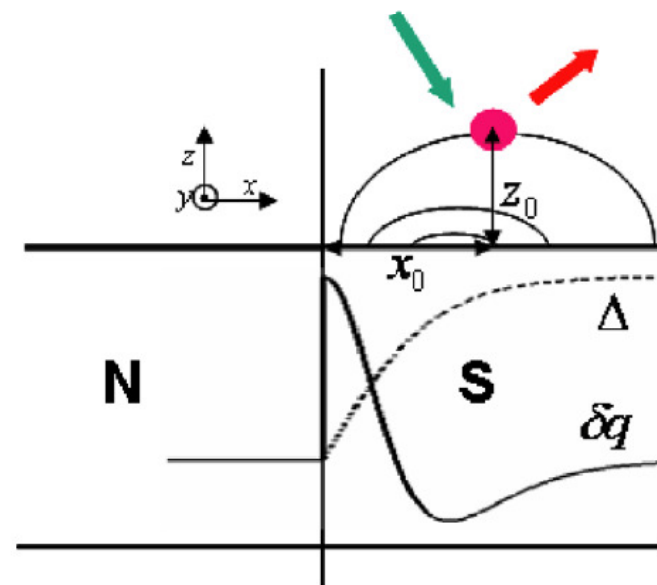
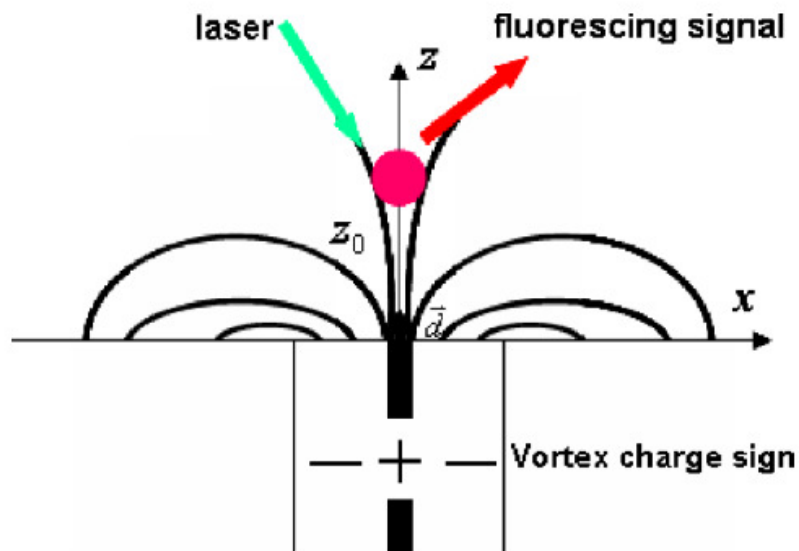
$$\frac{\Delta}{\mathcal{E}_F} \ll 1$$

