Линейные и нелинейные модели бароклинных волн в атмосфере

А.В. Елисеев

Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова
Российской Академии наук

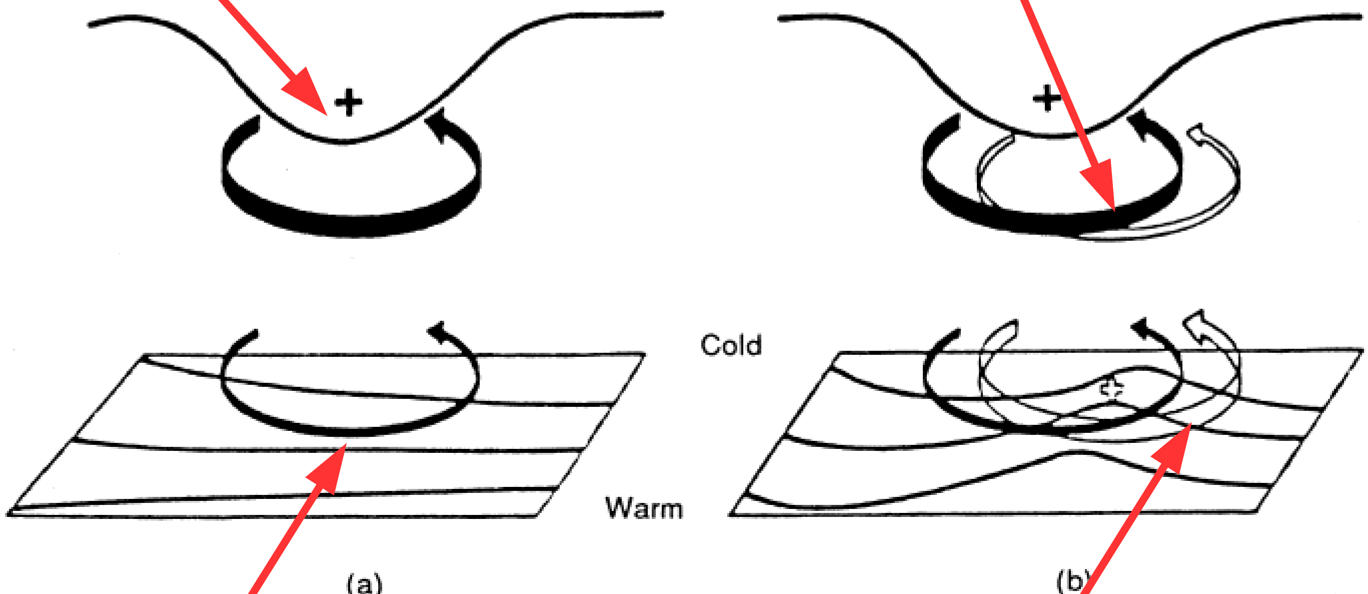
"Нелинейные волны – 2016"

Содержание

Бароклинная неустойчивость

1. Аномалия завихренности $\delta\zeta > 0$ в верхней тропосфере

4. Аномалия $\delta\zeta > 0$ проникает в верхнюю атмосферу и усиливает начальную аномалию.



2. $\delta\zeta < 0$ в нижней тропосфере

3. Адвекция потенциальной температуры приводит к аномалии $\delta T > 0$ к востоку от начальной аномалии завихренности

Методы теоретического анализа бароклинной неустойчивости

1. Метод нормальных мод (модели Чарни, Иди).

Решения ищутся в виде

$\mathbf{q} = \mathrm{Re}\,\{\, \mathbf{Q} \exp [\, i\, (\, \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - c\, |k|\, t\,)\,]\, \}$

$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ – волновой вектор,

$\mathbf{r} = (x, y, z)$,

c – фазовая скорость (комплексная: $c = c_r + i\, c_i$)

Q(x,y,z,t) – амплитуда, медленно меняющаяся в пространстве и времени:

$$| Q^{-1}\, \partial Q / \partial x | \ll | k_x |,\ | Q^{-1}\, \partial Q / \partial y | \ll | k_y |,\ | Q^{-1}\, \partial Q / \partial z | \ll | k_z |,$$

$$| Q^{-1}\, \partial Q / \partial t | \ll | c |.$$

2. Метод начальных возмущений (немодальный анализ)

$$\mathbf{q}\, |_{\,t=0} = \mathbf{q}_0$$

$$\Downarrow$$

уравнения термогидромеханики

$$\Downarrow$$

$\mathbf{q}(t)$ при $t > 0$.

Линейный анализ: модель Иди (1)

[Charney, 1947: J. Meteorol., 4 (5)]:

VOL. 4, NO. 5 JOURNAL OF METEOROLOGY OCTOBER 1947

THE DYNAMICS OF LONG WAVES IN A BAROCLINIC WESTERLY CURRENT

By J. G. Charney

[Eady, 1949: Tellus, 1]:

Long Waves and Cyclone Waves

By E. T. EADY, Imperial College of Science, London

(Manuscript received 28 Febr. 1949)

Abstract

√

Линейный анализ: модель Иди (2)

Закон сохранения квазигеострофической потенциальной завихренности q:

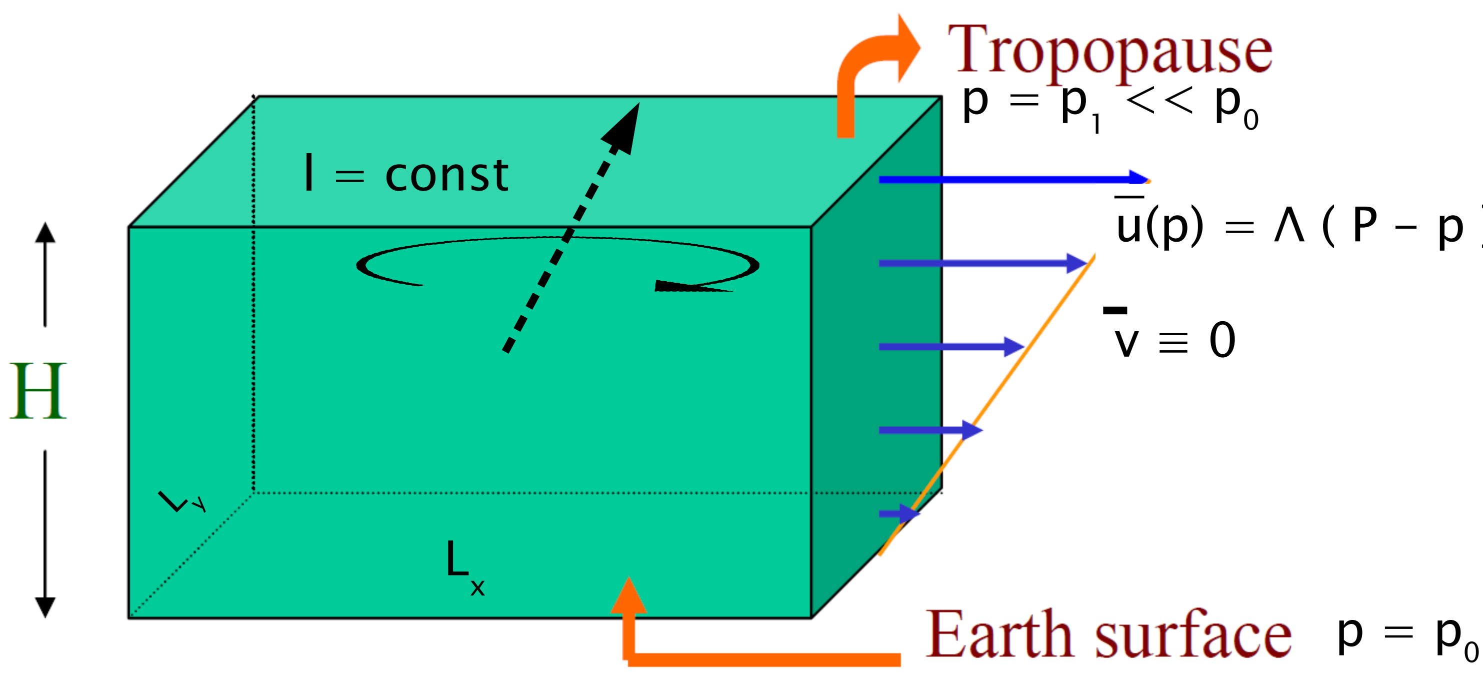
$$\frac{D}{Dt}q = 0, \quad q = \nabla^2\psi + l + \frac{\partial}{\partial p} m^2 p^2 \frac{\partial \psi}{\partial p}.$$

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \bullet \boldsymbol{\nabla}$$

$l = 2\,\Omega \cos\phi$ – параметр Кориолиса,

$m = R^{-1}$, $R = (g H)^{1/2} / l$ – радиус деформации Россби,

ψ – функция тока ($u = -\partial\psi / \partial y$; $v = \partial\psi / \partial x$) .



Дополнительно:

– $n^2 = m^2 p^2 = \text{const}$.

– $\partial\,(\blacksquare) / \partial\,y = 0$.

– $w^* \equiv dp / dt = 0$ при $p = p_0, p_1$.

Линейный анализ: модель Иди (3)

Решения ищем в виде суперпозиции нормальных мод вида

$$\psi' = \hat{\psi}(p)\exp\{ik(x-ct)\}$$

Из условия сохранения энергии если есть решение с фазовой скоростью распространения волн c_1, то должно быть решение с фазовой скоростью $c_2 = c_1^*$. Поэтому для доказательства наличия бароклинной неусточивости достаточно показать, что есть решения с чисто комплексными c.

$$ik(\overline{u}-c)\left(-k^2\hat{\psi}+n^2\frac{d^2\hat{\psi}}{dp^2}\right)=0,$$

$$ik(\overline{u}_0-c)\frac{d\hat{\psi}}{dp}+ik\Lambda\hat{\psi}=0, \quad p=p_0,$$

$$ik(\overline{u}_1-c)\frac{d\hat{\psi}}{dp}+ik\Lambda\hat{\psi}=0, \quad p=p_1,$$

Линейный анализ: модель Иди (4)

Первое уравнение системы

$$ik(\overline{u}-c)\left(-k^2\hat{\psi}+n^2\frac{d^2\hat{\psi}}{dp^2}\right)=0,$$

делим на $\overline{u}-c$ (при этом исчезает непрерывный спектр волновых решений).

Тогда

$$d^2\hat{\psi}/dp^2-\lambda^2\hat{\psi}=0,\quad \lambda^2=k^2/n^2\ ,$$

с общим решением

$$\hat{\psi}=A\cosh\lambda p+B\sinh\lambda p.$$

С учётом граничных условий приходим к уравнению для собственных чисел λ:

$$c^2-c\left(\overline{u}_0+\overline{u}_1\right)+\overline{u}_0\overline{u}_1+\left(\overline{u}_1-\overline{u}_0\right)\Lambda\lambda^{-1}\coth\left\{\lambda\left(p_0-p_1\right)\right\}-\Lambda^2\lambda^{-2}=0.$$

Необходимо проанализировать дискриминант

$$D=\left(\overline{u}_1-\overline{u}_0\right)^2\left\{1-4\alpha^{-2}(\alpha\coth\alpha-1)\right\},\quad \alpha=\lambda\left(p_0-p_1\right).$$

Линейный анализ: модель Иди (8)

$$D = \left(\bar{u}_1 - \bar{u}_0\right)^2 \left\{1 - 4\alpha^{-2}\left(\alpha \coth \alpha - 1\right)\right\}, \quad \alpha = \lambda\left(p_0 - p_1\right).$$

Можно показать, что D меняет знак при $\alpha = \alpha_c$:

