

# Численное решение задач стабилизации Управление с обратной связью

Корнев А.А.

Мех.-мат. МГУ им. М.В. Ломоносова, ИВМ РАН

Нелинейные волны–XVII

28 февраля 2016г.

# Numerical algorithms for a problem of asymptotic stabilization Feedback control

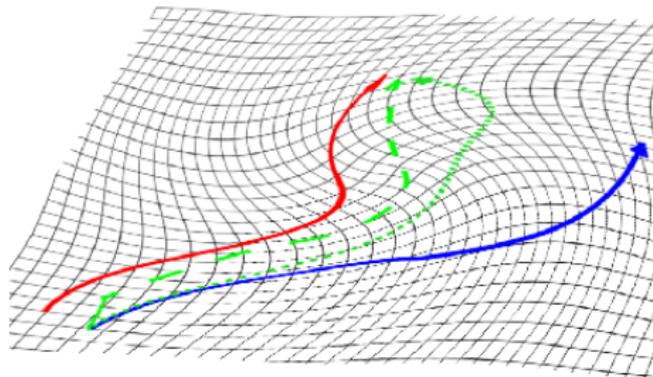
Kornev Andrei A.  
Department of Mechanics and Mathematics,  
M.V. Lomonosov Moscow State University;  
INM RAS

Nonlinear Waves –XVII

28/02/2016



# Полудинамическая система



$$z_0, \{z(t) = S(t, z_0), t \geq 0\},$$
$$a_0, \{a(t) = S(t, a_0), t \geq 0\}.$$

## Стабилизация

по начальным данным:

$$b_0 = a_0 + l_0, \quad \{b(t) = S(t, b_0), t \geq 0\};$$

по правой части, краевым условиям:

$$b_0 = a_0, \quad \{b(t) = S_F(t, b_0), t \geq 0\}.$$

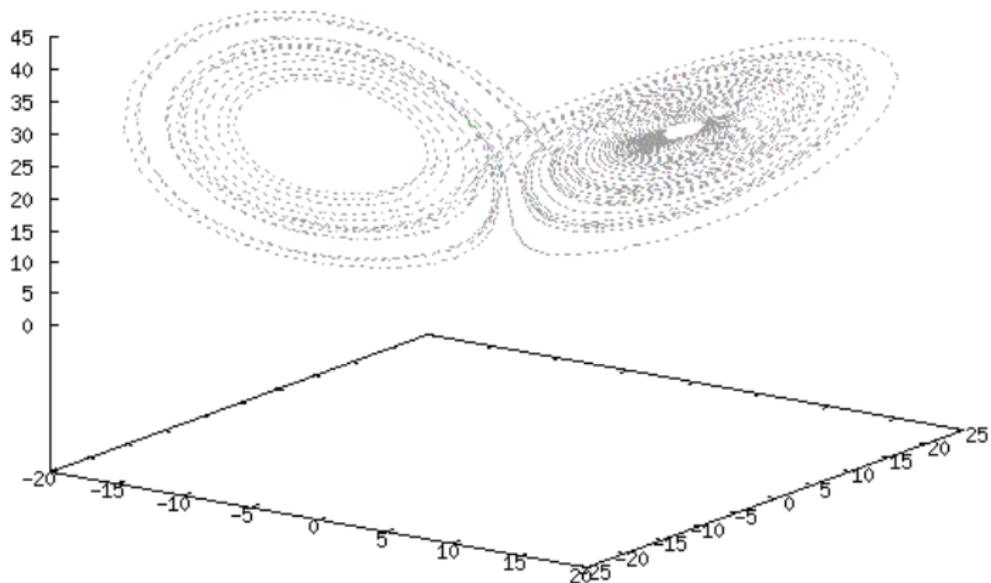
$$\|z(t) - b(t)\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty.$$

Пример 1. Задача Лоренца.

$$\begin{cases} x_t = \delta(y - x), & \delta = 10.0, \\ y_t = rx - y - xz, & r = 28.0, \\ z_t = xy - bz, & b = 8/3. \end{cases}$$

$$H = \mathbb{R}^3, \quad \{(x(t), y(t), z(t)), t \geq 0\}.$$

Типичное поведение решения.



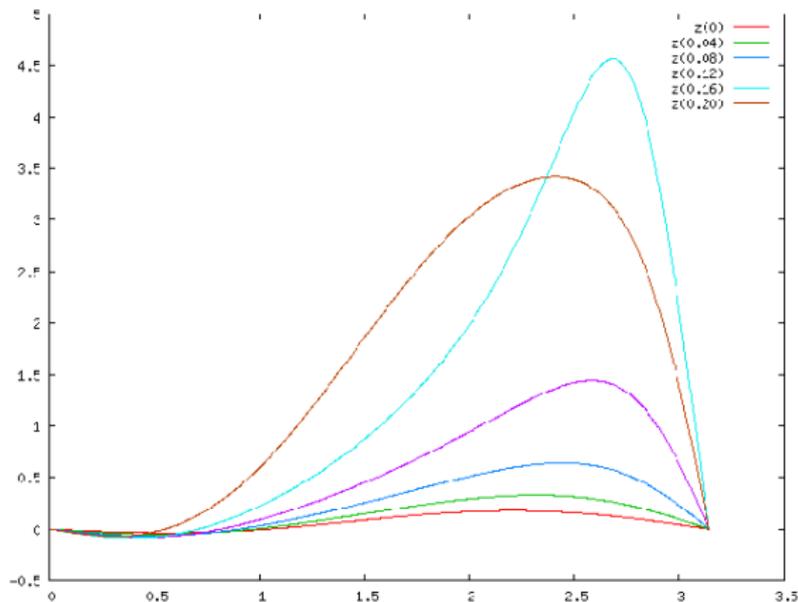
Пример 2. Уравнение типа Чафе – Инфанта – Бюргерса с обострением.

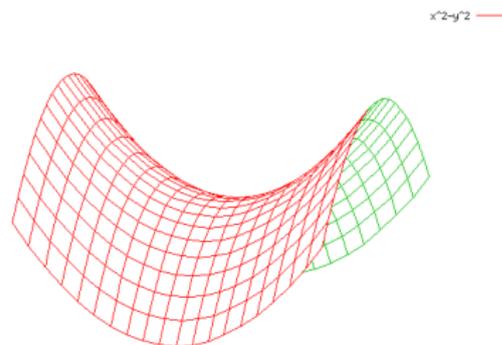
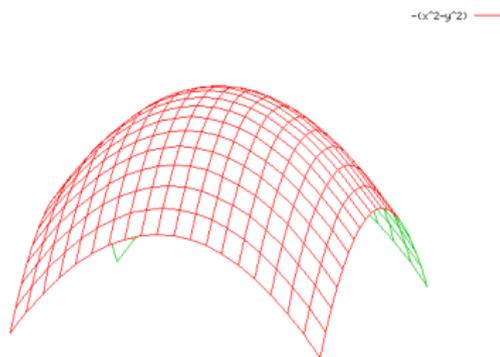
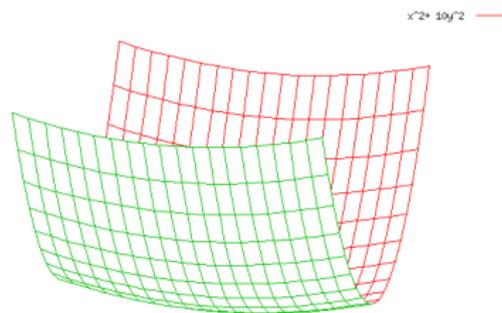
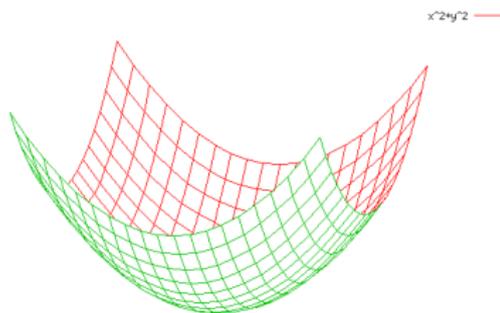
$$u_t = u_{xx} + bu - (\alpha_0 u^3 - \alpha_1 uu_x)f(t), \quad \alpha_{0,1} = 100, b = 17,$$

$$u = u(t, x), \quad (t, x) \in [0, T] \times [0, \pi], u(0, x) = a(x), f(t) = (t - 0.17);$$

с нулевыми краевыми условиями  $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ .

Типичное поведение решений.





Модельный пример. Рассмотрим следующую линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = 2u_1 + 1, \\ \frac{du_2}{dt} = -3u_2 + 2. \end{cases}$$

Для различных начальных условий  $u(0) = z(0)$  и  $u(0) = a(0)$  имеем различные траектории:

$$z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} + t \\ e^{-3t} + 2t \end{pmatrix},$$

$$a(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} + t \\ 3e^{-3t} + 2t \end{pmatrix}.$$

В данном случае  $\|z(t) - a(t)\| \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Анализ динамики. Выпишем уравнение для функции разности

$$h(t) = a(t) - z(t)$$

$$\begin{cases} \frac{dh_1}{dt} = 2h_1, \\ \frac{dh_2}{dt} = -3h_2 \end{cases}$$

и общее решение

$$h(t) = \begin{pmatrix} h_1(0)e^{2t} \\ h_2(0)e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

При  $h_1(0) \neq 0$  имеем  $\|h(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Задача стабилизации по начальным данным. Дано

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = 2u_1 + 1 \\ \frac{du_2}{dt} = -3u_2 + 2 \end{cases} \quad z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathcal{L} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найти  $l \in \mathcal{L}$ : для  $\tilde{a}(0) = a(0) + l$  имеем  $\|z(t) - \tilde{a}(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Решение: Для  $h(t) = \tilde{a}(t) - z(t)$  имеем:

$$\begin{cases} \frac{dh_1}{dt} = 2h_1 \\ \frac{dh_2}{dt} = -3h_2 \end{cases} \quad \tilde{a}(0) - z(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix}$$

Отсюда находим:  $\tilde{a}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Величина  $\|\tilde{a}(t) - z(t)\|$  уменьшается при всех  $t \geq 0$ , хотя  $\|\tilde{a}(0) - z(0)\| > \|a(0) - z(0)\|$ .