Electrostatics of Vortices in Type-II Superconductors

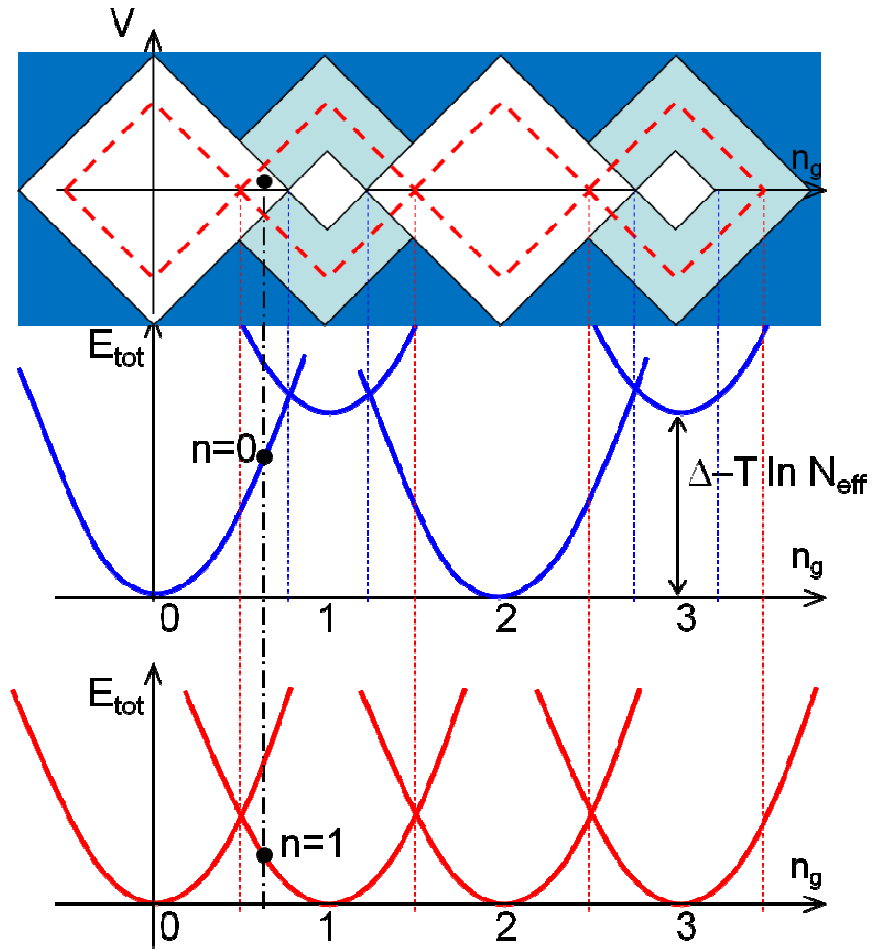
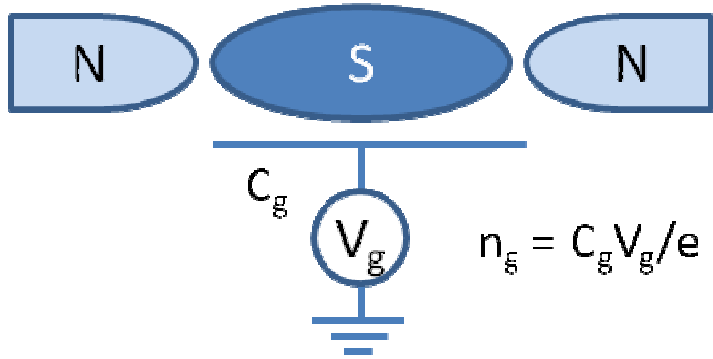
Gianni Blatter,¹ Mikhail Feigel'man,² Vadim Geshkenbein,^{1,2} Anatoli Larkin,^{1,2,3} and Anne van Otterlo¹

Single-molecule spectroscopy as a possible tool to study the electric field in superconductors

M. FAURÉ¹, B. LOUNIS^{2,3} and A. I. BUZDIN^{2,3}



Coulomb blockade. Electrons enter the sample one by one.



Coulomb diamonds

Weber blockade. Vortices enter the sample one by one.

PRL 107, 017002 (2011)

PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending
1 JULY 2011



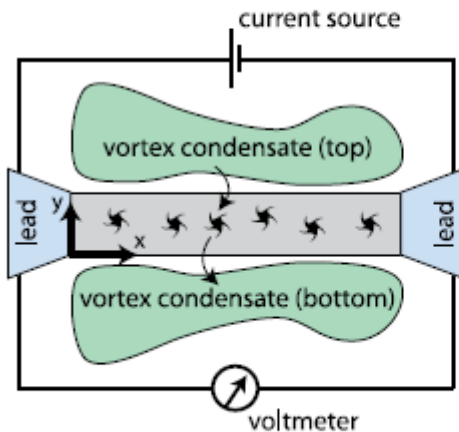
Weber Blockade Theory of Magnetoresistance Oscillations in Superconducting Strips

David Pekker,¹ Gil Refael,¹ and Paul M. Goldbart²

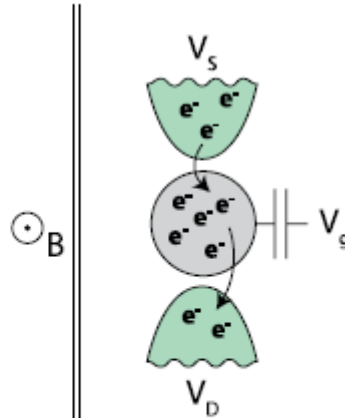
¹Department of Physics, California Institute of Technology, MC 114-36, Pasadena, California 91125, USA

²School of Physics, Georgia Institute of Technology, 837 State Street, Atlanta, Georgia 30332-0430, USA

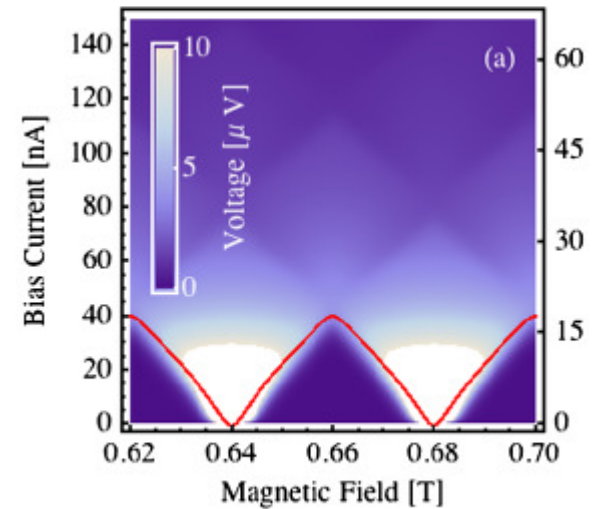
(Received 22 October 2010; published 30 June 2011)