$\alpha_c/2 = \coth(\alpha_c/2)$ $\Rightarrow$ $\alpha_c \approx 2.4.$

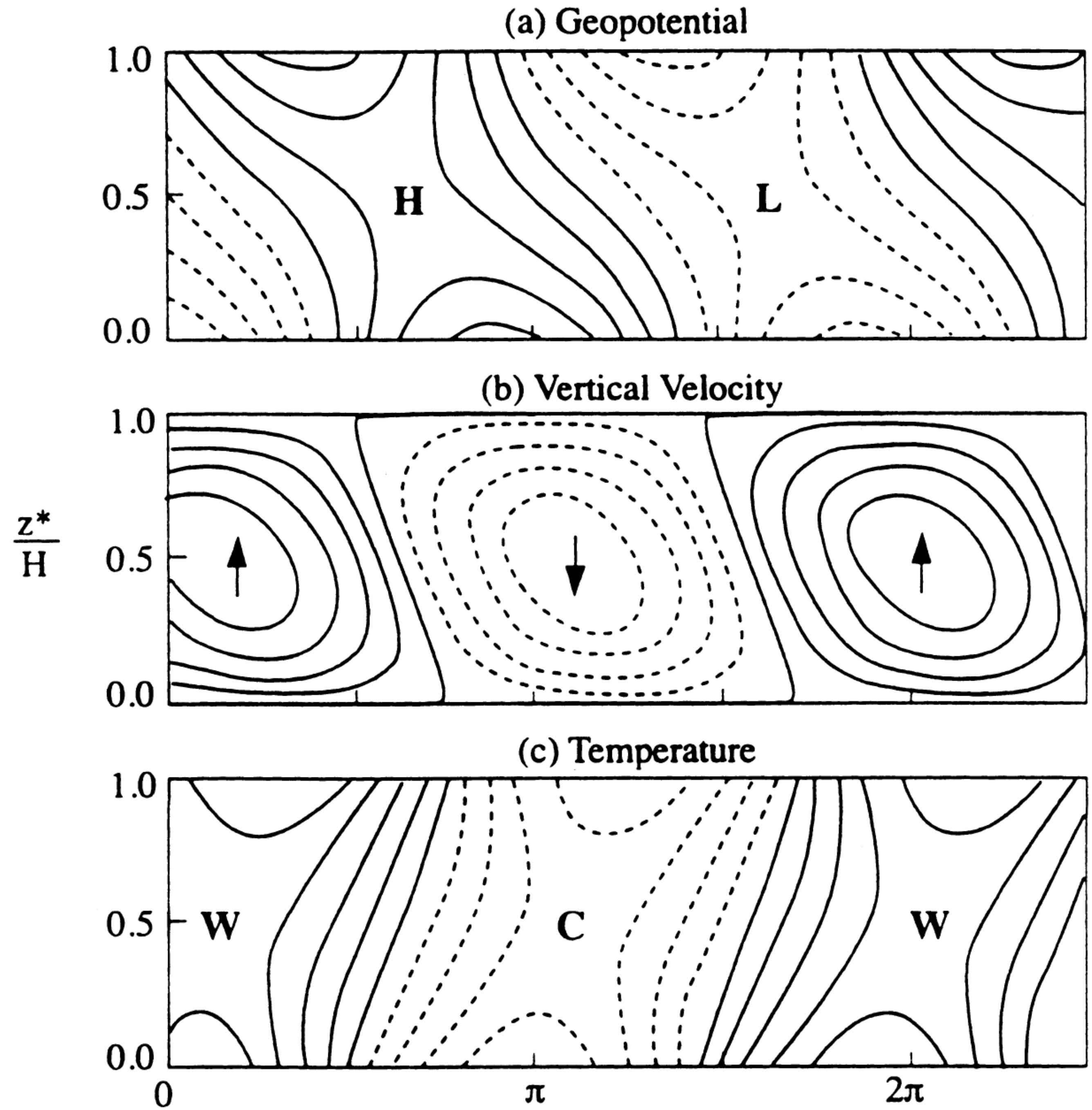
При $\alpha < \alpha_c$ бароклинные возмущения нарастают со временем.
Скорость нарастания этих возмущений

$$k \operatorname{Im} c = \frac{k}{\alpha}\left(\bar{u}_1 - \bar{u}_0\right)\left\{\left(\coth\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{\alpha}{2} - \tanh\frac{\alpha}{2}\right)\right\}^{1/2}.$$

максимальна при $\alpha = \alpha_m \approx 1.75.$

Считается, что максимально неустойчивая мода определяет структуру бароклинных возмущений

Линейный анализ: модель Иди (9)



Линейный анализ: модель Иди (10)

$$p \to \tfrac{1}{2} (p_0 + p_1)$$

Длина волны, соответствующая максимально неустойчивой моде

$\lambda_m = 2 \pi (p_0 - p_1) / (n \alpha_m) = 2 \pi (p_0 - p_1) / \{ m \alpha_m [\tfrac{1}{2} (p_0 + p_1)] \}.$

Если $p_1 = p_0 / 3$ $\Rightarrow$ $(p_0 - p_1) / [\tfrac{1}{2} (p_0 + p_1)] = 1,$
то

$$\lambda_m = 2 \pi / (m \alpha_m) = (2 \pi / \alpha_m) R \approx 3.59 R \approx 4 R.$$

Скорость роста этой моды

$$(k \,\mathrm{Im}\, c)_m \approx 0.306 \, m (\overline{u}_1 - \overline{u}_0) = 0.306 (\overline{u}_1 - \overline{u}_0) / R$$

$$\tau_m = ((k \,\mathrm{Im}\, c)_m)^{-1} \approx 3.27 R / (\overline{u}_1 - \overline{u}_0).$$

При $(\overline{u}_1 - \overline{u}_0) = 10$ м/с

$$\tau_m = 3.8 \text{ сут.}$$

Нелинейное взаимодействие бароклинных волн со средним потоком

Särtryck ur Tellus nr 2, 1955

Available Potential Energy and the Maintenance of the General Circulation

By EDWARD N. LORENZ, Massachusetts Institute of Technology[1], Cambridge, *Mass.*, USA

388 JOURNAL OF THE ATMOSPHERIC SCIENCES VOLUME 22

Nonlinear, Non-Geostrophic Effects in a Baroclinic Atmosphere[1]

ROGER TERRY WILLIAMS

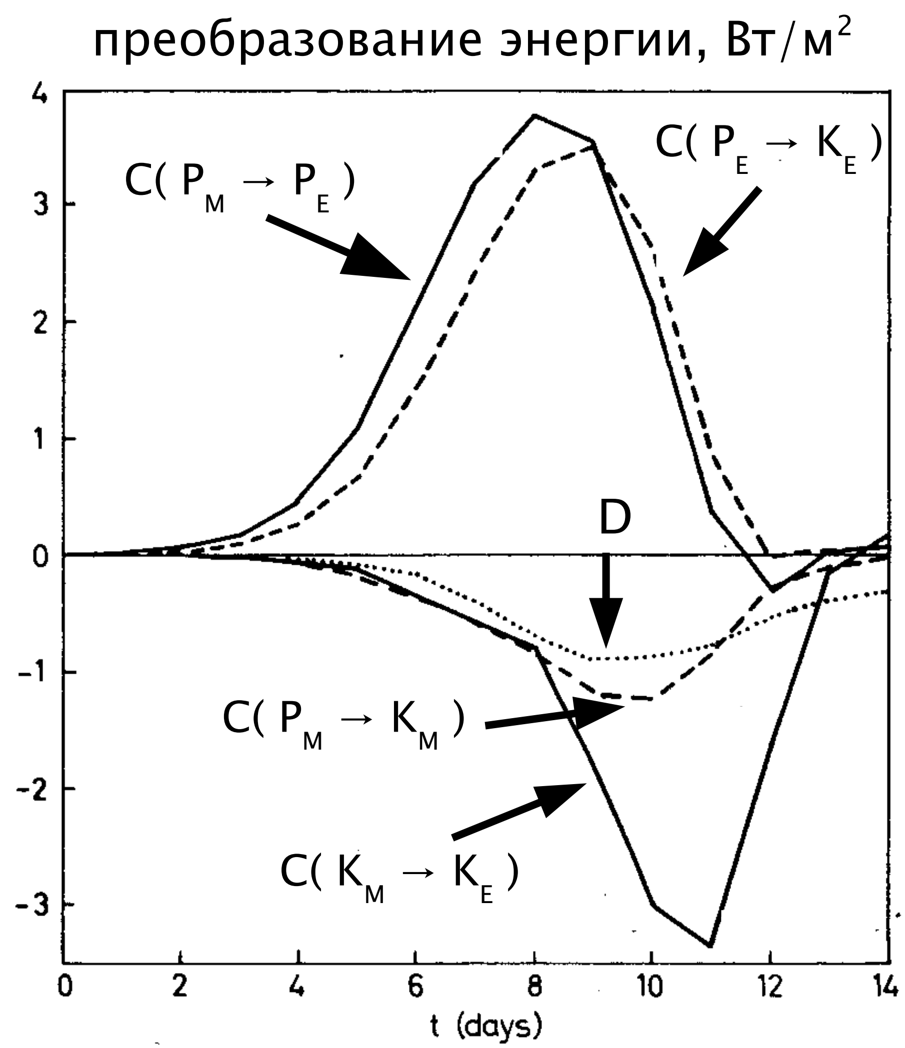
414 JOURNAL OF THE ATMOSPHERIC SCIENCES VOLUME 35

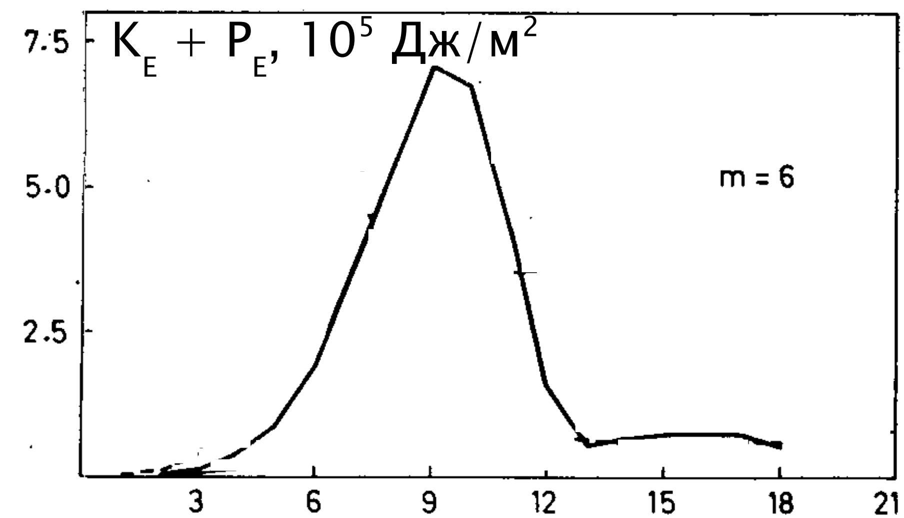
The Life Cycles of Some Nonlinear Baroclinic Waves

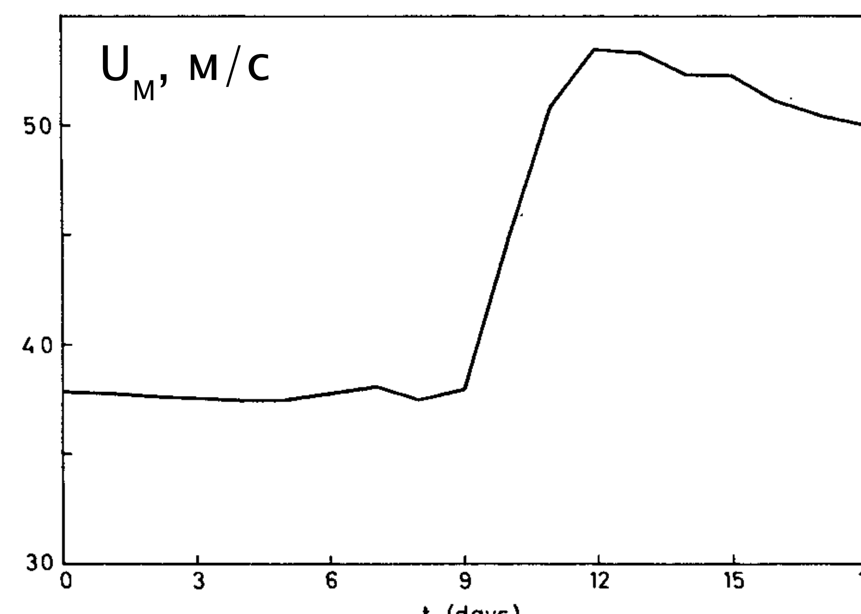
ADRIAN J. SIMMONS AND BRIAN J. HOSKINS

√

Цикл жизни бароклинных вихрей [Simmons, Hoskins, 1978] (волна с зональным волновым числом 6; основной поток – струйное течение с центром на 45°N)