Задача стабилизации по правой части. Дано

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = 2u_1 + 1 + f_1(t) \\ \frac{du_2}{dt} = -3u_2 + 2 + f_2(t) \end{cases}$$

Для различных начальных условий  $z(0)$  и  $a(0)$  и различных правых частей  $f = (f_1, f_2)^T$  имеем различные траектории:  $z(t)$  для  $f \equiv 0$  и  $a_f(t)$  для некоторого  $f \in \mathcal{F}$ . Пусть

$$z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathcal{F} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Найти  $f \in \mathcal{F}$ :  $\|a_f(t) - z(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Решение: Для  $h(t) = a_f(t) - z(t)$  имеем:

$$\begin{cases} \frac{dh_1}{dt} = 2h_1 + c \\ \frac{dh_2}{dt} = -3h_2 - c \end{cases} \quad h(0) = a(0) - z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Будем искать  $c$  из условия  $h_1(t)|_{t=1} = 0$ . Так как  $h_1(t) = h_1(0)e^{2t} + ct = e^{2t} + ct$ , следовательно,  $h_1(1) = 0 = e^2 + c$ ,  $c = -e^2$ . Таким образом, имеем:

$$f(t) = \begin{pmatrix} -e^2 \\ e^2 \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 1, \quad f(t) \equiv 0, t > 1.$$

На первом этапе  $0 \leq t \leq 1$  допустим рост величины  $\|a_f(t) - z(t)\|$ , но далее  $\|a_f(t) - z(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

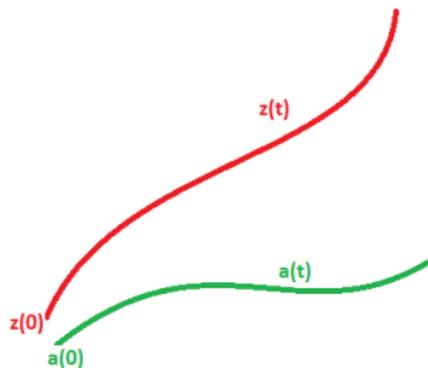
Задача типа стабилизации—усвоения по начальным данным.

Дано:

$$\frac{d}{dt}u = Au + f; \quad u \in \mathbb{R}^N.$$

Пусть

начальное условие  $u(0) = z(0)$  порождает траекторию  $z(t)$ ,  
начальное условие  $u(0) = a(0)$  порождает траекторию  $a(t)$ .



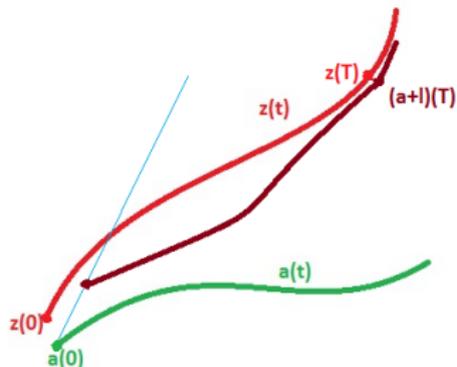
Здесь

$z(t)$  — "идеальная траектория",  
 $a(t)$  — "текущая траектория".

Найти:

$$l \in \mathcal{L}: \tilde{a}(0) = a(0) + l, \|\tilde{a}(T) - z(T)\| \ll 1$$

для заданного момента времени  $T$  и заданного подпространства  $\mathcal{L}$ ,



и величина  $\|\tilde{a}(t) - z(t)\|$  уменьшается при  $T < t \leq T + \Delta$ .

Решение: Выпишем уравнение на функцию  $h(t) = \tilde{a}(t) - z(t)$  и обеспечим  $\|h(t)\| \rightarrow o(1)$  при  $t \rightarrow T$ . Имеем:

$$\frac{d}{dt}h = Ah, \quad h(0) = z(0) - \tilde{a}(0), \quad l = \sum_{i=1}^{i_0} c_i l_i, \quad \mathcal{L} = \langle l_1, \dots, l_{i_0} \rangle.$$

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Re} A_- \leq \lambda_- < \lambda < \lambda_+ \leq \operatorname{Re} A_+; \quad \lambda < 0.$$

Поправка  $l = \sum_{i=1}^{i_0} c_i l_i$  вычисляется из условия  $\tilde{a}(0) \in P_-[\mathbb{R}^N]$ .

Здесь:

$P_+ \mathbb{R}^N$  — подпространство начальных данных для растущих решений  $h(t)$ ,

$P_- \mathbb{R}^N$  — подпространство начальных данных для убывающих решений  $h(t)$ .

Пример. Задача типа теплопроводности:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu, & u = u(t, x), \\ t \geq 0, & x \in \omega = [0, \pi], \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx). \end{cases}$$

Решение задачи имеет вид:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\lambda_k t} \sin(kx), \quad \lambda_k = b - k^2.$$

Пусть  $\lambda_{i_0} = b - i_0^2 > 0 > b - (i_0 + 1)^2 = \lambda_{i_0+1}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L_2(0,1)} \rightarrow 0 &\Leftrightarrow c_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, i_0. \\ &\Leftrightarrow \\ u(0, x) \in P_-[L_2(0, 1)] &= \text{span} \langle \sin(kx), k = i_0, i_0 + 1, \dots \rangle \\ &\Leftrightarrow \\ u(0, x) \perp P_+[L_2(0, 1)] &= \text{span} \langle \sin(kx), k = 1, \dots, i_0 \rangle \end{aligned}$$

Пример. Задача типа теплопроводности:

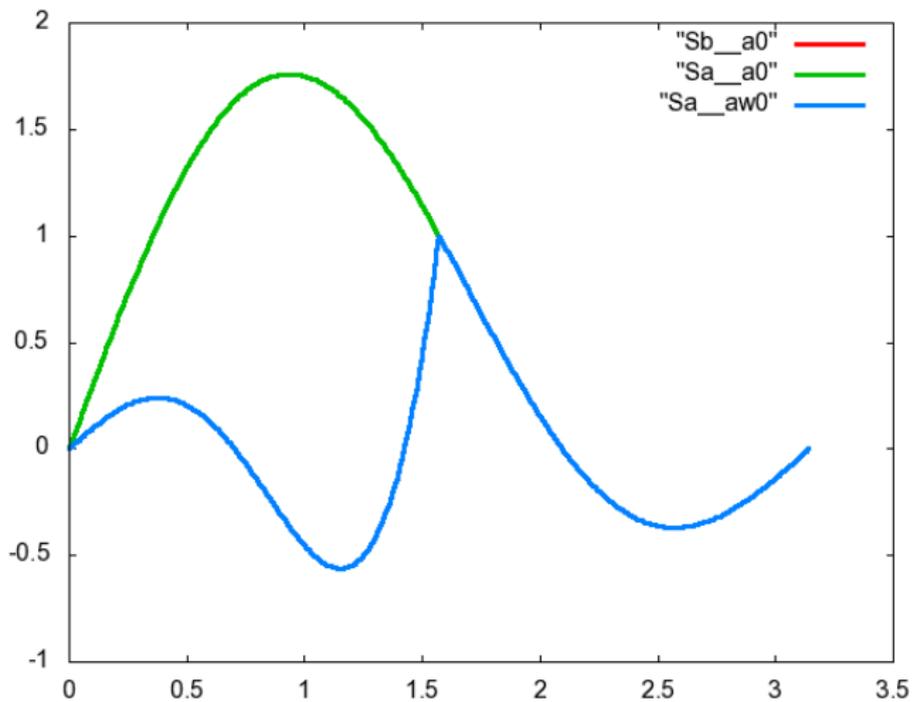
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 7u, \quad u = u(t, x), \\ t \geq 0, \quad x \in \omega = [0, \pi], \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad u(0, x) = \sin(x) + \sin(2x), \\ \mathcal{L} = \langle l_i(x) = \begin{cases} \Delta_0^{-1} \sin(ix), & x \in [0, \pi/2[ \\ 0, & x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}, i = 1, 2 \rangle. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} u(0, x) &\in P_+[L_2(0, 1)] = \text{span} \langle \sin(x), \sin(2x) \rangle \\ u(0, x) &\perp P_-[L_2(0, 1)] = \text{span} \langle \sin(kx), k = 3, 4, \dots \rangle \end{aligned}$$

Имеем систему:

$$\begin{cases} (u(0) + c_1 l_1(x) + c_2 l_2(x), \sin(x)) = 0, \\ (u(0) + c_1 l_1(x) + c_2 l_2(x), \sin(2x)) = 0. \end{cases}$$

Результат проектирования  $\sin(x) + \sin(2x)$  вдоль  $\mathcal{L}$  на  $\langle \sin(kx), k = 3, 4, \dots \rangle$ :



Пример. Задача о нагреве/охлаждении стержня.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & u = u(t, x), \\ t \geq 0, & x \in \omega = [M\pi, (M+1)\pi], \\ u(t, M\pi) = \theta_1(t), & u(t, (M+1)\pi) = \theta_2(t). \end{cases}$$

$$z(0) \equiv 0, \theta_1(t) \equiv \theta_2(t) = 0.$$



$$a(0) \equiv 30, \theta_1(t) = ?, \theta_2(t) = ?$$

Рассмотрим расширенную вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu(x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right), & \tilde{u} = \tilde{u}(t, x), \\ t \geq 0, & x \in \tilde{\omega} = [0, (2M+1)\pi]; & \tilde{u}(t)|_{\partial \tilde{\omega}} = z, \\ \mu(x)|_{\omega} \equiv \mu_1, & \mu(x)|_{\tilde{\omega}/\omega} > 0. \end{cases}$$

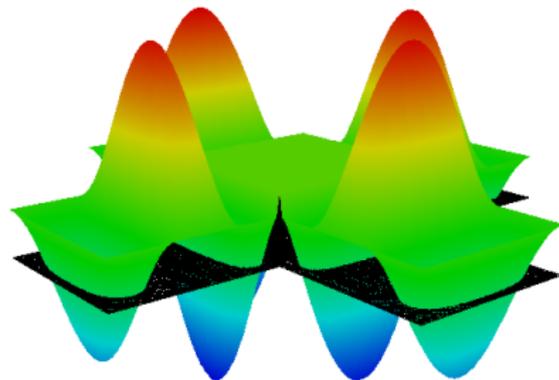
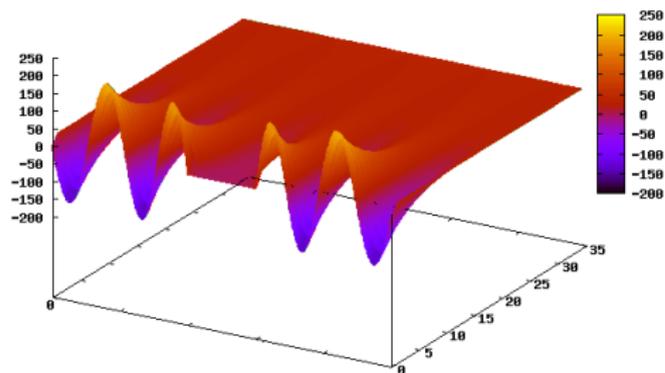
В области  $\omega$  задачи совпадают:



В области продолжения  $\bar{\omega} = \tilde{\omega}/\omega$  начальная функция  $\tilde{u}(0, x)$  и коэффициент  $\mu(x)$  выбираются специальным образом:

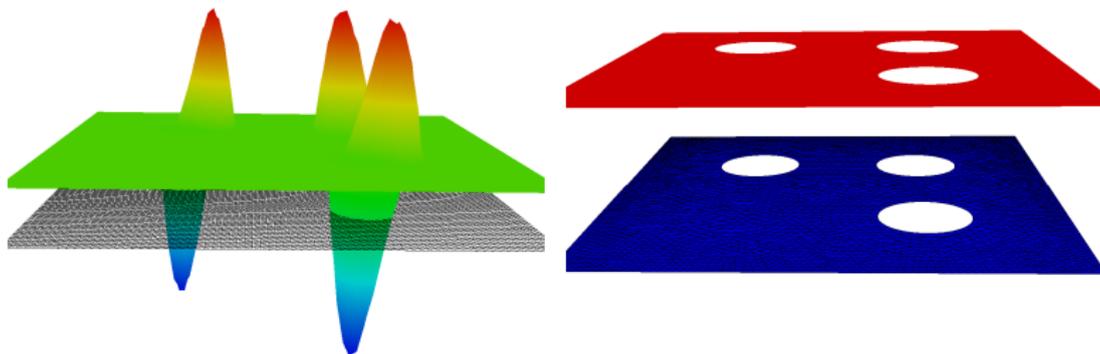


# Результаты расчетов для стержня и пластины.



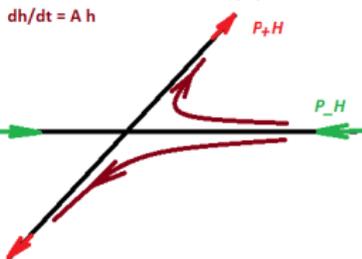
Параметры:  $\tilde{\omega}$ ,  $\mu$ ,  $i_0$ ,  $\mathcal{L}$ .