a. Superconducting Strip



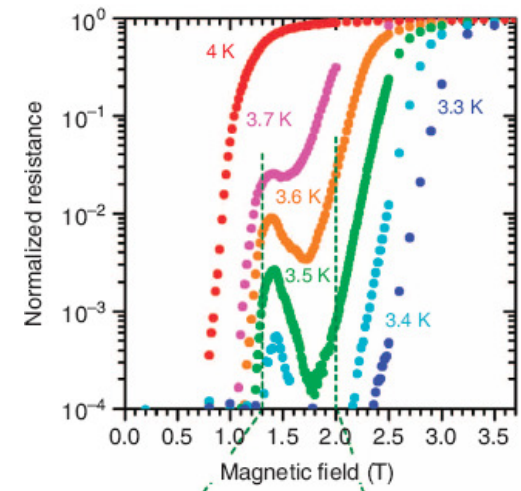
b. Quantum Dot Analogue



Weber diamonds

Magnetic field-induced dissipation-free state in superconducting nanostructures

R. Córdoba^{1,2}, T.I. Baturina^{3,4}, J. Sesé^{1,2}, A. Yu Mironov³, J.M. De Teresa^{1,2,5}, M.R. Ibarra^{1,2,5}, D.A. Nasimov³, A.K. Gutakovskii³, A.V. Latyshev³, I. Guillamón^{6,7}, H. Suderow⁶, S. Vieira⁶, M.R. Baklanov⁸, J.J. Palacios⁹ & V.M. Vinokur⁴



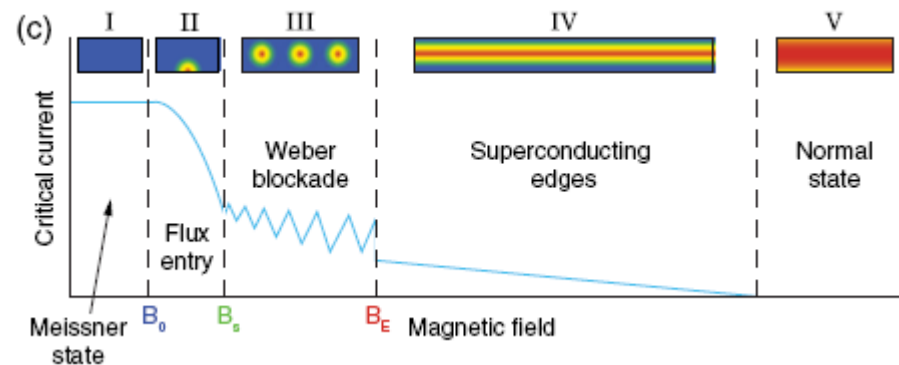
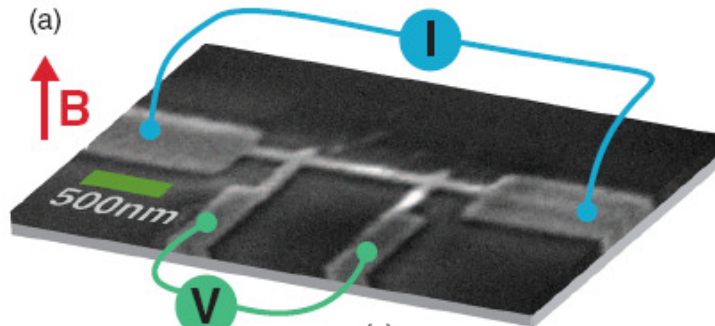
PRL 114, 077002 (2015)

PHYSICAL REVIEW LETTERS

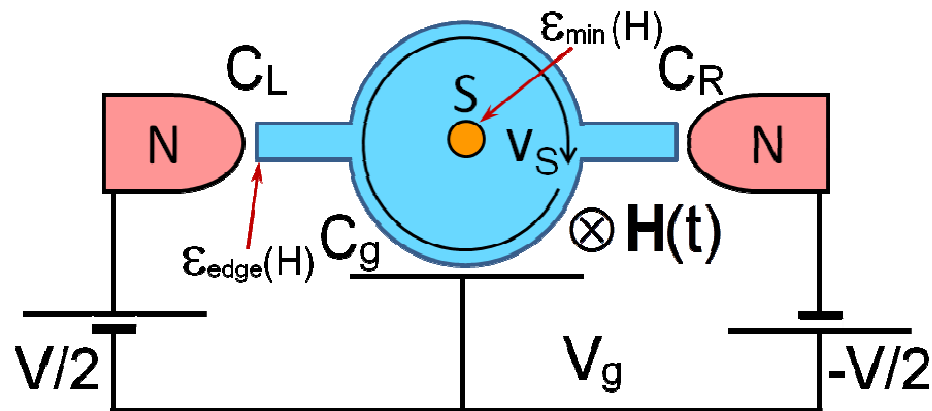
week ending
20 FEBRUARY 2015

Measurement of Critical Currents of Superconducting Aluminum Nanowires in External Magnetic Fields: Evidence for a Weber Blockade