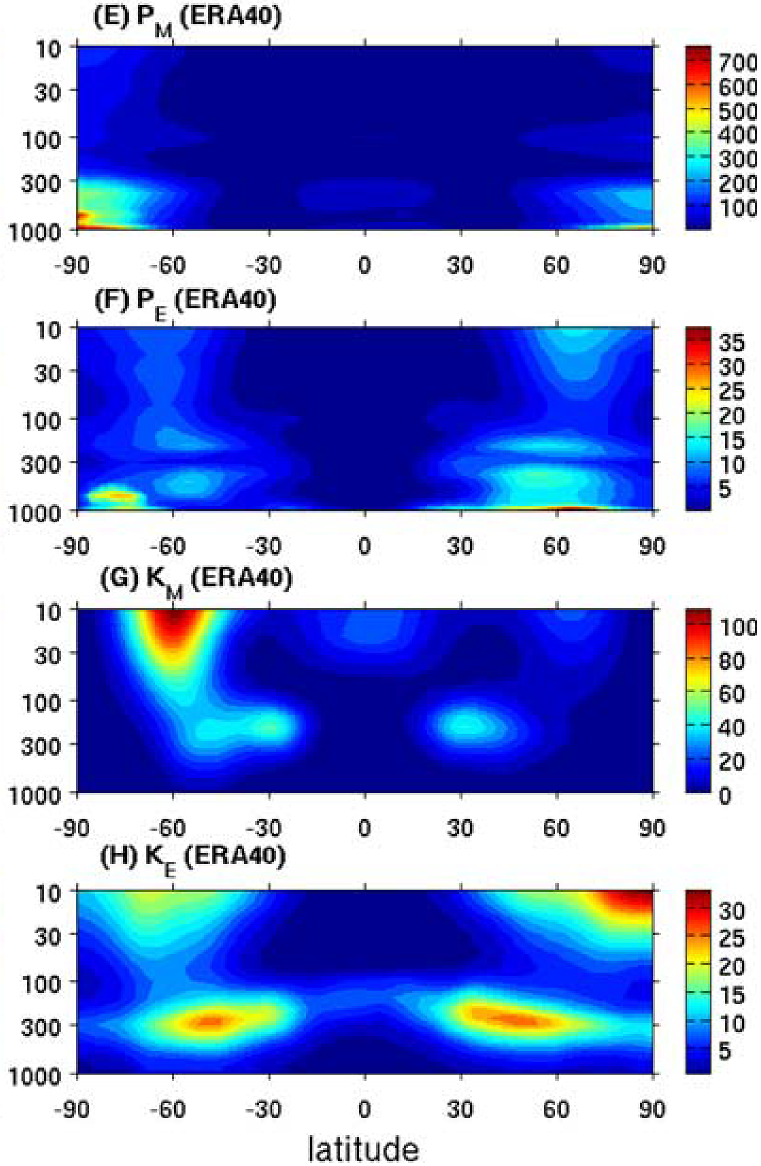




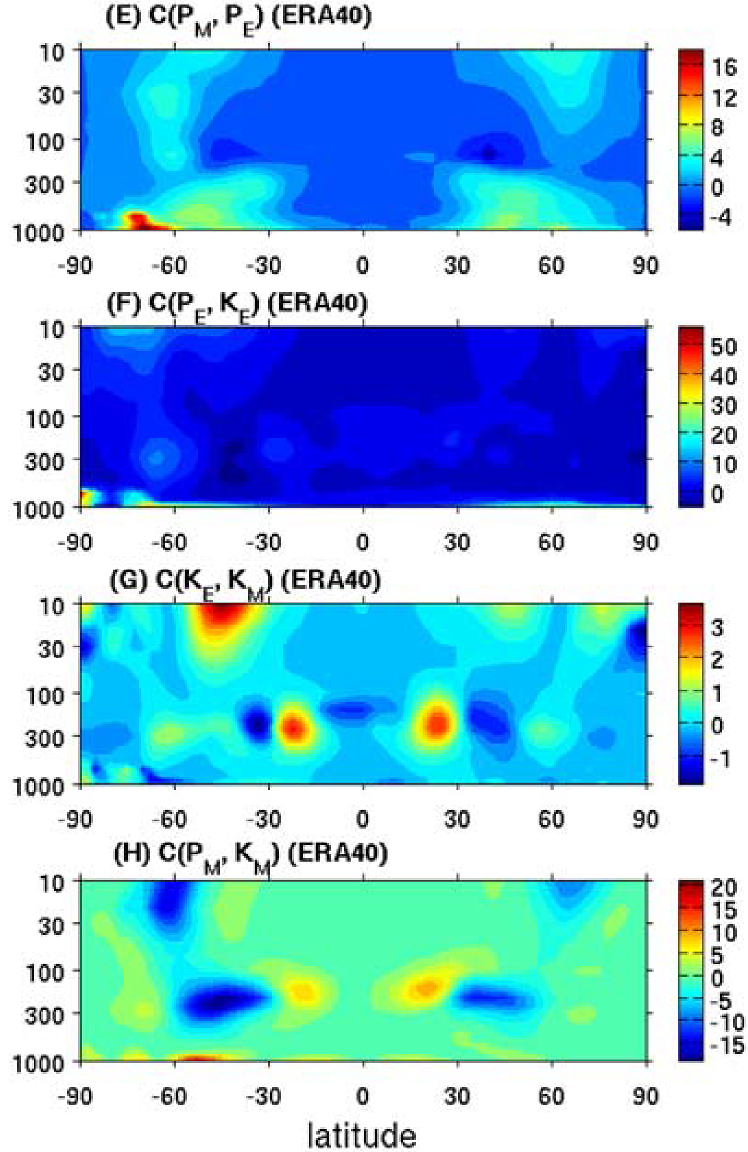


Цикл Лоренца [Li et al., 2007] (1)

Плотность энергии, 10^5 Дж/(м^2 атм)



Плотность преобразования энергии, 10^5 Вт/(м^2 атм)



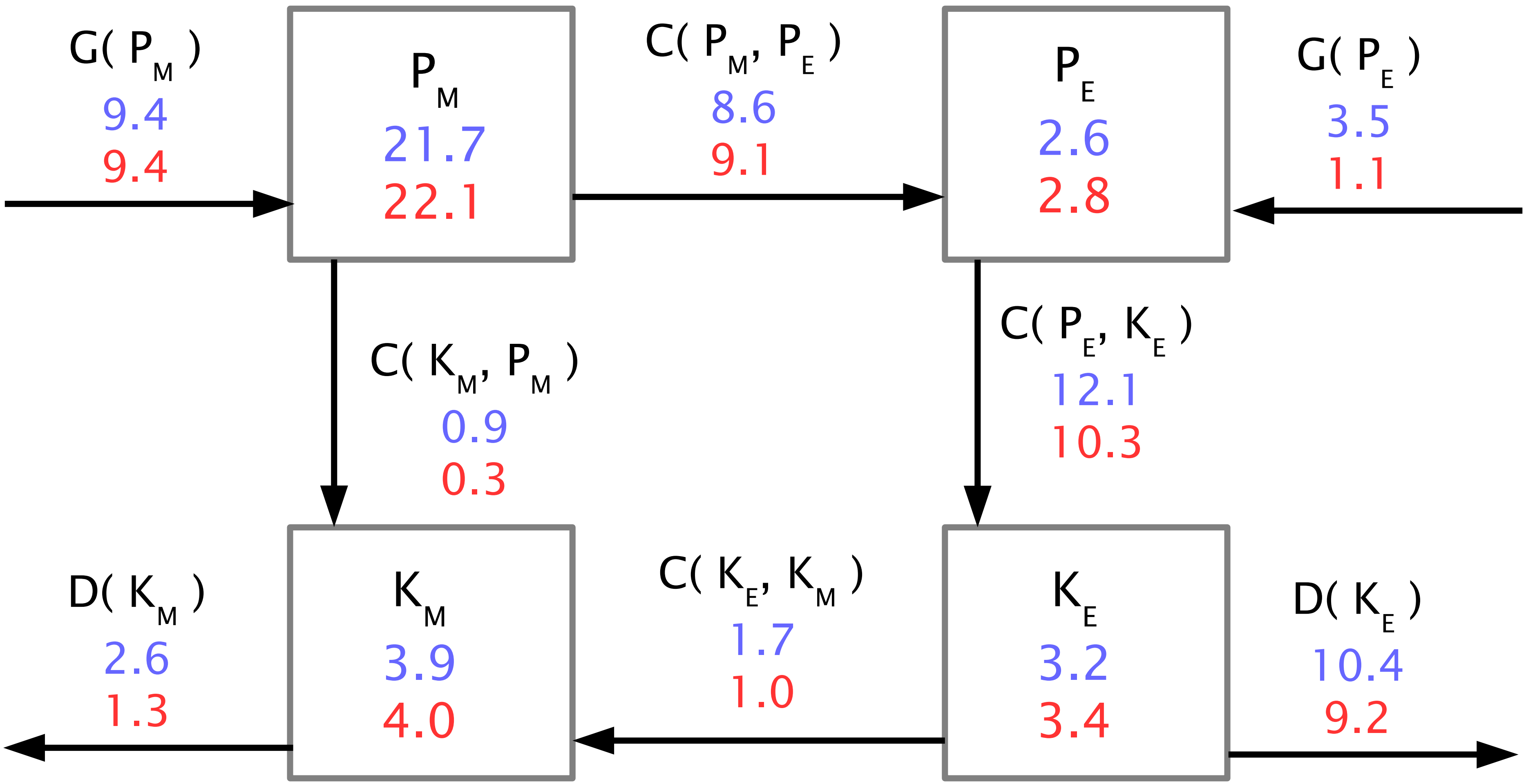
P_M – средняя (среднезональная) потенциальная энергия

P_E – вихревая (азональная) потенциальная энергия

K_M – средняя кинетическая энергия

K_E –вихревая кинетическая энергия

Цикл Лоренца [Li et al., 2007] (2) по данным реанализа NCEP2 и ERA-40



энергия – 10^{20} Дж

преобразования энергии – 10^{14} Вт

Теория взаимодействия бароклинных вихрей с основным потоком (1)

VOL. 33, NO. 11 JOURNAL OF THE ATMOSPHERIC SCIENCES NOVEMBER 1976

Planetary Waves in Horizontal and Vertical Shear: The Generalized Eliassen-Palm Relation and the Mean Zonal Acceleration[1]

D. G. ANDREWS AND M. E. MCINTYRE

Переменные представляются в виде $Y = \overline{Y} + Y'$

$\overline{Y}$ — зональное среднее, Y' — отклонение

$$\partial\overline{u}/\partial t - f_0\overline{v} = -\partial\left(\overline{u'v'}\right)/\partial y + \overline{X}$$

$$\partial\overline{T}/\partial t + N^2HR^{-1}\overline{w} = -\partial\left(\overline{v'T'}\right)/\partial y + \overline{J}/c_p$$

Остаточная циркуляция:

$$\overline{v}^* = \overline{v} - \rho_0^{-1}RH^{-1}\partial\left(\rho_0\overline{v'T'}\Big/N^2\right)\Big/\partial z$$

$$\overline{w}^* = \overline{w} + RH^{-1}\partial\left(\overline{v'T'}\Big/N^2\right)\Big/\partial y$$

Теория взаимодействия бароклинных вихрей с основным потоком (2)

Тогда: $$\partial\overline{u}/\partial t - f_0\overline{v}^* = \boxed{+\rho_0^{-1}\nabla\bullet\mathbf{F} + \overline{X} \equiv \overline{G}}$$