Результаты расчетов для пластины.

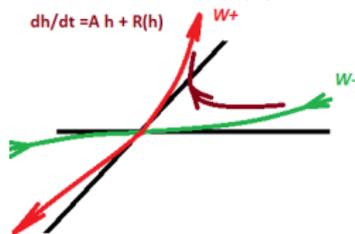


Областью продолжения может являться некоторая подсетка (что соответствует задаче усвоения).

### Линейная задача:



### Нелинейная задача:



Пусть  $S(u) = Lu + R(u)$ ,  $u_{n+1} = S(u_n)$ ,  $z_0 = 0$ ,  $S(0) = 0$  и выполнены условия (а):

- a<sub>0</sub>)  $P_+, P_- : H \rightarrow H, L : H \rightarrow H, R(u) = S(u) - Lu;$
- a<sub>1</sub>)  $P_+ + P_- = I, \quad \|P_+\| = \|P_-\| \leq C_{\pm};$
- a<sub>2</sub>)  $L(P_+H) = P_+H, \quad L(P_-H) \subset P_-H;$
- a<sub>3</sub>)  $\|Lv\| \geq \mu_+ \|v\|, \quad \forall v \in P_+H, \quad \mu_+ = 1 + \delta_+ \geq 1;$
- a<sub>4</sub>)  $\|Lw\| \leq \mu_- \|w\|, \quad \forall w \in P_-H, \quad \mu_- = 1 - \delta_- \leq 1;$
- a<sub>5</sub>)  $\|R(u_1) - R(u_2)\| < \theta \left( \max\{\|u_1\|, \|u_2\|\} \right) \|u_1 - u_2\|, \quad \forall v, w, u_i \in \mathcal{O} \subset H$

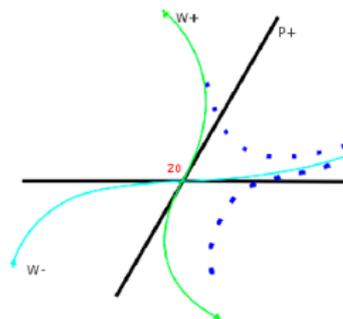
Теорема. В линейном случае имеем:

$h(0) = z|_{t=0} - (a+1)|_{t=0} \in P_-H \Leftrightarrow h(T) = z|_{t=T} - (a+1)|_{t=T} \in P_-H,$   
т.к. подпространства траекторий  $P_{\pm}H$  инвариантны.

Второе условие обеспечивает вычислительную устойчивость.

## Нелинейная задача:

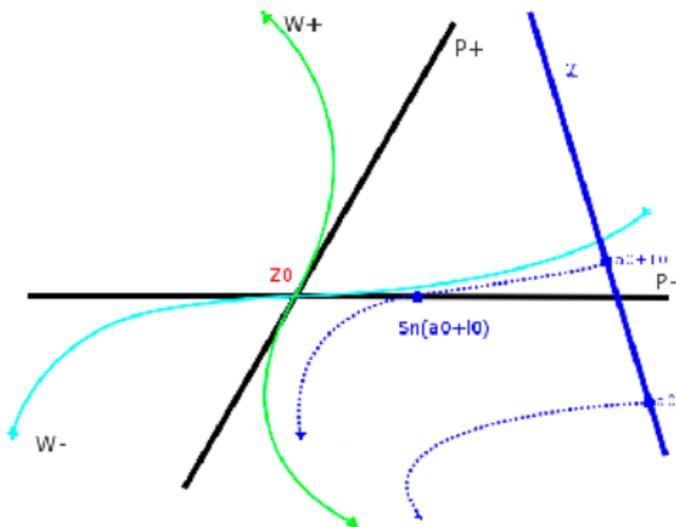
- $a_0)$   $P_+, P_- : H \rightarrow H, L : H \rightarrow H, R(u) = S(u) - Lu;$   
 $a_1)$   $P_+ + P_- = I, \quad \|P_+\| = \|P_-\| \leq C_{\pm};$   
 $a_2)$   $L(P_+H) = P_+H, \quad L(P_-H) \subset P_-H;$   
 $a_3)$   $\|Lv\| \geq \mu_+ \|v\|, \quad \forall v \in P_+H, \quad \mu_+ = 1 + \delta_+ \geq 1;$   
 $a_4)$   $\|Lw\| \leq \mu_- \|w\|, \quad \forall w \in P_-H, \quad \mu_- = 1 - \delta_- \leq 1;$   
 $a_5)$   $\|R(u_1) - R(u_2)\| < \theta \left( \max\{\|u_1\|, \|u_2\|\} \right) \|u_1 - u_2\|,$   
 $\forall v, w, u_i \in \mathcal{O} \subset H$



$$\mathcal{W}^- = \{m^0 \in \mathcal{O} : \exists m^{k+1} \in \mathcal{O}, m^{k+1} = S(m^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

$$\mathcal{W}^+ = \{m^0 \in \mathcal{O} : \exists m^k \in \mathcal{O}, m^{k-1} = S(m^k), \quad k = 1, 2, 3, \dots\}.$$

Теорема Адамара – Перрона, – Ляпунова – Аносова – Юдовича –  
 Ладыженской – Солонникова – Hirsch – Pugh – Shub ....



Теорема.

$$\begin{aligned}
 & z|_{t=0} - (a+1)|_{t=0} \in \mathcal{W}_- \\
 & \Leftrightarrow \\
 & \lim_{T \rightarrow \infty} (z|_{t=T} - (a+1)|_{t=T}) \in P_- \mathcal{H}, \\
 & \Leftrightarrow \\
 & \lim_{T \rightarrow \infty} P_+[z|_{t=T} - (a+1)|_{t=T}] \stackrel{!}{=} 0.
 \end{aligned}$$

Запишем оператор  $S(u) = Lu + R(u)$  для  $u = v + w$ ,

$$v \in P_+\mathcal{O}, \quad w \in P_-\mathcal{O}$$

в виде  $S(u) = S_+(u) + S_-(u)$ , где  $S_{\pm}(u) = P_{\pm}S(u)$ ,

$$\begin{aligned} S_+(v+w) &= L_+v + R_+(v+w); & L_{\pm} &= P_{\pm}L, \\ S_-(v+w) &= L_-w + R_-(v+w); & R_{\pm}(\cdot) &= P_{\pm}R(\cdot). \end{aligned}$$

Будем искать многообразие  $\mathcal{W}^-$  в виде  $v = f(w)$ , где функция  $f \in B_{\gamma}(\mathcal{O})$ ,  
 $f(w) : P_-\mathcal{O} \rightarrow P_+\mathcal{O}$ :

$$f(0) = 0, \quad \|f(w_1) - f(w_2)\| \leq \gamma \|w_1 - w_2\|, \quad |f|_{B_{\gamma}} = \max_{w \in P_-\mathcal{O}} \|f(w)\|.$$

Выпишем условие (I) инвариантности устойчивого многообразия  $\mathcal{W}^-$  относительно оператора  $S$ :

$$S_+(f(w) + w) = f(S_-(f(w) + w)), \quad (\text{I})$$

или в эквивалентном виде

$$L_+f(w) + R_+(f(w) + w) = f(L_-w + R_-(f(w) + w)).$$

Все известные алгоритмы являются приближенными методами решения данного нелинейного уравнения.

$$L_+f(w) + R_+(f(w) + w) = f(L_-w + R_-(f(w) + w)).$$

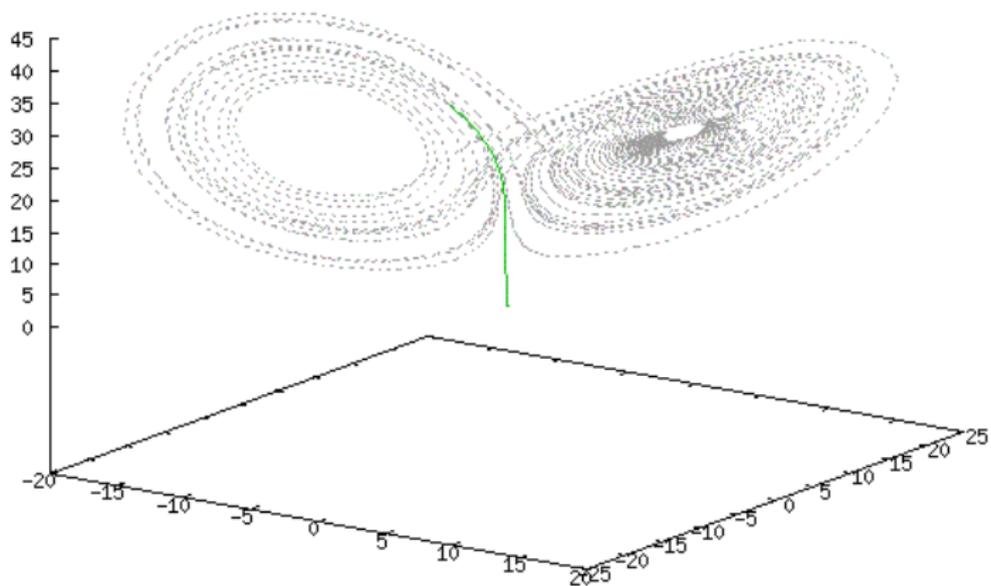
Метод нулевого приближения. Метод линеаризации. Линейный метод сжимающих отображений. Метод функционально-аналитических рядов. Нелинейный метод сжимающих отображений. Метод нелинейного уравнения. Метод обратной итерации.