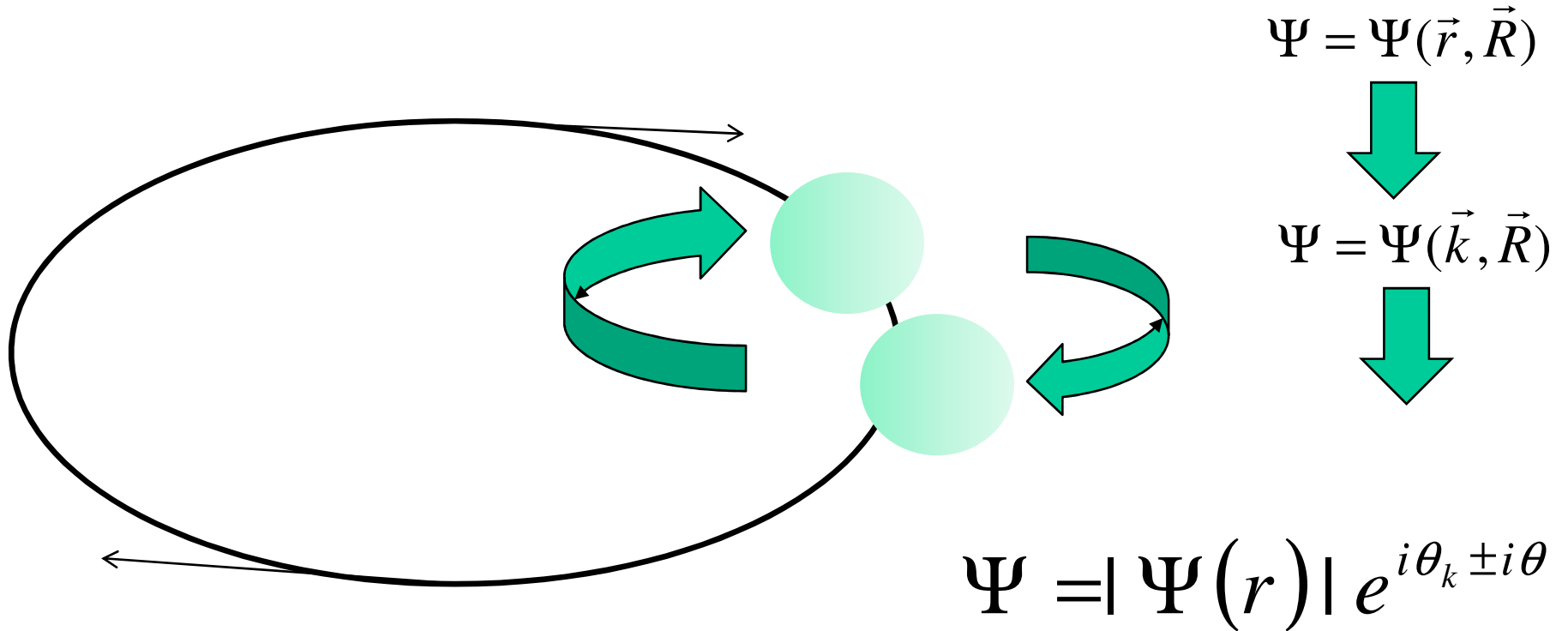
Tyler Morgan-Wall, Benjamin Leith, Nikolaus Hartman, Atikur Rahman, and Nina Marković
Department of Physics and Astronomy, Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland 21218, USA



Вход/выход вихрей и зарядов можно синхронизовать за счет эффекта четности!



*Нельзя ли использовать состояния электронов в вихрях как кубиты (2х уровневые системы)?
Majorana fermions, zero modes, etc.*



Вихрь есть и в координатном и в импульсном пространстве

Что нам надо помнить о вихрях и электронах?

- **Вихри – это квантовые ямы для электронов**
- **Электроны в вихрях обладают знанием об устройстве сверхпроводящего спаривания**
- **Электроны в вихрях определяют подвижность вихрей**
- **Электроны могут туннелировать между вихрями**