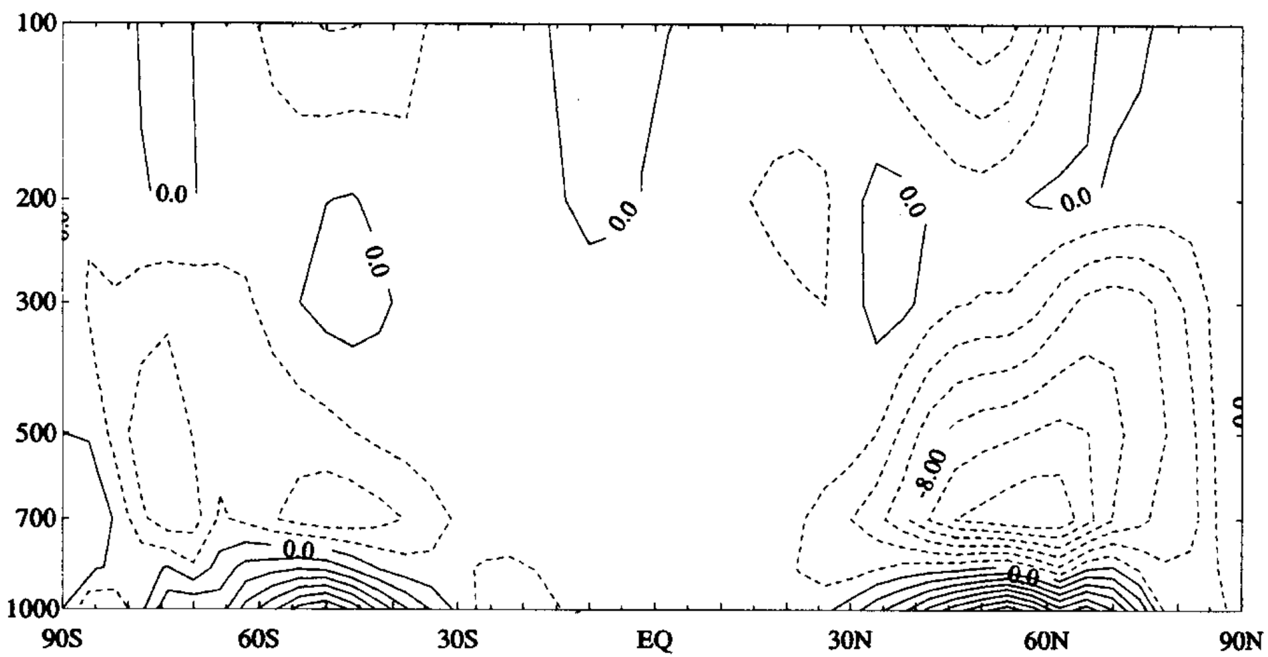
вихревое воздействие

$$\partial\overline{T}/\partial t + N^2HR^{-1}\overline{w}^* = \overline{J}/c_p$$

$$\partial\overline{v}^*/\partial y + \rho_0^{-1}\partial\left(\rho_0\overline{w}^*\right)/\partial z = 0$$

Поток Элиассена–Пальма:

$$F_y = -\rho_0\overline{u'v'}, \qquad F_z = \rho_0 f_0 R\overline{v'T'}\Big/\left(N^2H\right)$$



$\rho_0 = \rho_0(z) = \rho_0(0)\exp(-z/H)$

$\rho_0^{-1}\nabla\bullet\mathbf{F}$, м / (с · сут.),

зима Северного полушария [Holton, 2004]

Немодальный анализ (1)

Рассматривается система с вектором состояния **u** и эволюционным уравнением

$$d\mathbf{u}(t) / dt = \widetilde{\mathbf{A}}(t)\,\mathbf{u}(t) \qquad \mathbf{u} \in H.$$

Для линеаризованной системы $\widetilde{\mathbf{A}}(t)$ – матрица $\widetilde{\mathbf{A}}$:

$$d\mathbf{u}'(t) / dt = \widetilde{\mathbf{A}}\,\mathbf{u}'(t).$$

Теорема: Если оператор $\widetilde{\mathbf{A}}(t)$ нормален на некотором пространстве *H*, то в этом пространстве существует ортонормированный базис $\{\boldsymbol{\phi}_j,\ j=1,2,\ldots\} \in H$, целиком состоящий из собственных векторов $\widetilde{\mathbf{A}}(t)$:

$$\widetilde{\mathbf{A}}(t)\,\boldsymbol{\phi}_j = \lambda_j\,\boldsymbol{\phi}_j, \qquad j=1,2,\ldots \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\phi}_j(t) = \boldsymbol{\phi}_j(0)\exp(\lambda_j\,t)$$

Немодальный анализ (2)

Деление

$$ik(\overline{u}-c)\left(-k^2\hat{\psi}+n^2\frac{d^2\hat{\psi}}{dp^2}\right)=0,$$

на $\overline{u}$–c исключает непрерывный спектр волновых решений.
Решения из этого спектра растут со временем как t^{α} [Burger, 1966].

Утверждение: Гидротермодинамический оператор (уравнения Навье–Стокса+термодинамическое уравнение+уравнение неразрывности) в трёхмерном евклидовом пространстве в общем случае не является нормальным
(полный базис решений возникает при добавлении решений из этого спектра, но этот базис не будет ортогональным)

$$\Downarrow$$

Существует взаимодействие между модами, влияющее на развитие бароклинных возмущений

Немодальный анализ (3)

VOL. 39, NO. 8 JOURNAL OF THE ATMOSPHERIC SCIENCES AUGUST 1982

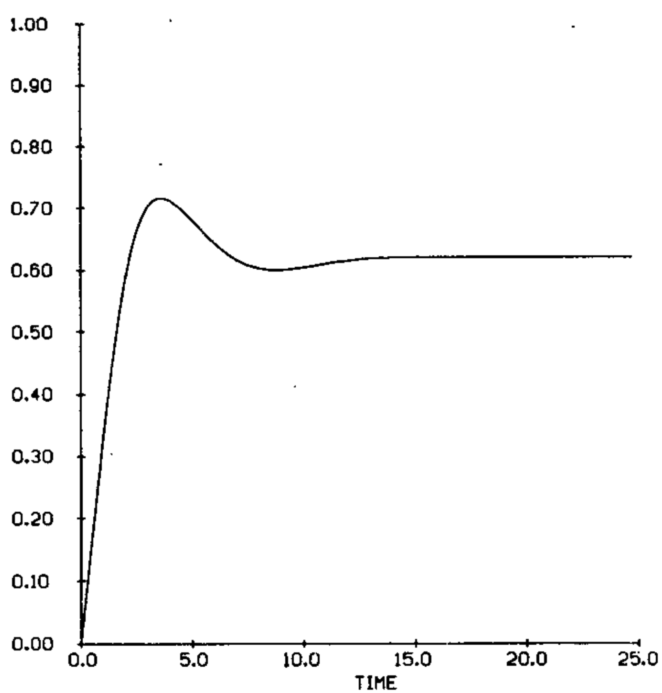
The Initial Growth of Disturbances in a Baroclinic Flow

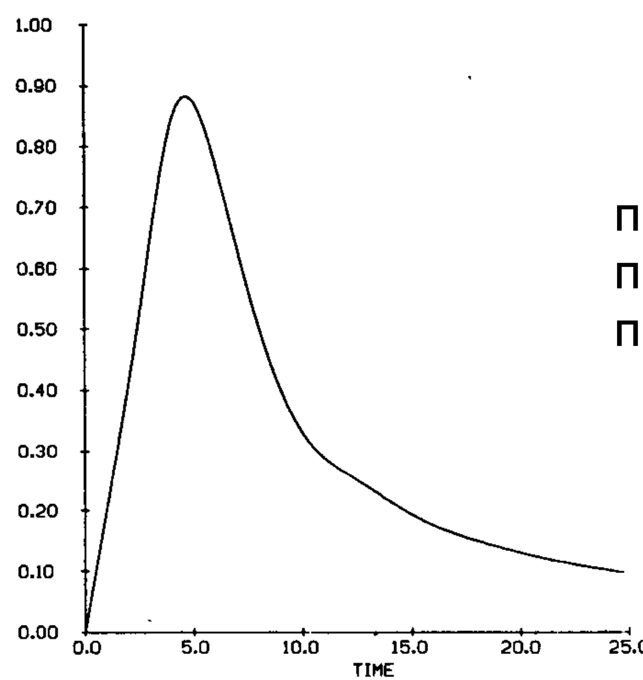
BRIAN F. FARRELL

Изменение энергии бароклинных возмущений ($K^{-1}\, dK/dt$) для задачи Иди (волны с вертикальным волновым числом 4π; единица времени – 22 ч.)

A) линейно наиболее неустойчивая волна: зональное волновое число $k_m \approx 1.6$

B) волна с $k = 2.4$





при $t \lesssim 5$ $B \sim A$

при $t \sim 5–7$ $B > A$

при $t \gtrsim 7$ $A > B$

Немодальный анализ (4)

В случае, если $\overline{u}(x,y,p,t) = \overline{u}(p)$:

– решение задачи Иди для модальных возмущений

$$\psi(x,z,t) = \psi_0(z)\, F(t) \exp(\, i\, k\, x\,)$$

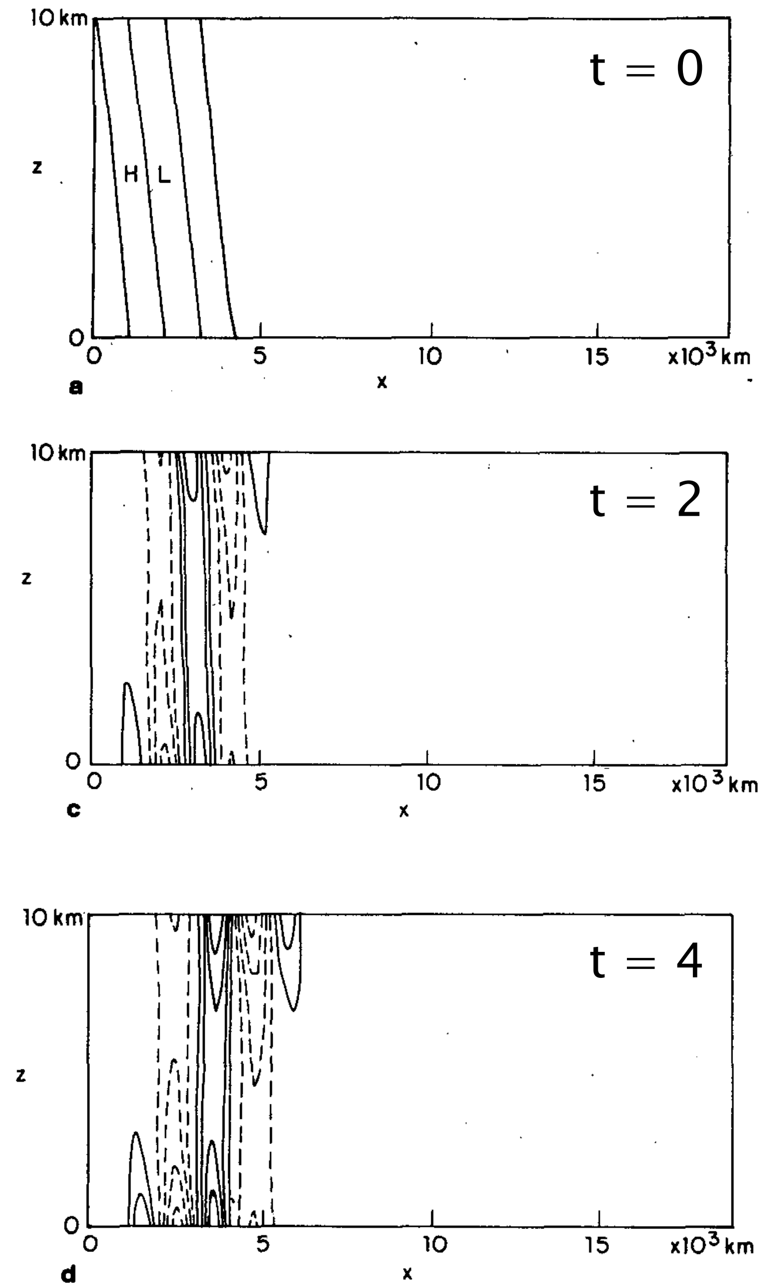
$$F(t) \propto \exp(\, -\, i\, k\, c\, t\,) \qquad \text{или} \qquad F(t) \propto t^{\alpha} \exp(\, -\, i\, k\, c\, t\,).$$

– решение для немодальных возмущений

$$\psi(x,z,t) = \psi_0(z,t) \exp(\, i\, k\, x\,)$$

$\psi_0(z,t)$ сложно зависит от времени.