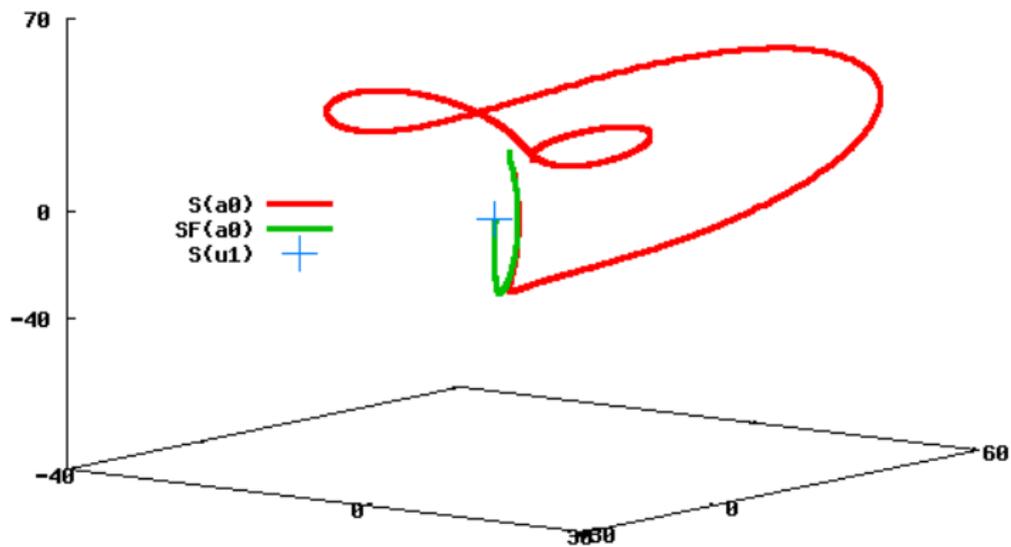
Метод нелинейного уравнения:

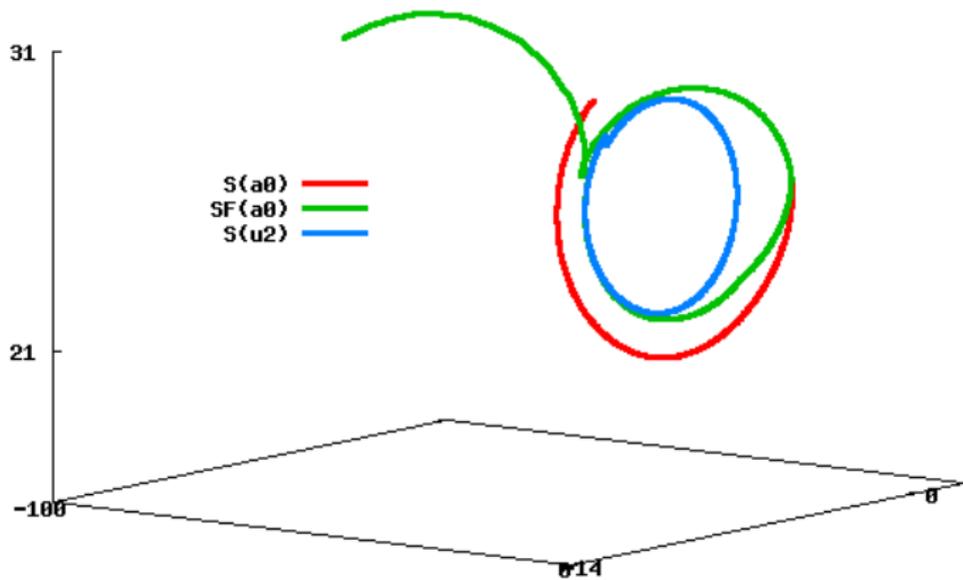
$$P_+[S^n(a_0 + l_0^{(n)})] = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема. Пусть нулевая точка является гиперболической неподвижной точкой оператора  $S(h)$ . Тогда в некоторой окрестности  $\mathcal{O}$  метод нелинейного уравнения разрешим для всех  $n \geq 0$ . Последовательность  $l_0^{(n)}$  сходится со скоростью геометрической прогрессии к  $l_0$ , и  $a_0 + l_0$  принадлежит устойчивому многообразию.

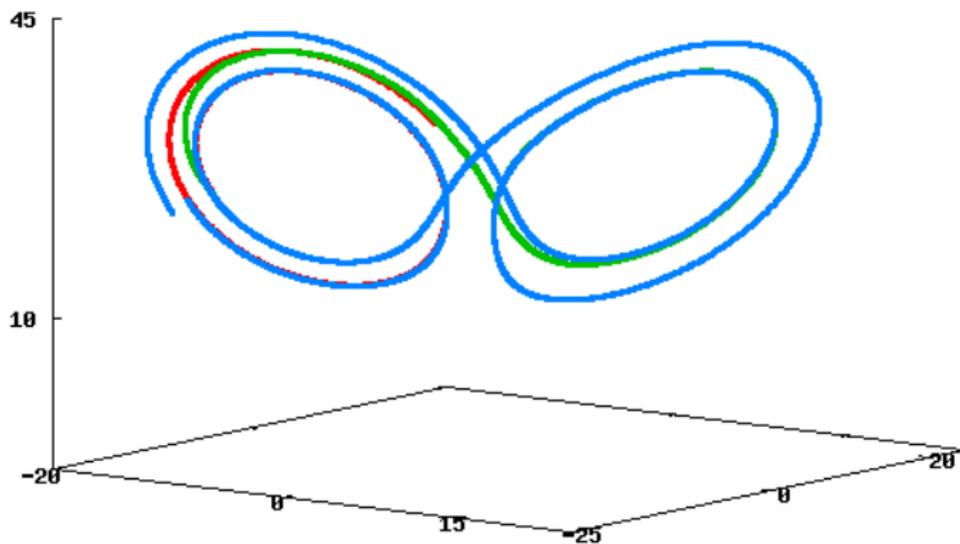
## Пример 1. Задача Лоренца.

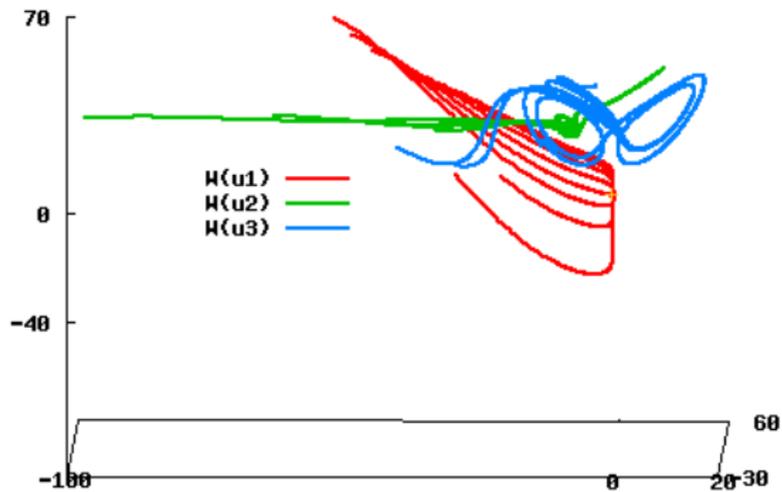




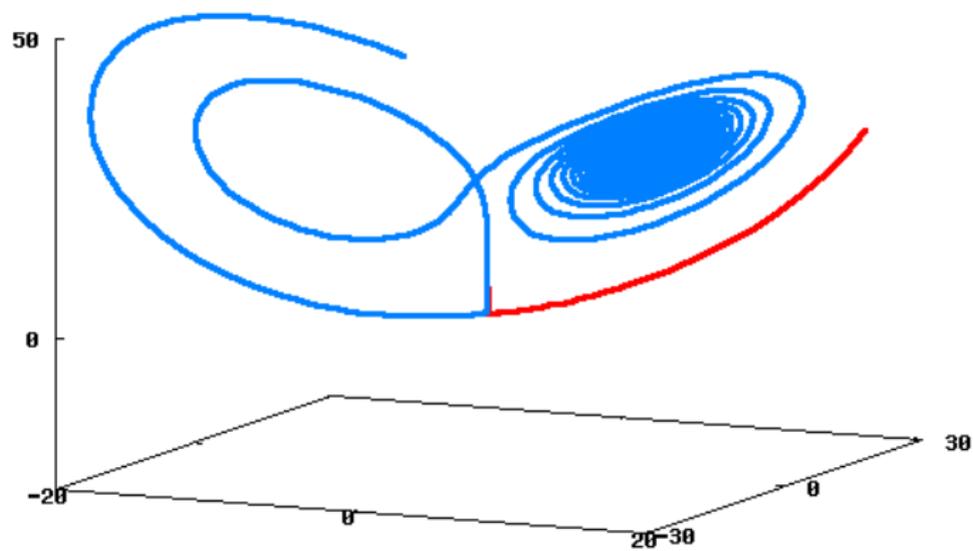


$S(a_0)$  — (red line)  
 $SF(a_0)$  — (green line)  
 $S(u_3)$  — (blue line)





$S(v_1)$  — (red line)  
 $S(v_2)$  — (blue line)



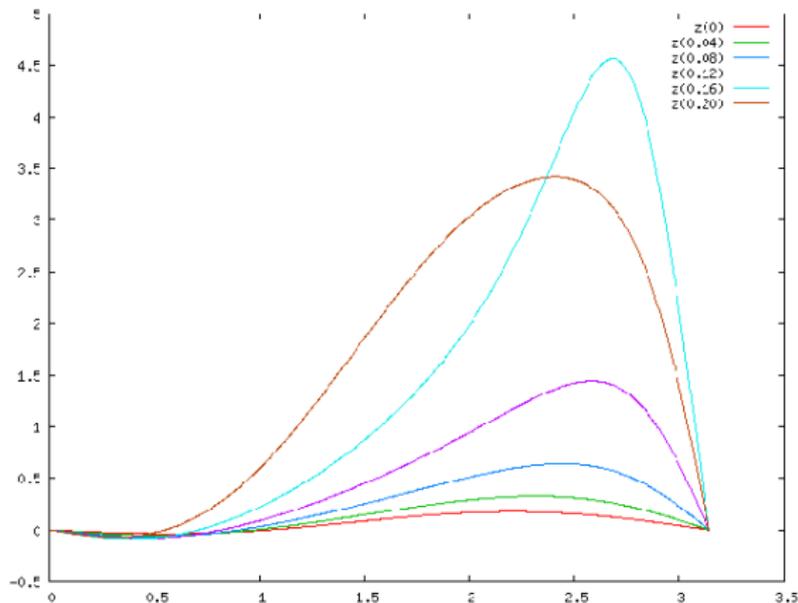
Пример 2. Уравнение типа Чафе – Инфанта – Бюргерса с обострением.