Немодальные решения задачи Иди при сдвиге базового потока Λ = const = 3 (м/с) / км
Единица времени – 9.3 ч. →



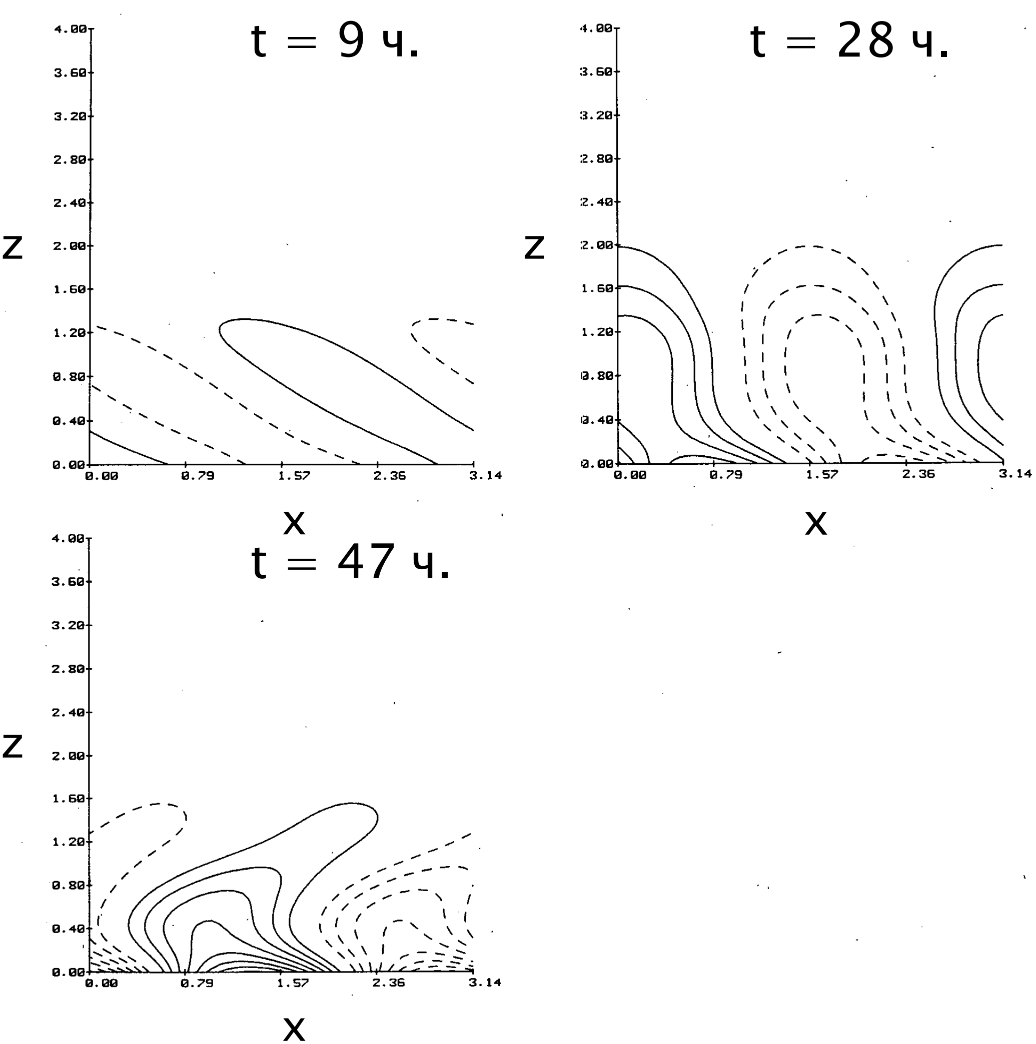
Решения задачи Иди при наличии диссипации [Farrell, 1985]

2718 JOURNAL OF THE ATMOSPHERIC SCIENCES VOL. 42, NO. 24

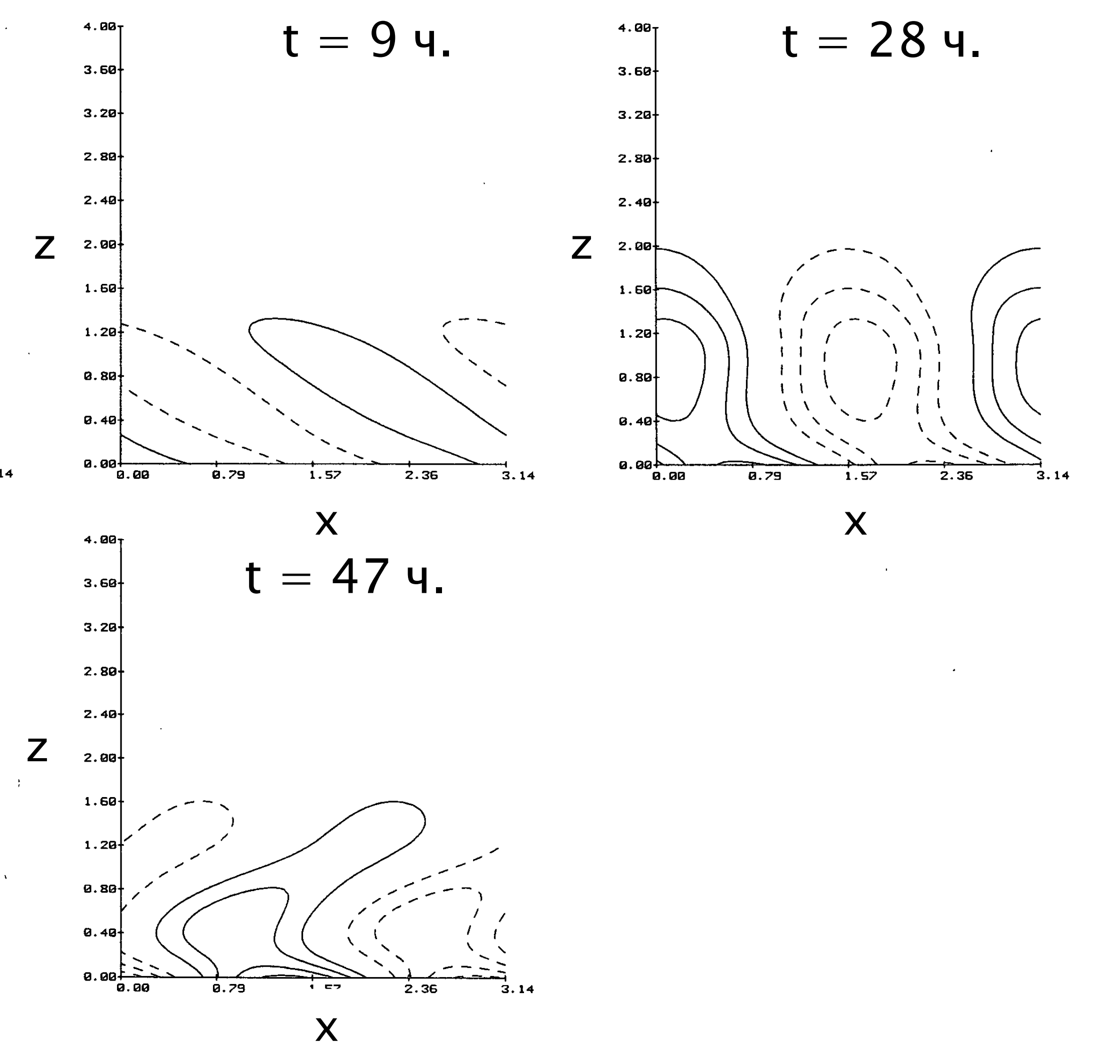
Transient Growth of Damped Baroclinic Waves

BRIAN FARRELL

нет диссипации

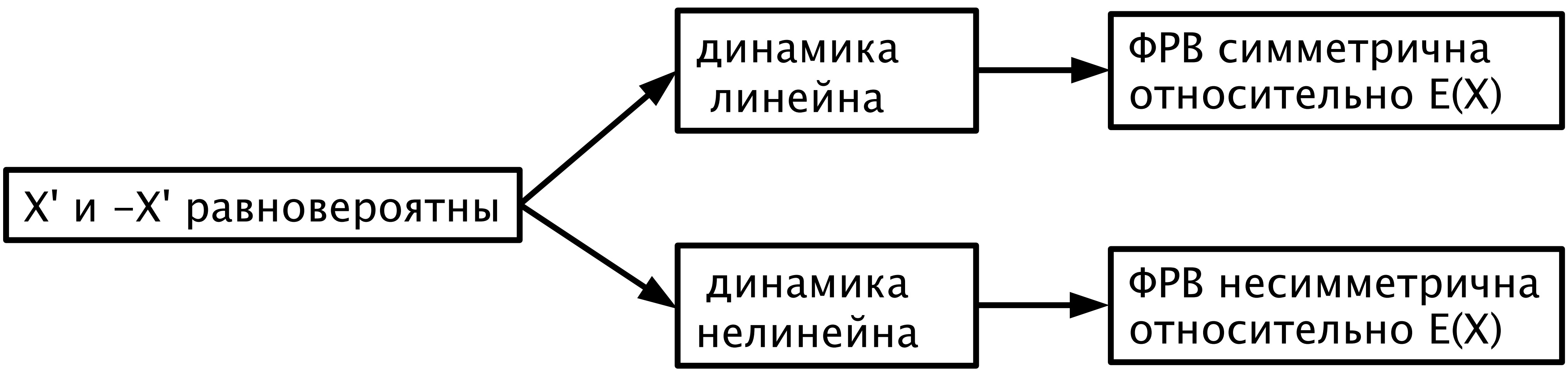


вязкость $\nu = 10$ см^2/с^2
(нет экспоненциально растущих мод)



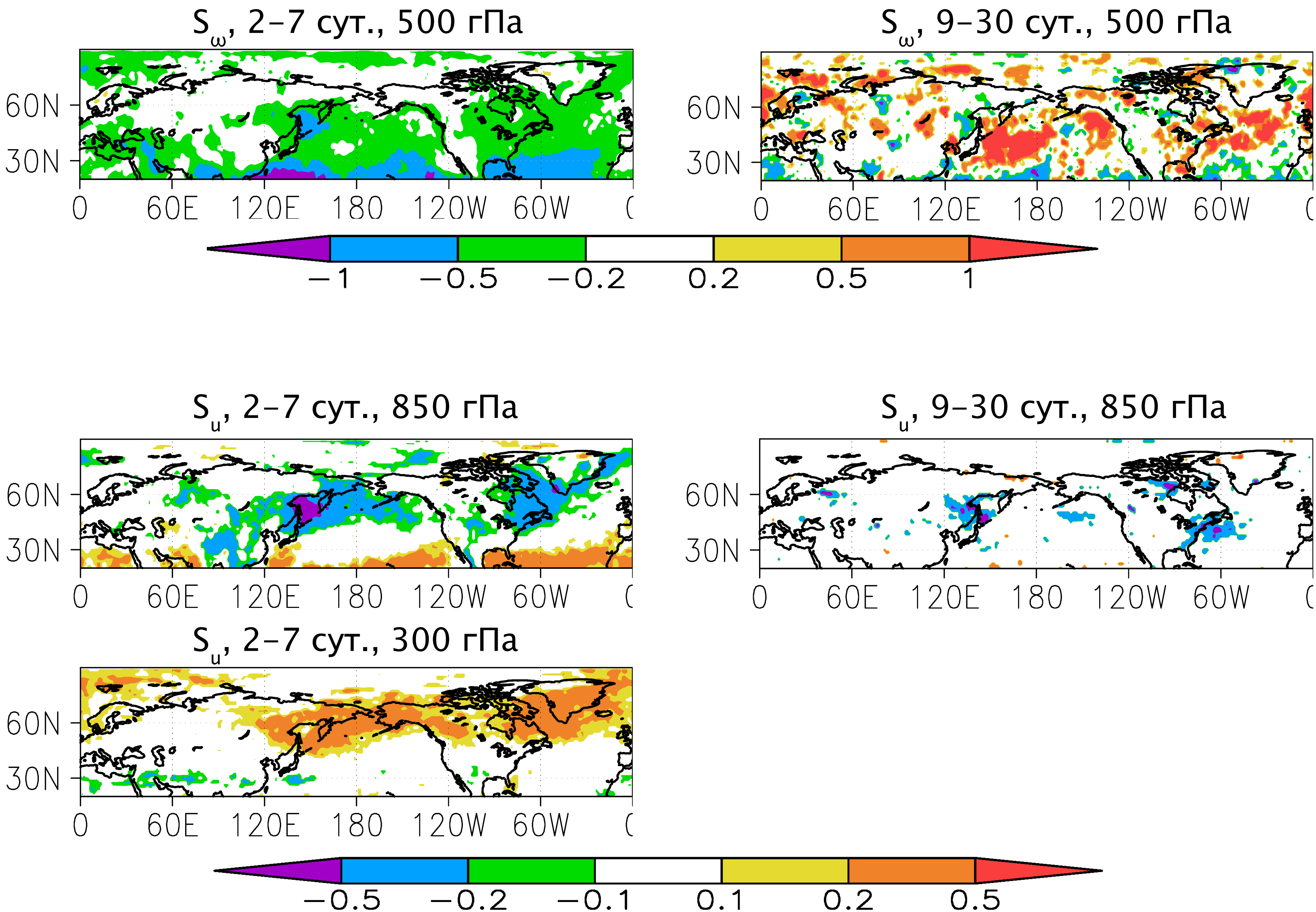
Асимметрия функции распределения вероятности погодных аномалий как характеристика роли нелинейных процессов в циклогенезе

$$X' = X - \langle X \rangle$$



асимметрия $S = \langle X'^3 \rangle / \sigma^3$

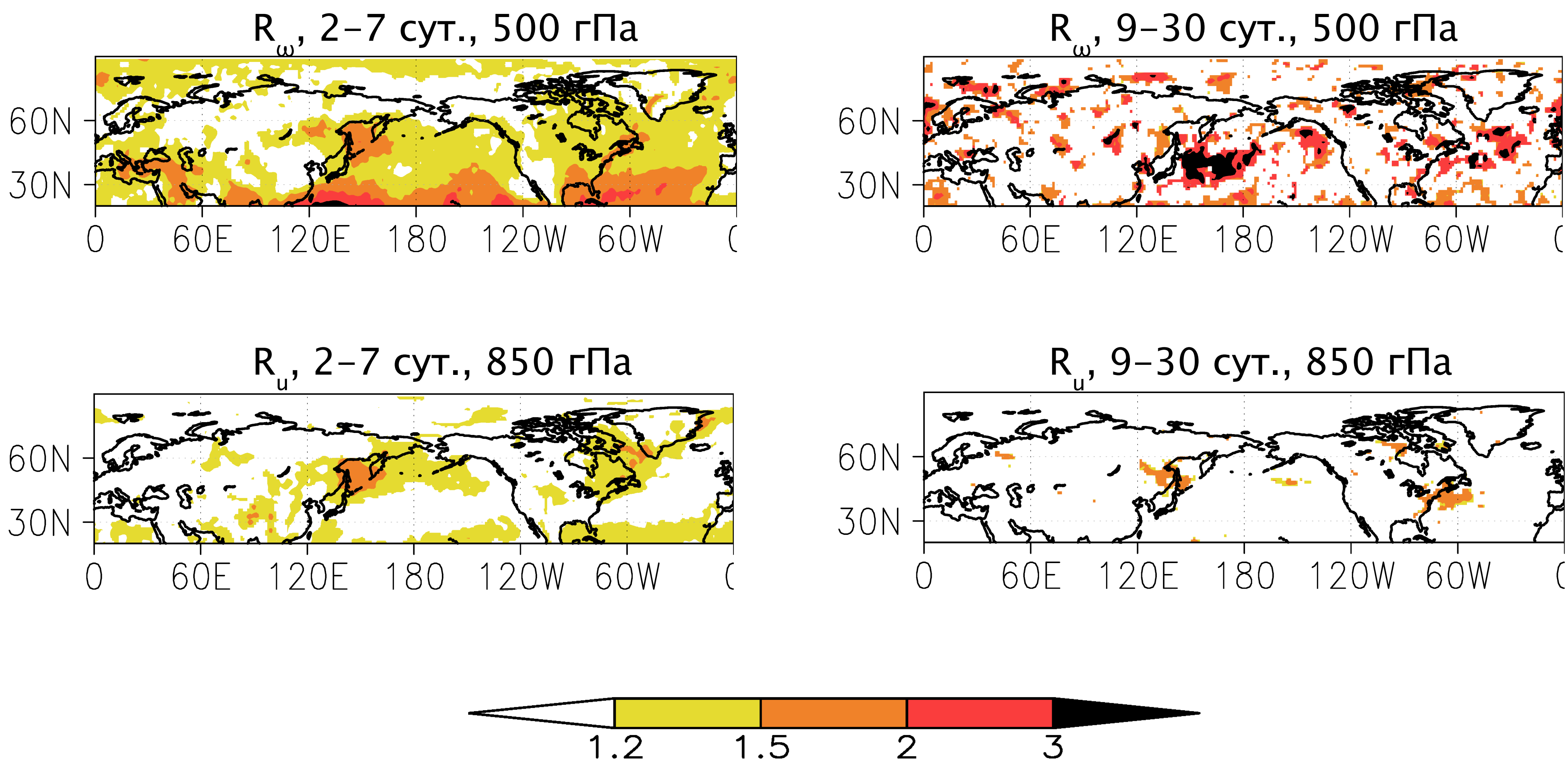
Асимметрия ФРВ погодных аномалий
(реанализ JRA-55, 1979-2014 гг., октябрь-март) [Логинов и др., 2016]



Влияние асимметрии ФРВ погодных вариаций на вероятность развития аномалий > 2 σ (реанализ JRA-55, 1979-2014 гг., октябрь-март) [Логинов и др., 2016]

ряд Эджворта для ФРВ: $\phi \approx \phi_G - (S / 6)\, \phi_G'''$

$$R = \mathbf{P}(\,|X| > 2\,\boldsymbol{\sigma}\,) \;/\; \mathbf{P}_G(\,|X| > 2\,\boldsymbol{\sigma}\,)$$



Вклад третьих моментов погодной изменчивости в прогностические уравнения для вторых моментов [Petoukhov et al., 2008]

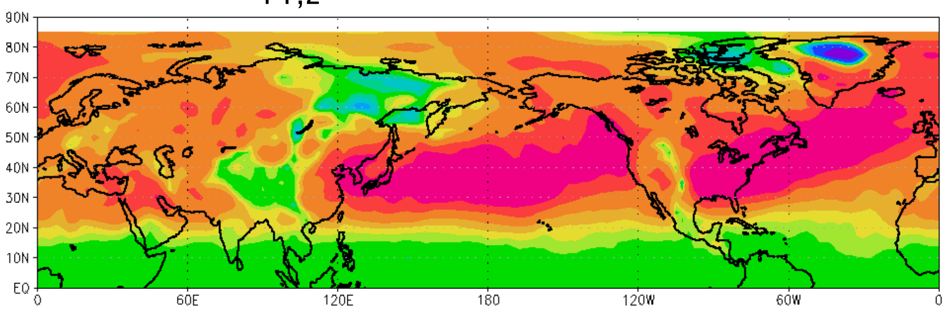
Уравнения вида (подобны турбулентным уравнениям Рейнольдса):

$$\partial M \,/\, \partial t = m_{M,2} + m_{M,3} + \ldots,$$

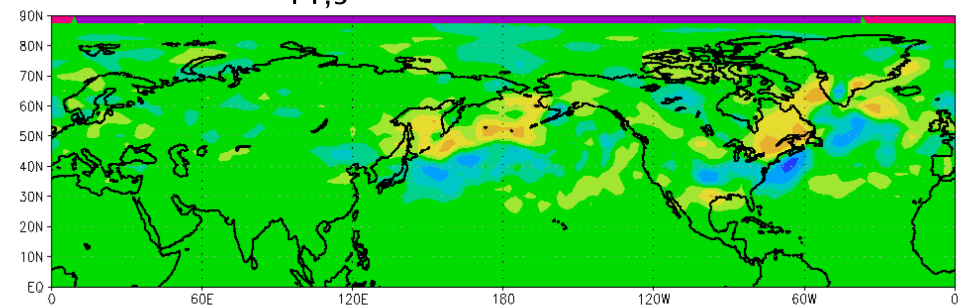
$m_{M,2}$ — вклад вторых моментов, $m_{M,3}$ — вклад третьих моментов.

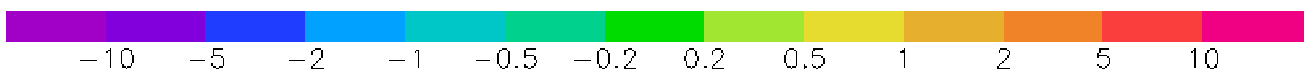
меридиональный поток явного тепла: $M = F_T = \overline{v'\,T'}$

$m_{FT,2}$, январь, 700 гПа,



$m_{FT,3}$, январь, 700 гПа

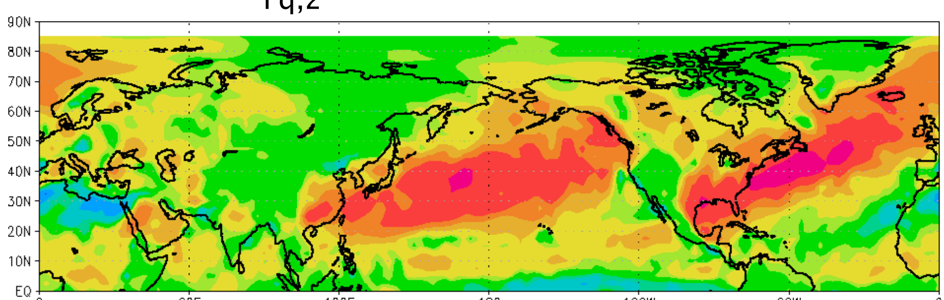




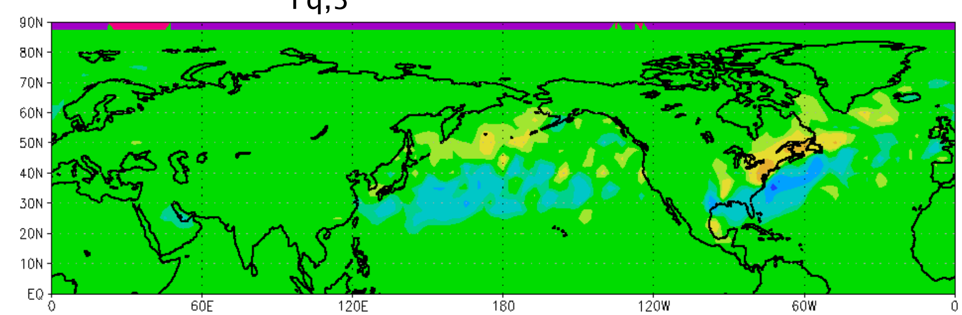
10^{-5} К м/с^2

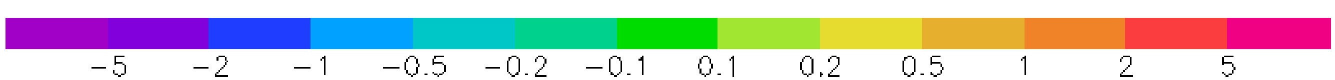
меридиональный поток влаги (скрытого тепла): $M = F_q = \overline{v'q'}$

$m_{Fq,2}$, январь, 850 гПа



$m_{Fq,3}$, январь, 850 гПа





10^{-8} м/с^2

Блокирование в атмосфере: модель, основанная на мультистабильности состояния атмосферы [Charney, DeVore, 1979] (1)

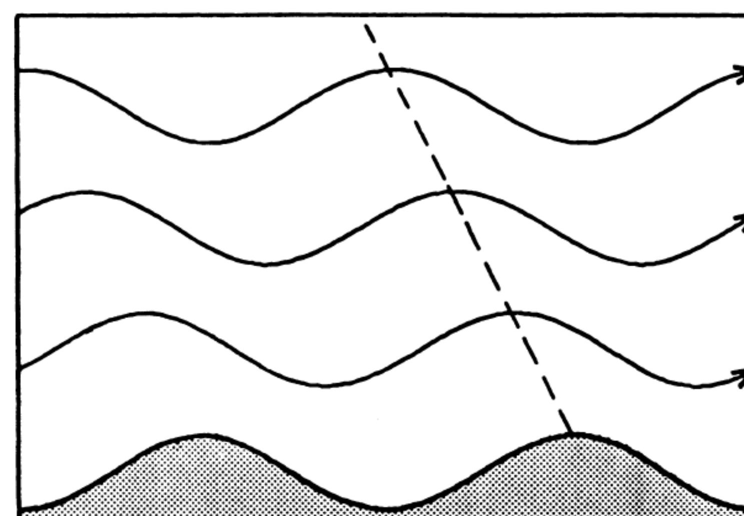
Multiple Flow Equilibria in the Atmosphere and Blocking[1]

JULE G. CHARNEY[2]
Massachusetts Institute of Technology, Cambridge 02139

JOHN G. DEVORE[3]
University of California, Los Angeles 90024

(Manuscript received 22 September 1978, in final form 28 February 1979)