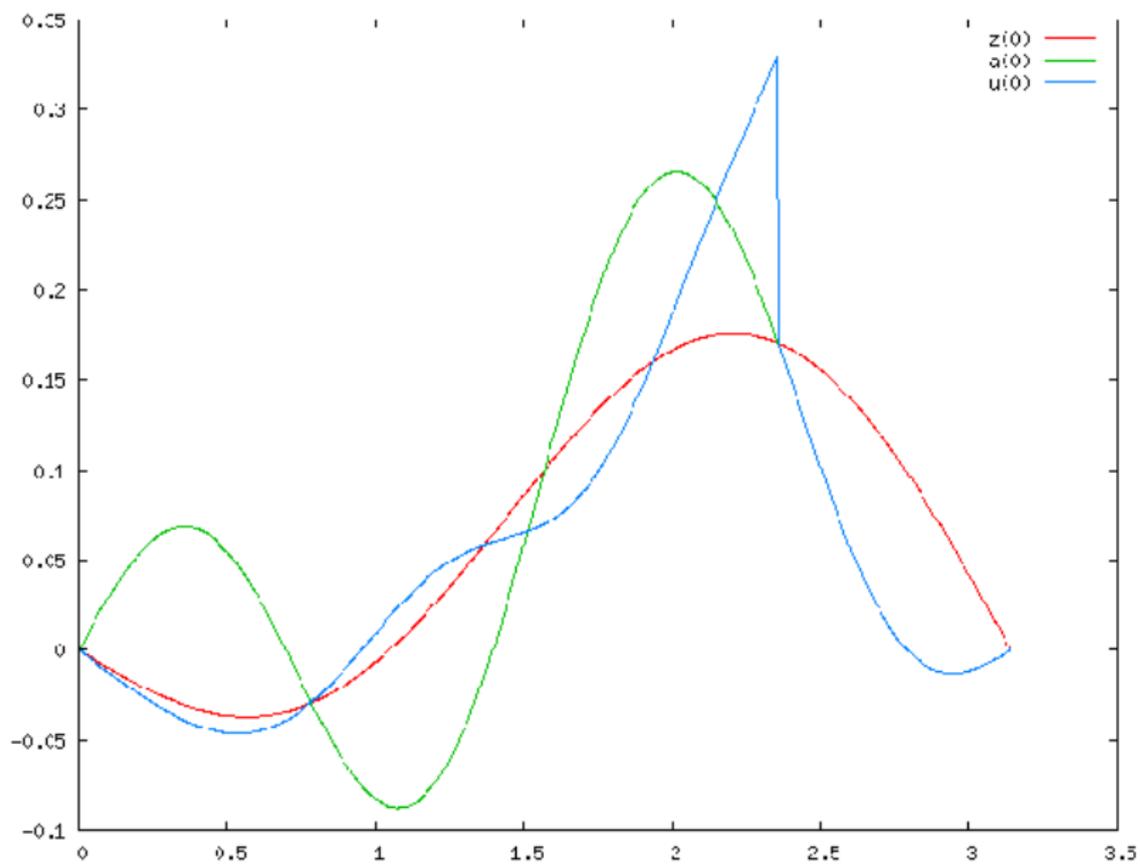
$$u_t = u_{xx} + bu - (\alpha_0 u^3 - \alpha_1 uu_x)f(t), \quad \alpha_{0,1} = 100, b = 17,$$

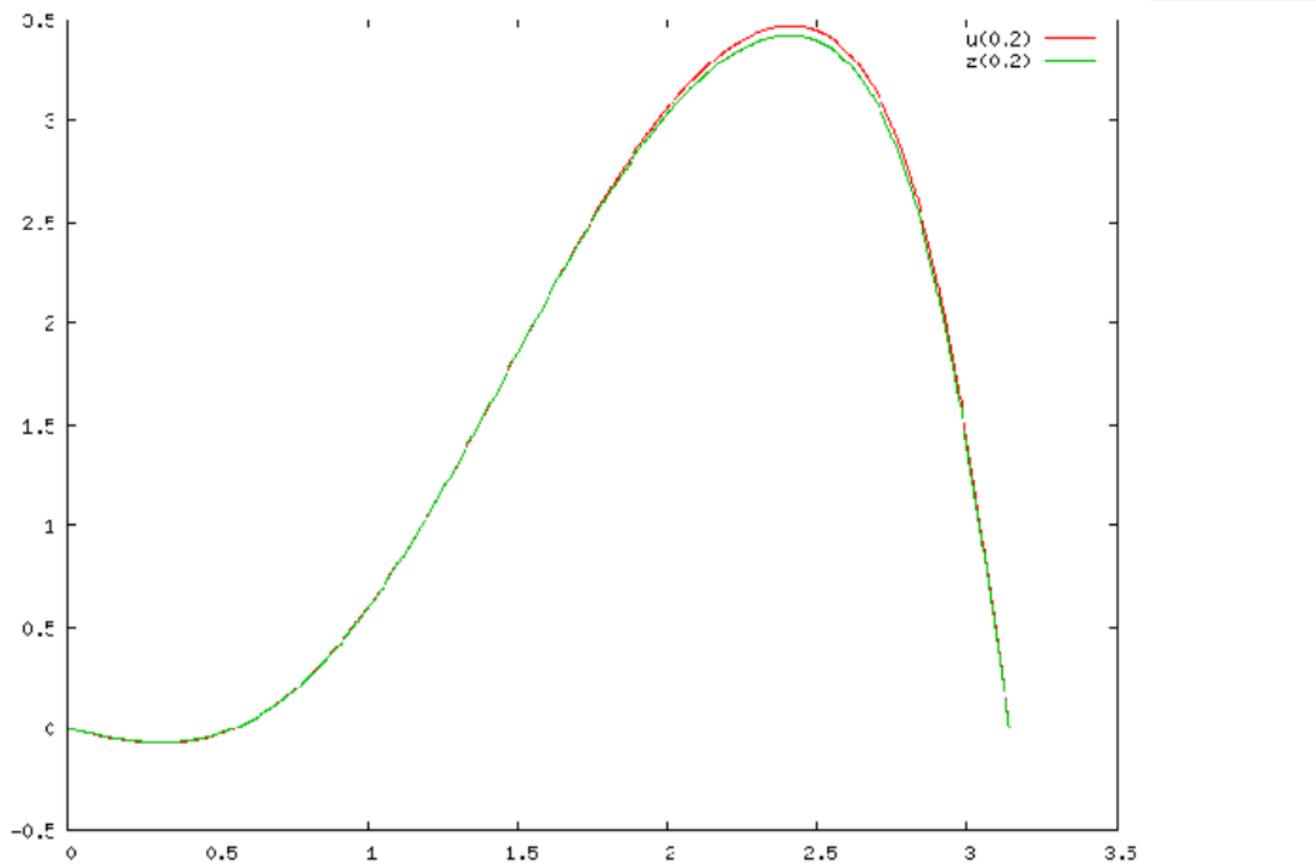
$$u = u(t, x), \quad (t, x) \in [0, T] \times [0, \pi], u(0, x) = a(x), f(t) = (t - 0.17);$$

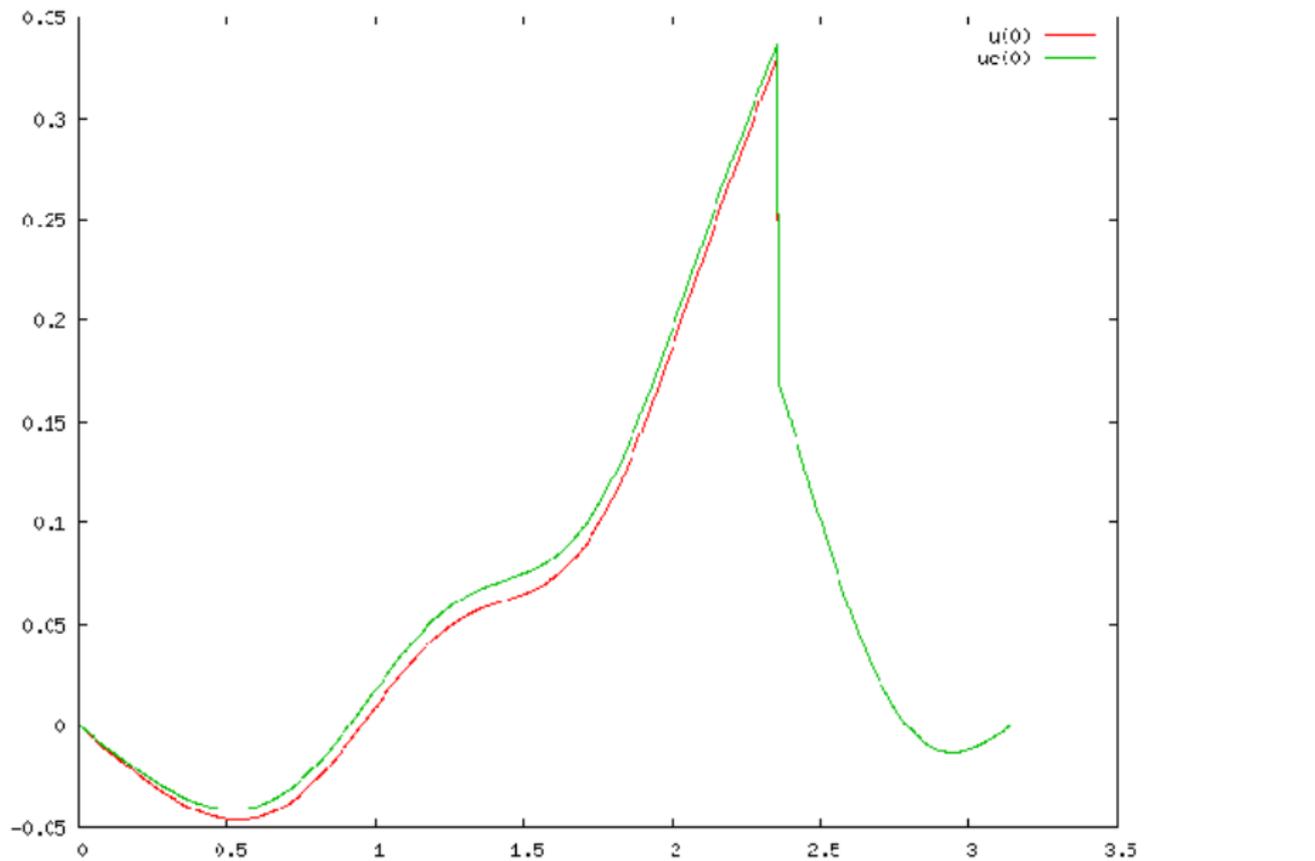
с нулевыми краевыми условиями  $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ .

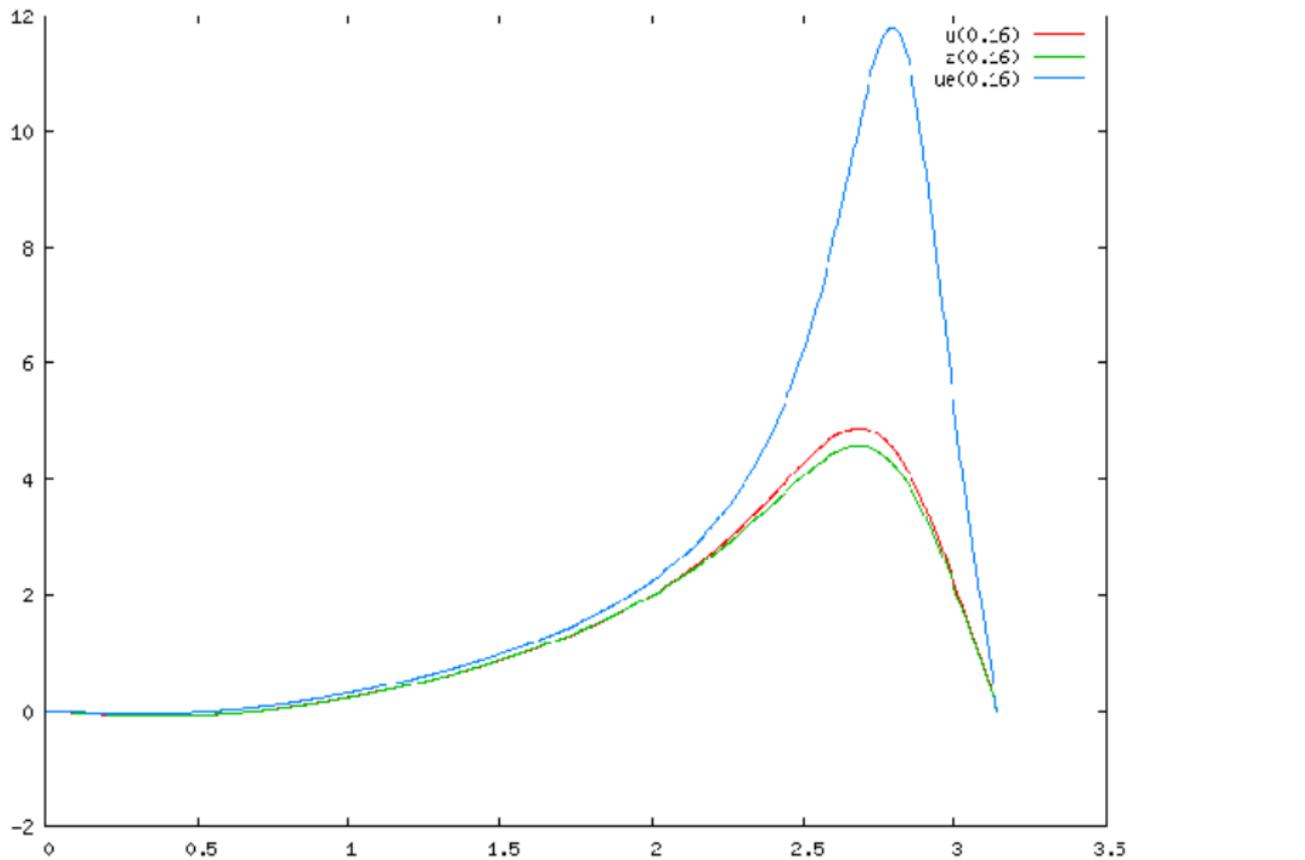
Типичное поведение решений.











## Постановка задачи.

Формальным математическим объектом исследования является двумерная система уравнений Навье–Стокса в переменных скорость–давление

$$\begin{cases} u_t - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f, \\ \operatorname{div} u = 0, \quad u = (v, w), \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u|_{\partial\Omega} &= 0, \quad u|_{t=0} = u^0, \\ \Omega &= [0, l_1] \times [0, l_2], \end{aligned} \quad (2)$$

$$f_1(x, y) = \sum_{m,n} a_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{l_1} \cos \frac{m\pi y}{l_2},$$

$$f_2(x, y) = 0,$$

при  $\mu = 1/260$ ,  $l_1 = 1$ ,  $l_2 = 0.5$ ,

$$a_{2,2} = -\frac{19l_2}{2\pi}, \quad a_{4,2} = -\frac{6l_2}{2\pi}, \quad a_{6,2} = \frac{7l_2}{2\pi},$$

$$a_{2,4} = -\frac{14l_2}{4\pi}, \quad a_{1,3} = a_{3,1} = \frac{a_{2,2}}{50}.$$

# Численные результаты.

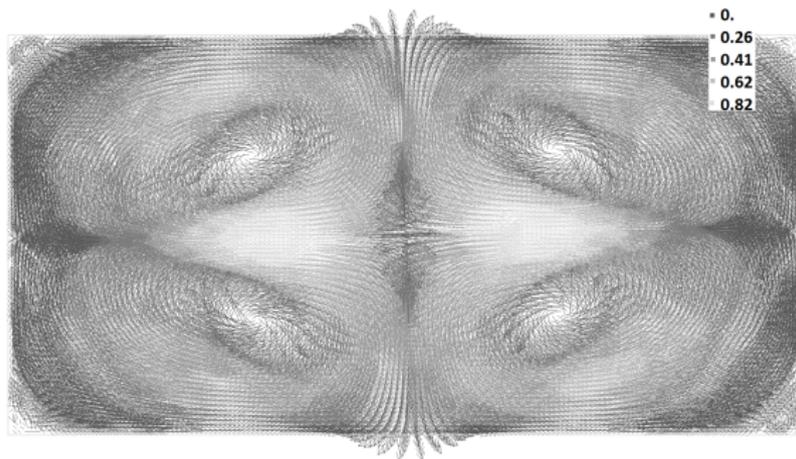


Рис. 1. Стационарный режим  $u_z$ .

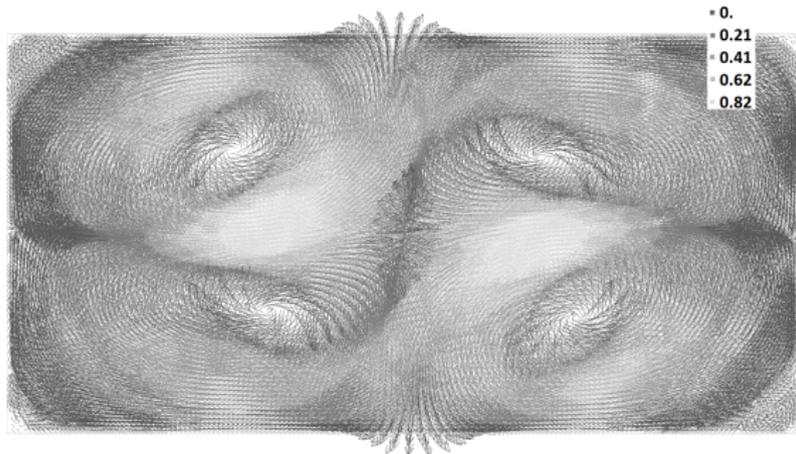


Рис. 2. Колебательный режим.

# Алгоритм стабилизации.

Шаг 1. Приблизительно найдем основное квазистационарное решение  $u_z$  для уравнения (1), (2).

Шаг 2. Сформулируем вспомогательную расширенную математическую задачу.

Шаг 3. Найдем неустойчивые подпространства линеаризованной расширенной задачи. Вычислим подпространство допустимых смещений.

Шаг 4.

4.1. достроим  $u_a$  до определенной и бездивергентной в расширенной области функции;

4.2. для найденной функции методом нулевого приближения определим приближенную проекцию на устойчивое многообразие;

4.3 численно решим систему уравнений в расширенной области; след найденной функции дает искомое граничное управление.

## Шаг 1.- Шаг 3.

Функция  $u_z$  определялась в результате решения стационарного уравнения Навье–Стокса в области  $\Omega$  методом Ньютона при нулевом начальном приближении, и далее интегрированием задачи (1), (2) с полученного течения при  $t \in [0, 3]$ , что обеспечивало выход на квазистационар.

Численно получено, что размерность неустойчивого подпространства в окрестности  $u_z$  для задачи (1), (2) равна пяти:

$$\{1.03, 0.29 \pm 2.46i, 0.035 \pm 2.14i\}.$$

Выберем следующие значения для параметров расширенной задачи:

$$l = \frac{l_2}{4} = 0.125, \quad \tilde{\nu}(x) = 50\nu,$$

$$\tilde{f}_1 = a_{2,2} \sin\left(\frac{2\pi x}{l_1}\right) \cos\left(\frac{\pi(y+1)}{1}\right), \quad \tilde{f}_2 = 0.$$

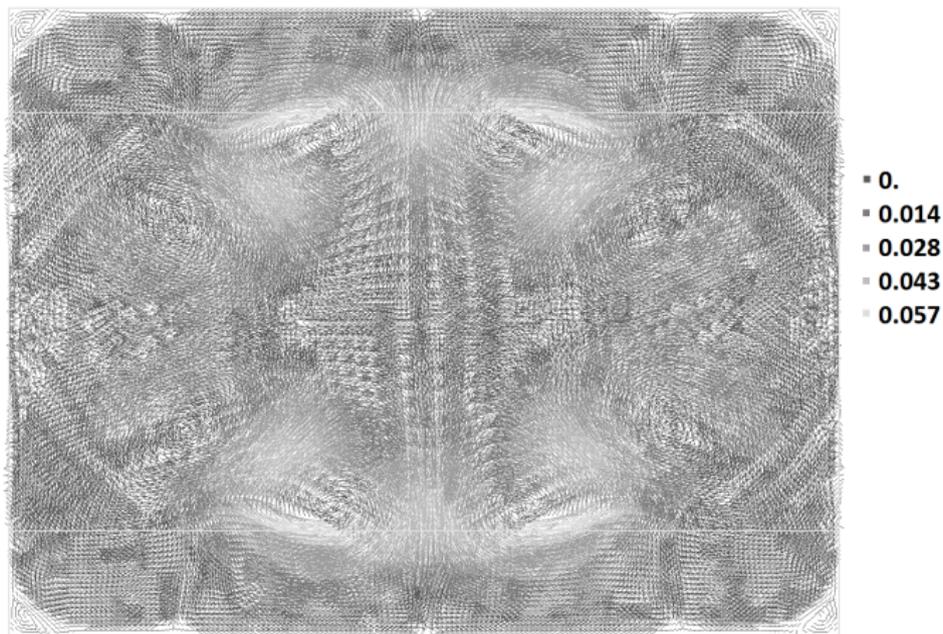


Рис. 3. Разность функций  $\tilde{u}_z - u_z$ .  $\tilde{u} \in \mathcal{O}(W^-)$ .

Трехмерное подпространство  $\{1.06, 0.25 \pm 2.40i\}$ , но узкая полоса управления с большой вязкостью.

Шаг 4.