модель взаимодействия топографической волны со средним (зональным) потоком



Блокирование в атмосфере: модель, основанная на мультистабильности состояния атмосферы (2)

Линеаризованное уравнение для топографической волны:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\zeta_g'+\beta v_g'+r\zeta_g'=-\frac{f_0}{H}\overline{u}\frac{\partial h_T}{\partial x}$$

x – зональная координата,
ū – невозмущённый зональный ветер,
ζ_g' – возмущение завихренности v_g' – возмущение скорости
параметр Кориолиса: $f = f_0 + \beta \phi$
h_T – высота топографии
H – высота однородной атмосферы
r – коэффициент релаксации

Уравнение для вариаций невозмущённого ветра:

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}=-D\left(\overline{u}\right)-\kappa\left(\overline{u}-U_e\right)$$

D(ū) – взаимодействие возмущения со средним потоком
U_e – равновесный ветер; κ – коэффициент радиационной релаксации

Блокирование в атмосфере: модель, основанная на мультистабильности состояния атмосферы (3)

$$D\left(\overline{u}\right) = -\overline{v_g' \zeta_g'} - \left(f_0 \,/\, H\right) \overline{v_g' h_T}$$

Если h_T имеет вид

$$h_T(x,\, y) = \operatorname{Re}\left[h_0 \exp\left(ikx\right)\right] \cos ly$$

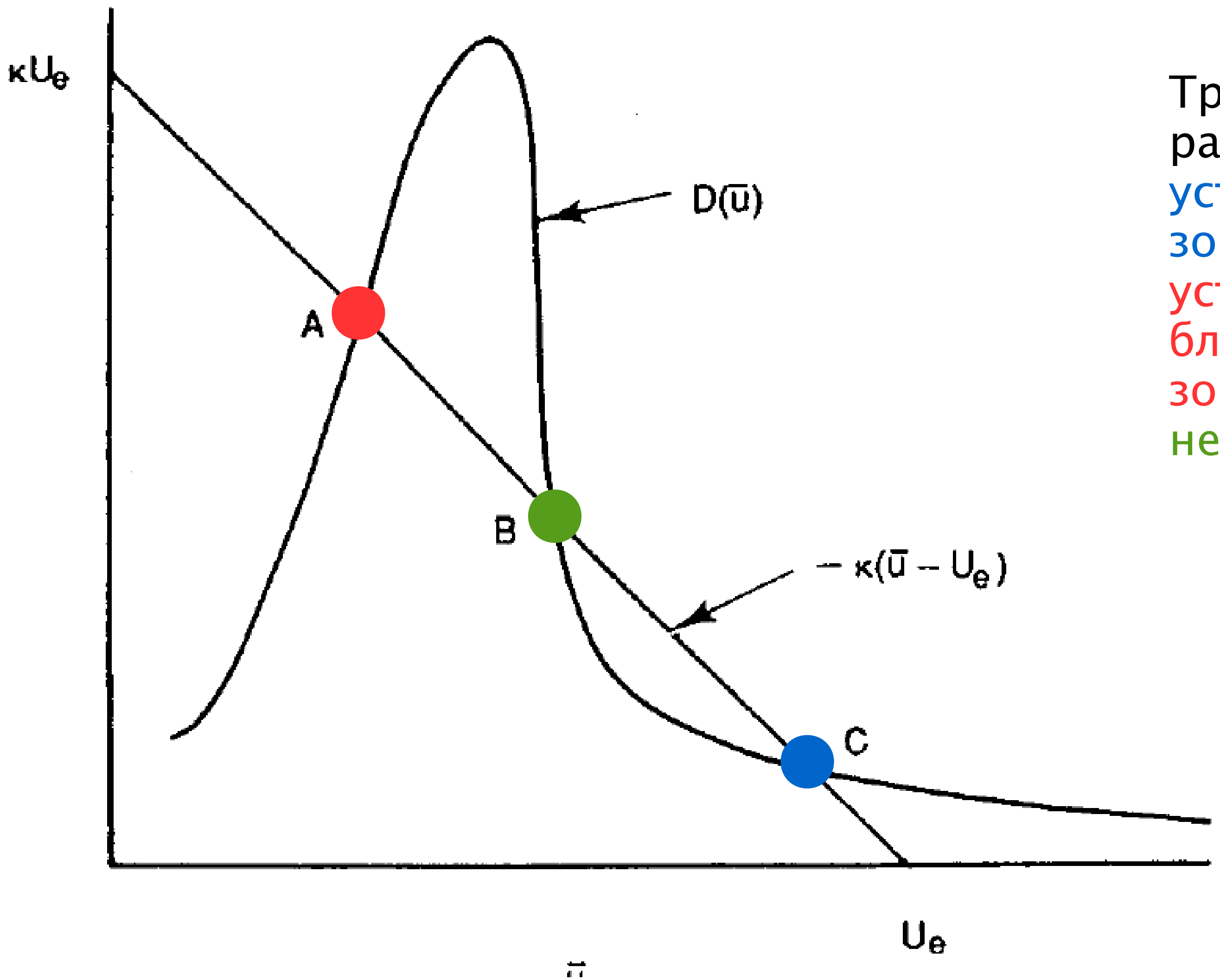
то

$$D\left(\overline{u}\right) = -\left(\frac{f_0}{H}\right) \overline{v_g' h_T} = \left(\frac{r K^2 f_0^2}{2\overline{u} H^2}\right) \frac{h_0^2 \cos^2 ly}{\left[\left(K^2 - K_s^2\right)^2 + \varepsilon^2\right]}$$

где

$$\varepsilon \equiv r K^2 \left(k\overline{u}\right)^{-1}$$
$$K^2 \equiv k^2 + l^2$$
$$K_s^2 = \beta / \overline{u}$$

Блокирование в атмосфере: модель, основанная на мультистабильности состояния атмосферы (4)

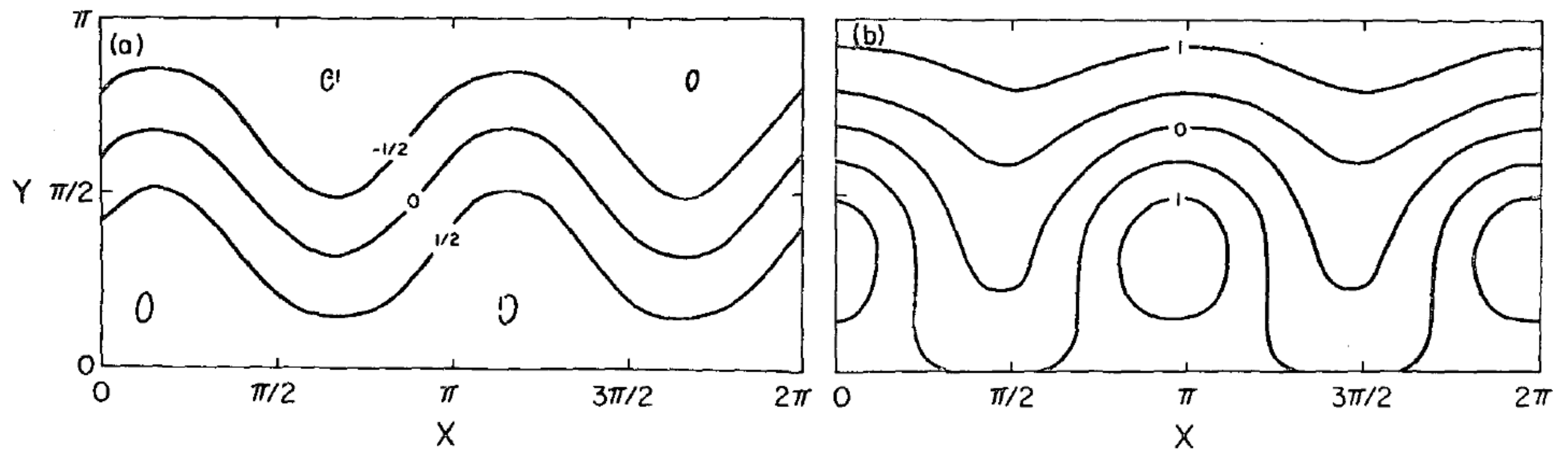


Три состояния равновесия:
устойчивое с сильным зональным потоком,
устойчивое с блокированным зональным потоком,
неустойчивое

Блокирование в атмосфере: модель, основанная на мультистабильности состояния атмосферы (5)

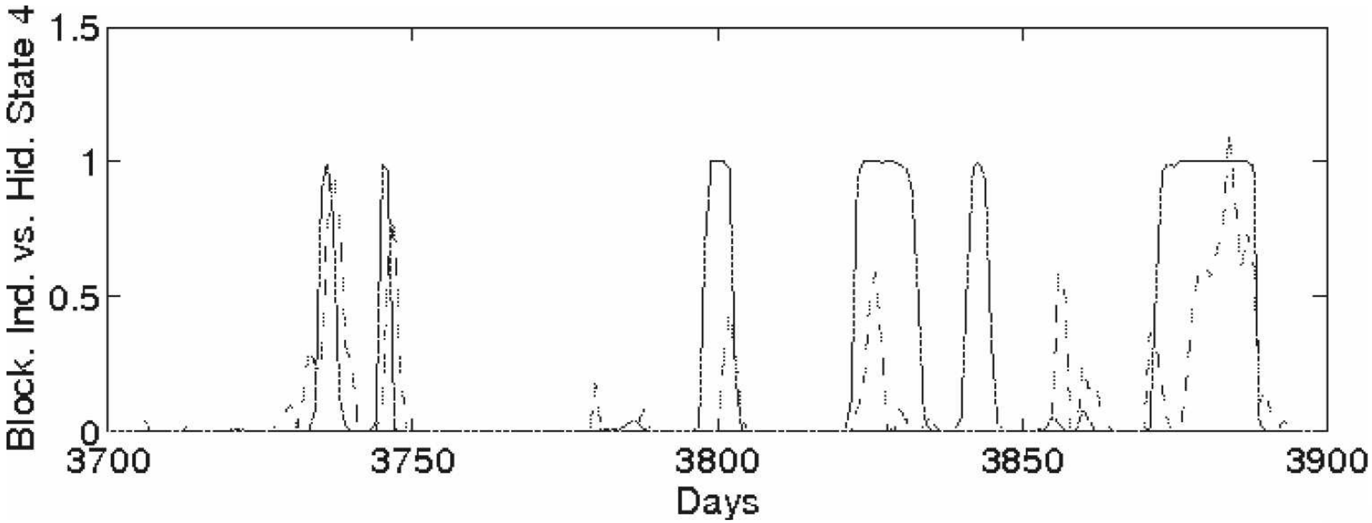
неблокированный поток

блокированный поток



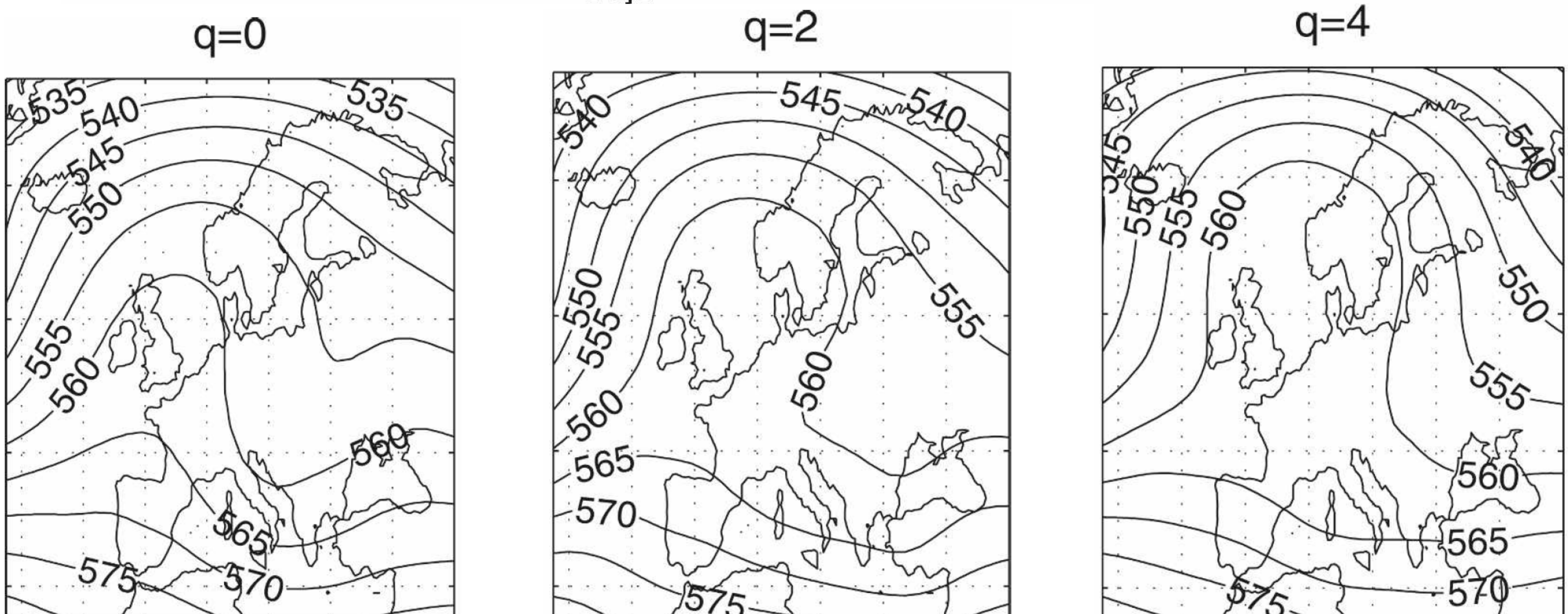
Идентификация блокирующих образований как мультистабильных состояний [Horenko et al., 2008]