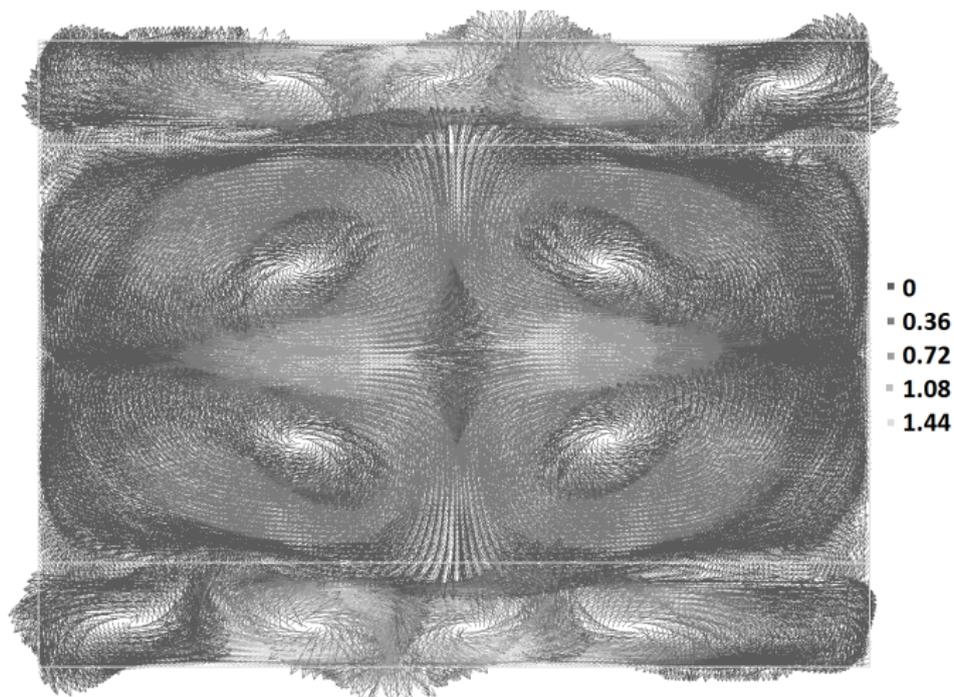


Рис. 4. Продолжение  $\tilde{u} \in \mathcal{O}(W^-)$ .

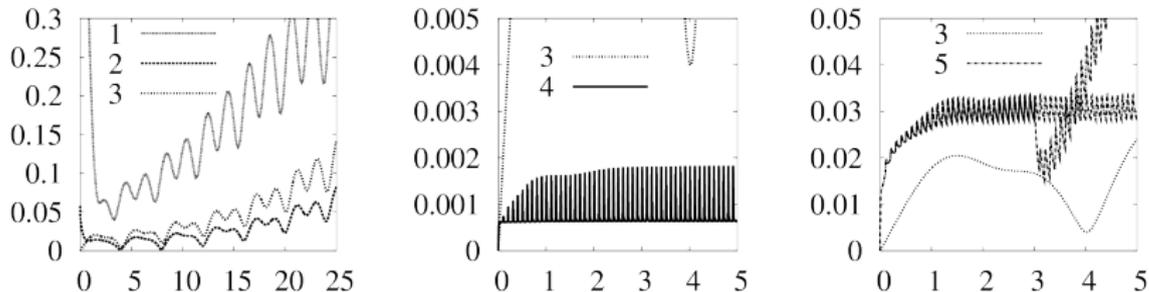


Рис. 5. Графики зависимостей  $\|u_z - u_a\|$

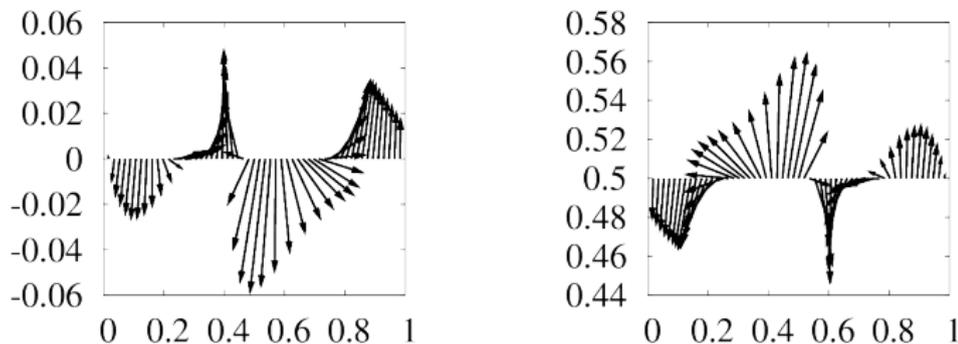


Рис. 6. Краевые условия  $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}|_{t=kT_2}$

Допустимо  $(\tilde{v}, 0)$ , не работает  $(\int \tilde{v} dx, 0)$ .

## Постановка задачи.

Двумерная система уравнений Навье–Стокса в переменных скорость–давление в кольце  $0.35 \leq x \leq 1$ . Правая часть порядка  $O(0.345)$ , вязкость  $\nu = 1./250$ .

$$\begin{cases} u_t - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f, \\ \operatorname{div} u = 0, \quad u = (v, w), \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u|_{\partial\Omega} &= 0, \quad u|_{t=0} = u^0, \\ \Omega &= 0.35 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1, \end{aligned} \quad (4)$$

$$f(x, y) = -0.345 \sin(2\pi(r - 0.35)/(1 - 0.35))$$

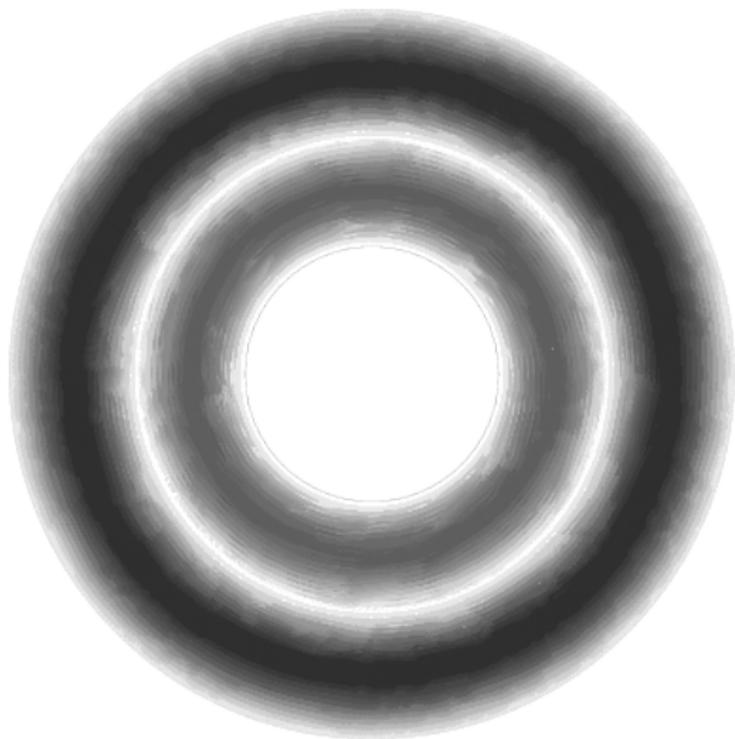


Рис. 1. Стационарный режим  $u_z$ .

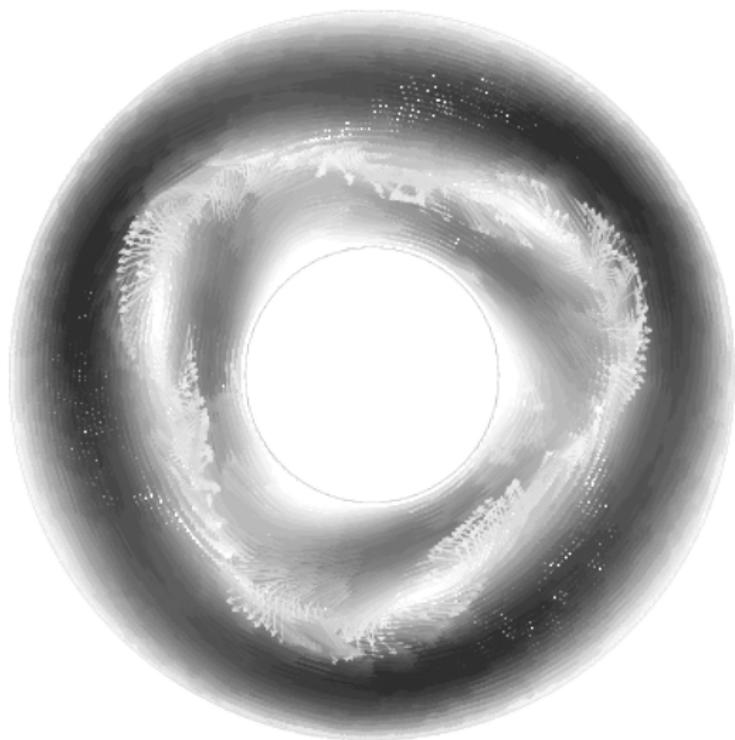


Рис. 2. Вращательный трехвихревой режим.

# Алгоритм стабилизации.

Шаг 1. Приблизительно найдем основное квазистационарное решение  $u_z$  для уравнения (1), (2).

Шаг 2. Сформулируем вспомогательную расширенную математическую задачу.

Шаг 3. Найдем неустойчивые подпространства линеаризованной расширенной задачи. Вычислим подпространство допустимых смещений.

Шаг 4.

4.1. достроим  $u_a$  до определенной и бездивергентной в расширенной области функции;

4.2. для найденной функции методом нулевого приближения определим приближенную проекцию на устойчивое многообразие;

4.3 численно решим систему уравнений в расширенной области; след найденной функции дает искомое граничное управление.

## Шаг 1.- Шаг 3.

Численно получено, что размерность неустойчивого подпространства в окрестности  $u_z$  для исходной задачи равна 18:

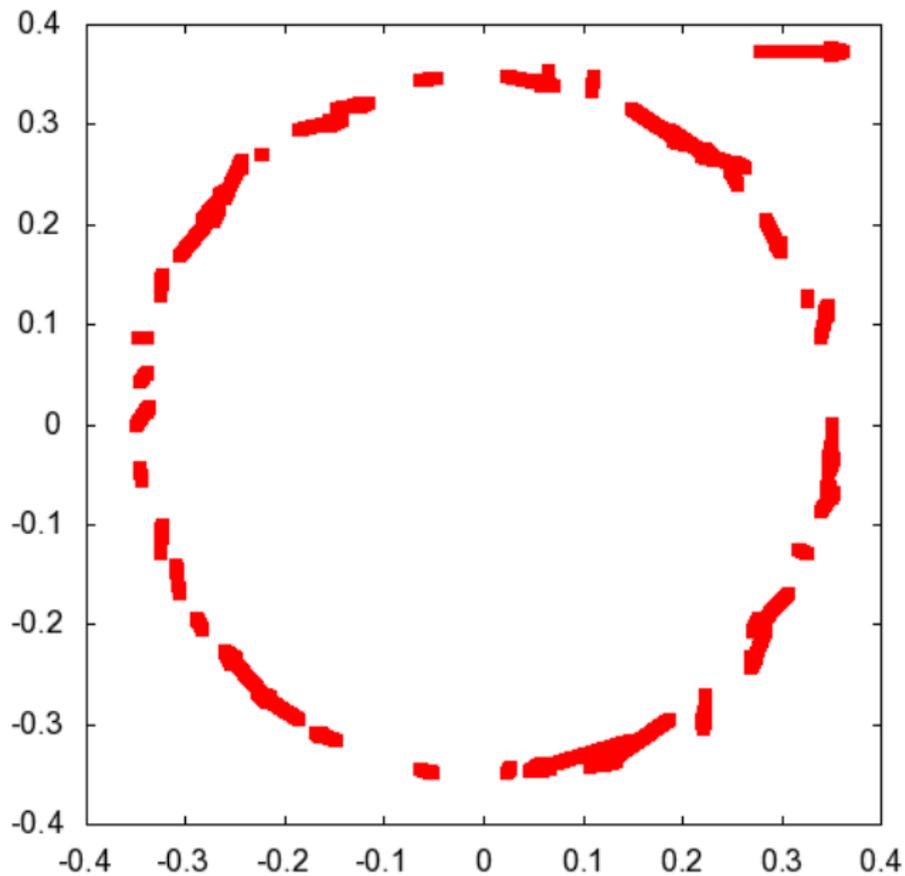
$$\{0.670733 \pm 0.36298i; \dots 0.174559 \pm 0.145363i\};$$

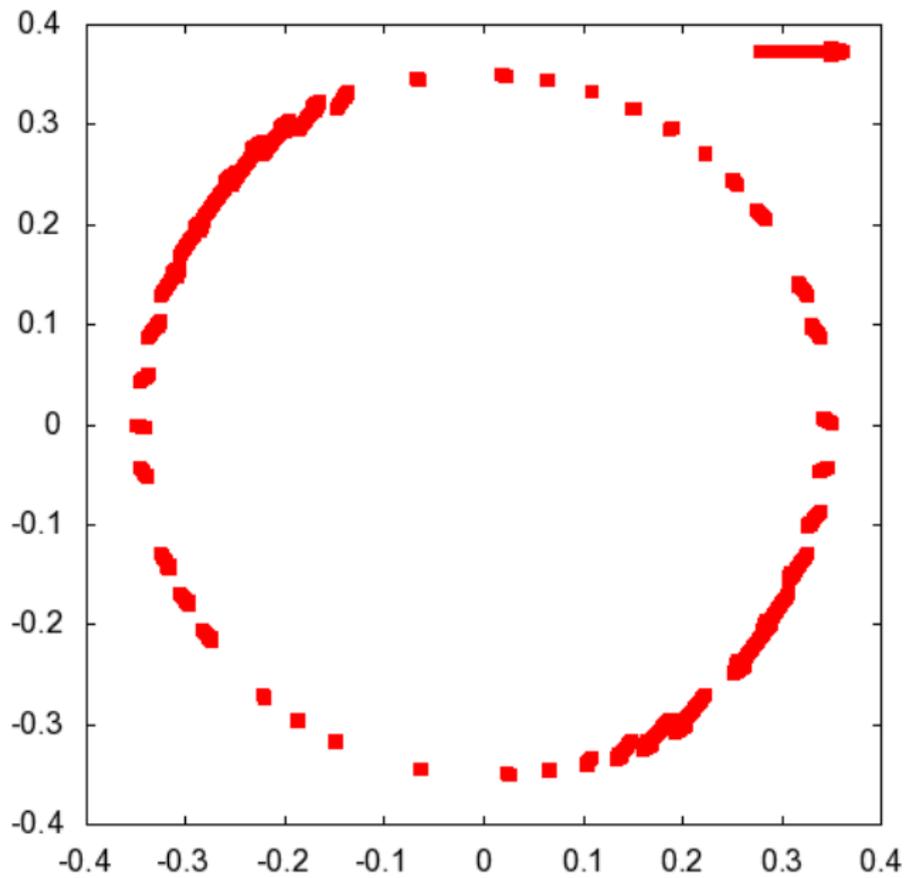
$$\{-0.0441358 \pm 0.0936793i, -0.100616, -0.156149 \pm 0.19311i, \dots\}.$$

Выберем следующие значения для параметров расширенной задачи:  $0.1 \leq x \leq 1$ . Правая часть порядка  $O(0.345)$ , вязкость  $\tilde{\nu} = \nu \cdot 50$ . Численно получено, что размерность неустойчивого подпространства в окрестности  $\tilde{u}_z$  для расширенной задачи равна 22:

$$\{1.1127 \pm 0.462374i, 0.161524 \pm 0.760166i\}$$

$$-0.0514561 \pm 0.0577973i - 0.0948442, -0.274858 \pm 0.448194i, \dots\}$$





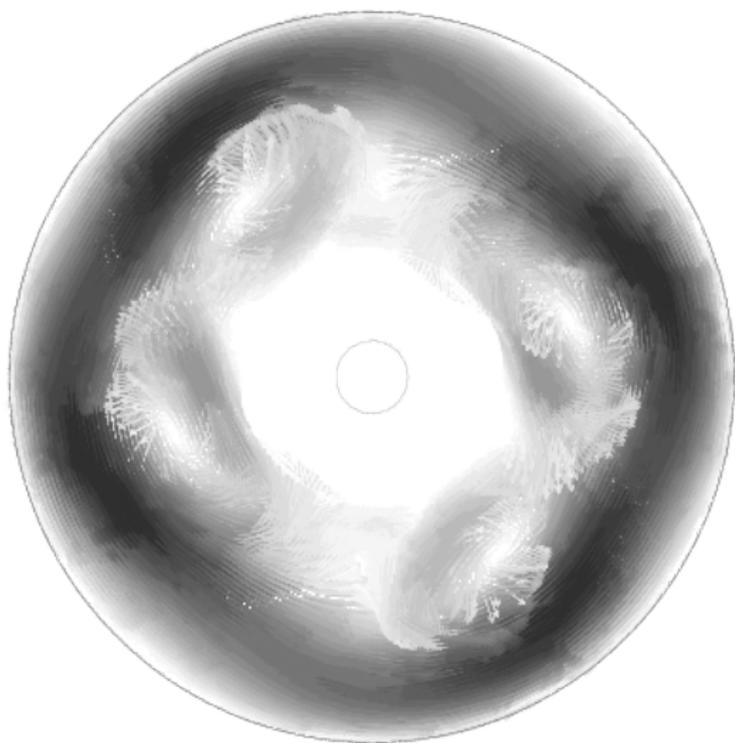
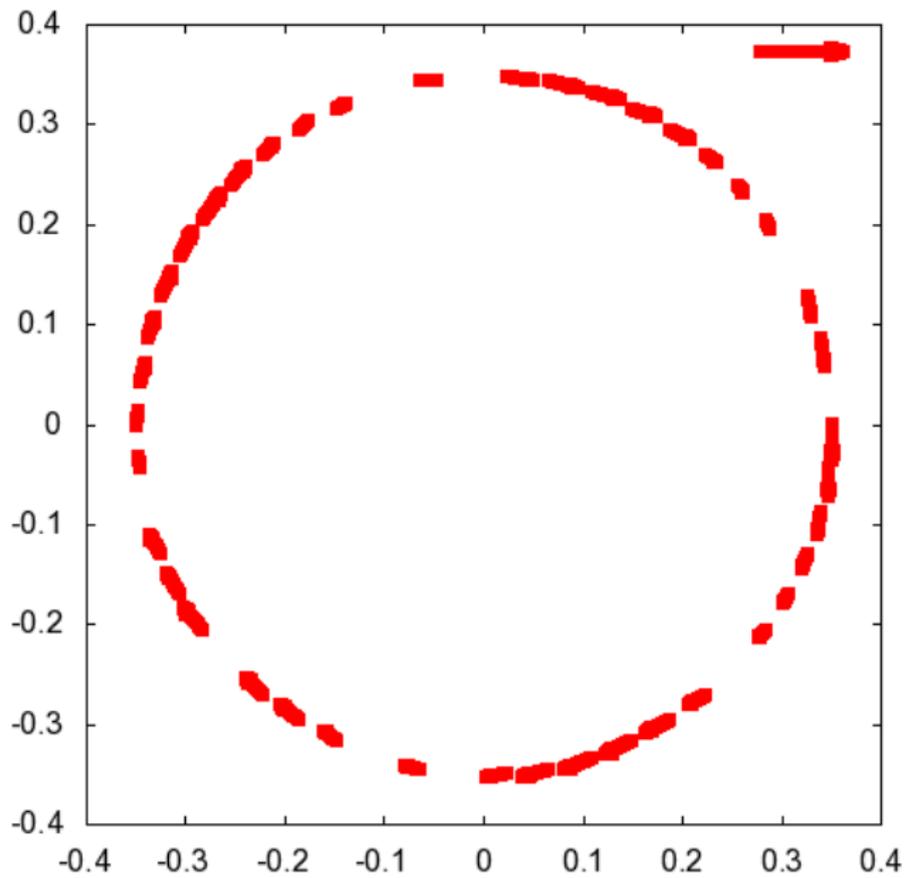


Рис. 3. Вращательный четырехвихревой режим.



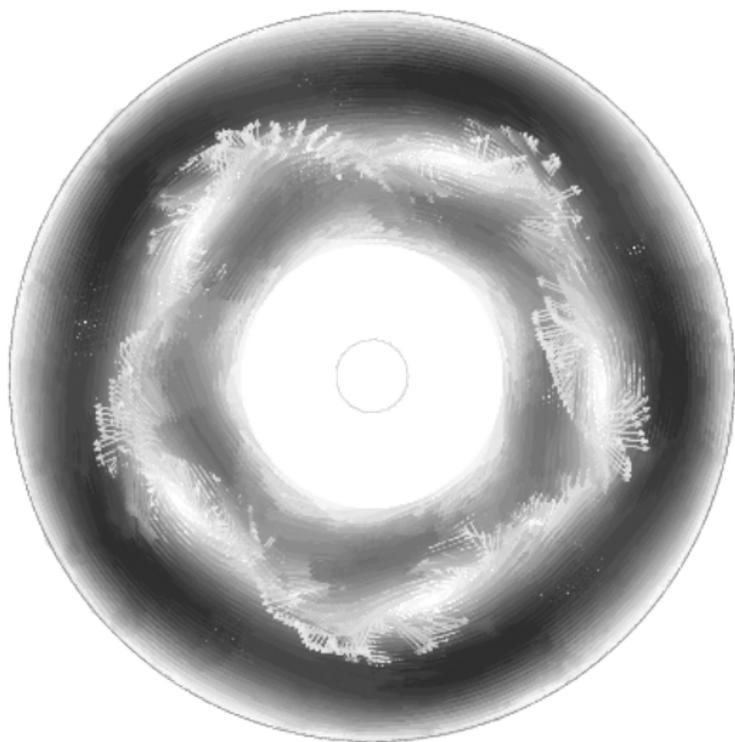


Рис. 4. Вращательный пятивихревой режим.



Рис. 5. Колебательный двухвихревой режим.