(с использованием марковских цепей)



индекс блокирования

вероятность скрытого состояния j=4



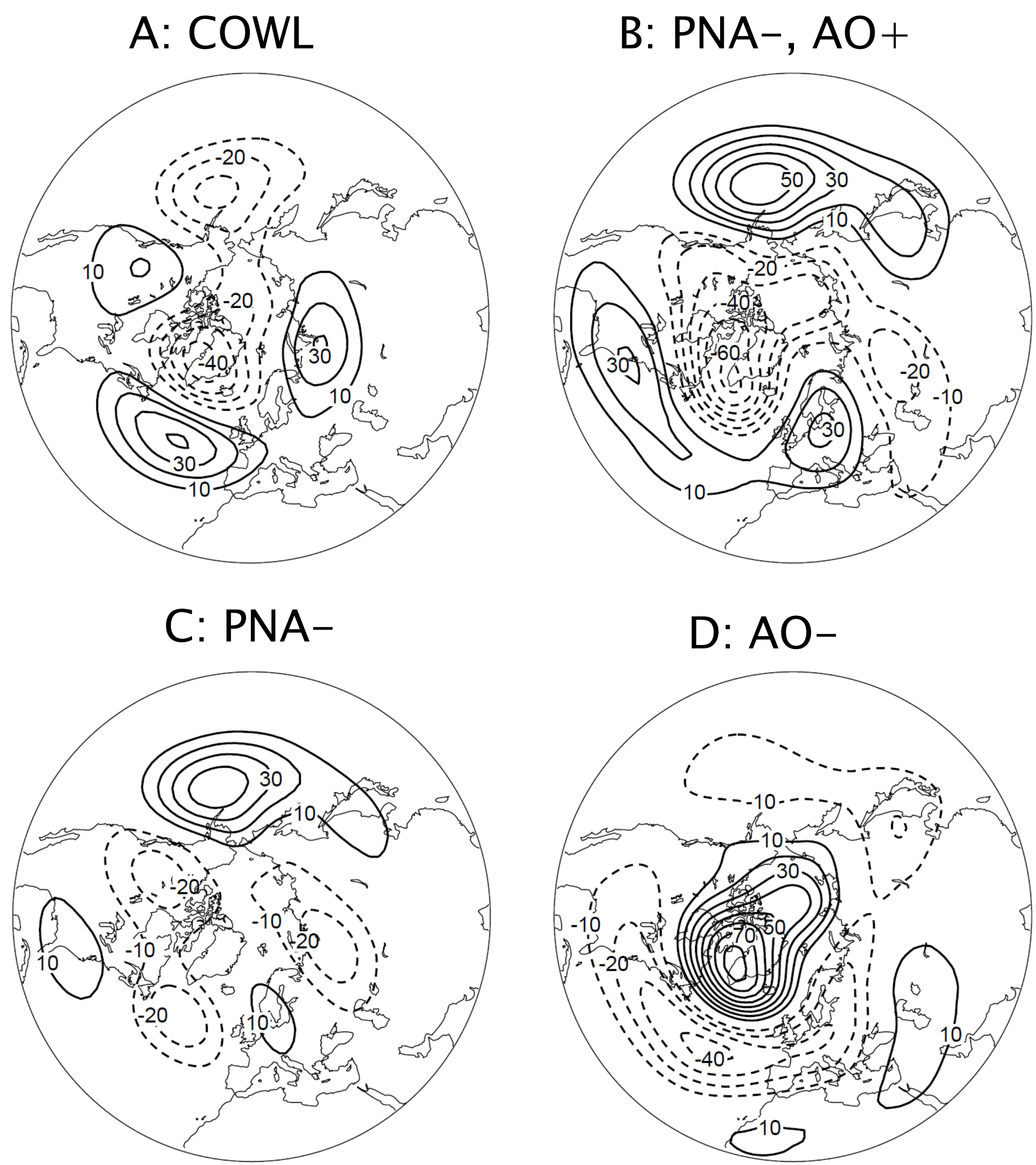
Режимы циркуляции (1)

letters to nature

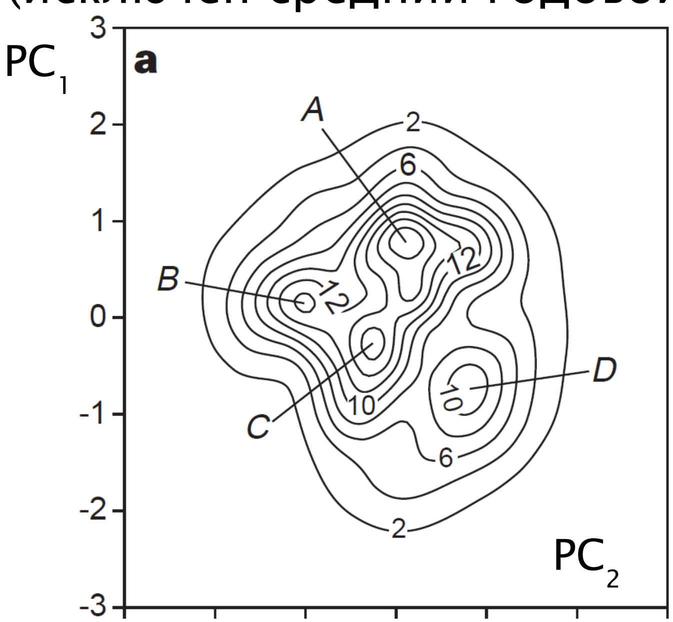
Signature of recent climate change in frequencies of natural atmospheric circulation regimes

S. Corti*, F. Molteni*‡ & T. N. Palmer†

NATURE | VOL 398 | 29 APRIL 1999

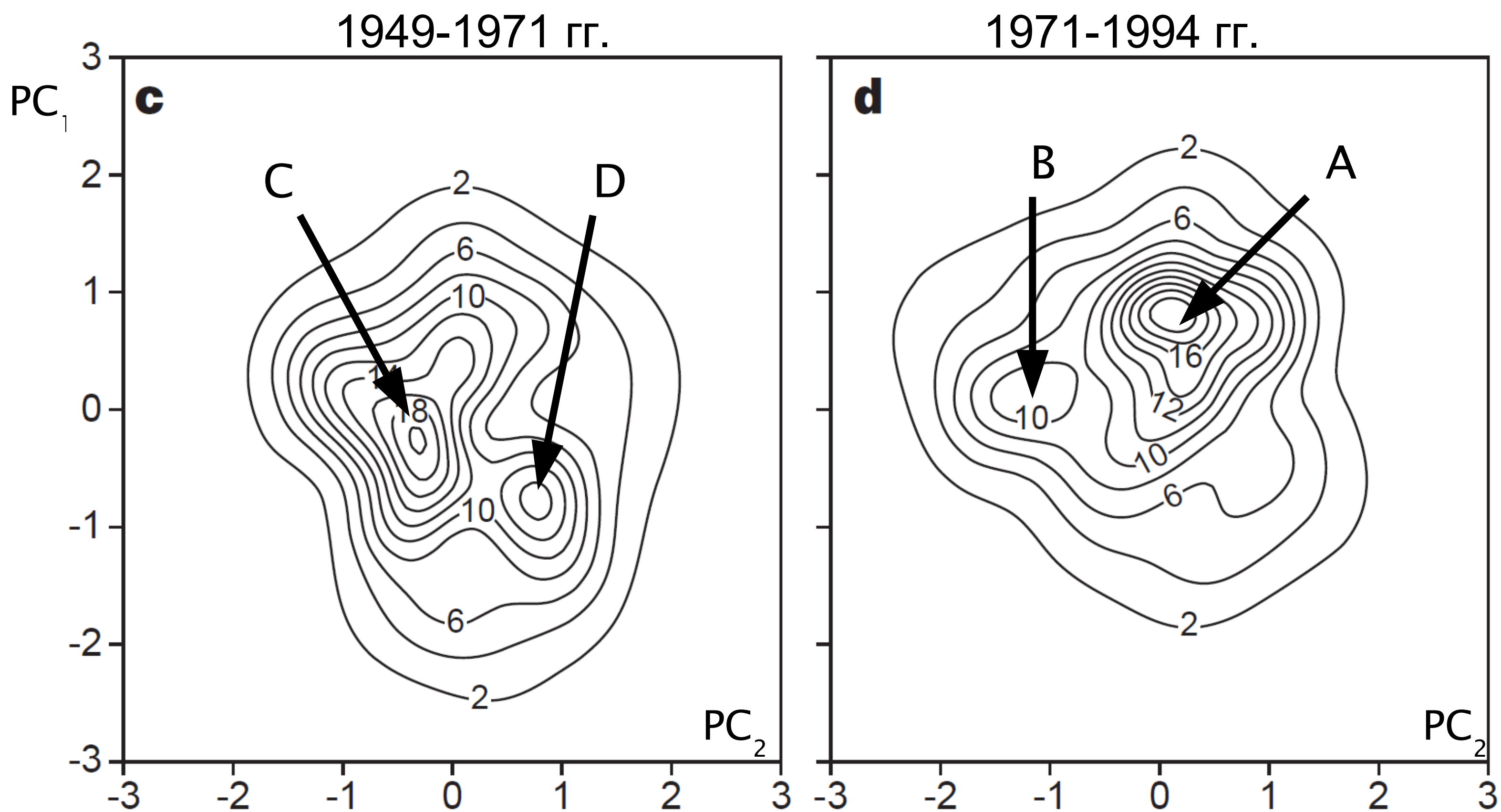


Выборочная ФРВ геопотенциала 500 гПа, реанализ NCEP, 1949–1994 гг. (исключён средний годовой ход)



Режимы циркуляции (2)

Выборочная ФРВ геопотенциала 500 гПа, реанализ NCEP
(исключён средний годовой ход)



A: частота проявления увеличивается (более быстрое потепление над сушей, чем над океанами)

B: частота проявления увеличивается (переход АО в положительную фазу)

C: частота проявления уменьшается (PNA в положительной фазе)

D: частота проявления уменьшается (переход АО в положительную фазу)

Выводы

– Линейные модели бароклинных волн в целом учитывают физические особенности циклогенеза в земной атмосфере.

– Тем не менее, важные нелиненые особенности этих волн связаны

1. Со взаимодействием с фоновым состоянием атмосферы:

   рост бароклинных волн: $P_M \rightarrow P_E \rightarrow K_E$;

   диссипация бароклинных волн: $K_E \rightarrow K_M \rightarrow P_M$.

2. Межмодовым взаимодействием между нейтральными модами непрерывного спектра:

   важно в период формирования бароклинных возмущений;

   может приводить к росту возмущений даже в отсутствие линейной неустойчивости;

   увеличивает вероятность формирования интенсивных погодных аномалий.

– Возможна мультистабильность состояния атмосферы при заданной интенсивности притока энергии:

1. Возможное формирование вихрей, юлокирующих основной поток;
2. Режимы циркуляции.