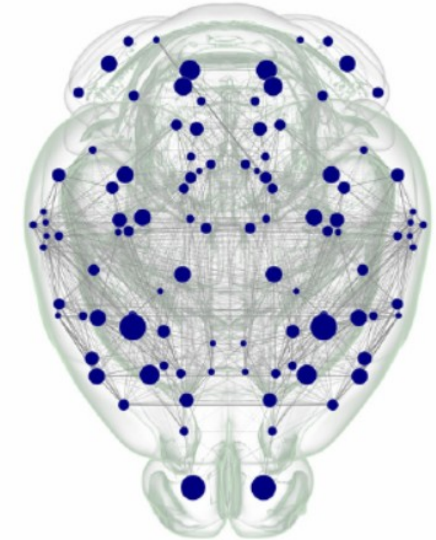
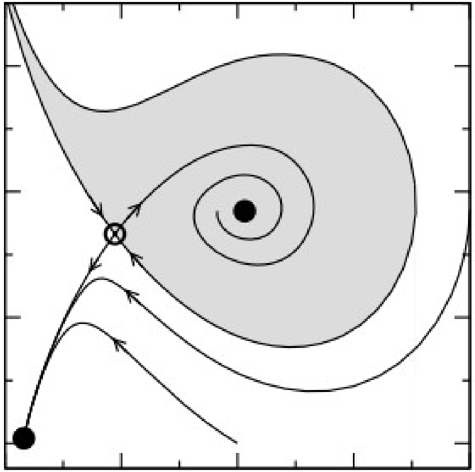
Модели нейронных масс: теория и применение для моделирования мозга



Клиньшов Владимир Викторович

ИПФ РАН, Нижний Новгород

vladimir.klinshov@gmail.com



XXI научная школа “Нелинейные волны - 2024”

Моделирование динамики мозга

1. Концептуальные модели

Mirollo, Strogatz. Synchronization of pulse-coupled biological oscillators, SIAM Journal on Applied Mathematics 1990 – **2700+ цитирований**

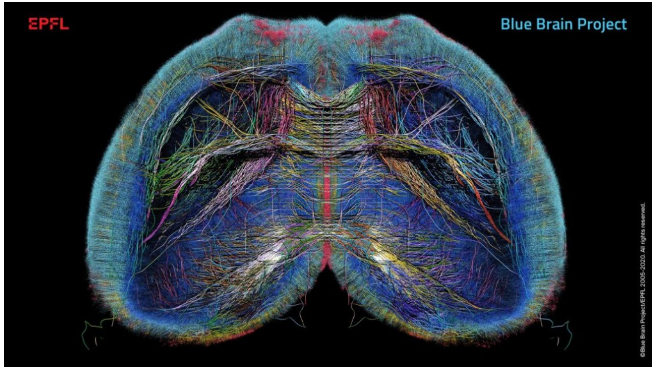
$$\frac{dx_i}{dt} = S_0 - \gamma x_i, \qquad 0 \leqq x_i \leqq 1, \quad i = 1, \cdots, N.$$

$$x_i(t) = 1 \Rightarrow x_j(t^+) = \min(1, x_j(t) + \varepsilon) \quad \forall j \neq i.$$

Моделирование динамики мозга

2. Реалистичные модели

Blue Brain Project
Генри Маркрам,
Лозанна, Швейцария
2005 – н.в.



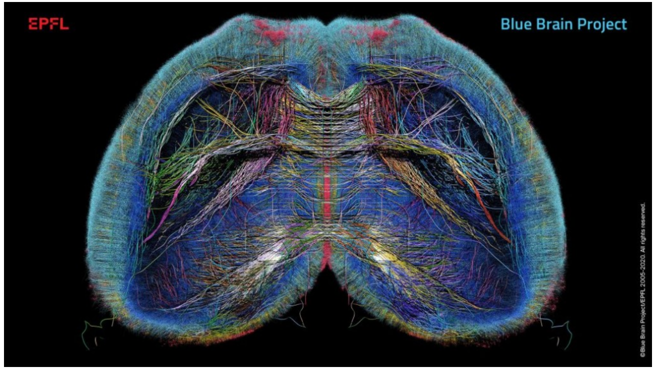
2015: Модель кортикальной колонки
H. Markram et al, Reconstruction and Simulation of Neocortical Microcircuitry. Cell 2015 – **1500+ цитирований**

2019: Модель неокортекса мыши
Reimann, M.W., Gevaert, M., Shi, Y., Lu, H., Markram, H., and Muller, E. A null model of the mouse whole-neocortex micro-connectome. Nature Communications 2019 – **48 цитирований**

Моделирование динамики мозга

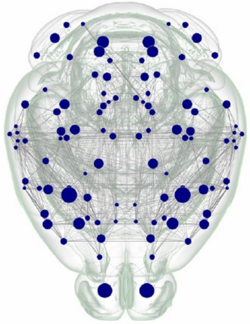
3. Модели нейронных масс (среднеполевые модели)

Микроскопическое описание
(сеть нейронов)



https://www.epfl.ch/research/domains/bluebrain/gallery/

Макроскопическое описание
(сеть популяций)



Rabuffo et al, eNeuro 2021

What is a neural mass?

Freeman 1972

226 FREEMAN

TABLE 1. Numbers of neurons in logarithmic scale*

Number	Structure	Domain of Observation
10,000,000,000	Neurons, human brain	
	Neurons, cat brain	Behavior:
1,000,000,000		Stimulation
	Visual cortex, Area 17, man	and ablation
	Primary olfactory axons, cat	
	Olfactory bulb, cat	
100,000,000		
10,000,000	Olfactory cortex, cat	
	Evoked potential, bulbar at threshold	
	Neurons/mm^3, cerebellum	
	Optic nerve, man	
1,000,000	Neurons, crustacean	Neural masses:
	Neurons/mm^2, bulb, cat	Field potentials
100,000		
	Mitral cells, cat	
	Spinal ganglion, man	
10,000	PON fibers at threshold for AEP	
	Visceral ganglion, Aplysia	
1,000	Retina, Limulus	Networks:
	Optic nerve, Necturus	Unit recording
	Sympathetic ganglion, rat	and analysis
100		
10		
	Cardiac ganglion, Homarus	

“Нейронная масса” - ансамбль нейронов мезоскопического размера (большой, но не очень)
10^4 - 10^7 нейронов
(сейчас до 10^8 нейронов)

Модели нейронных масс

Wilson and Cowan, Biophys. J 1972
Amari, Biological cybernetics 1977
Jansen and Rit, Biological cybernetics 1995
Van Vreeswijk and Sompolinsky, Neural Computations 1998
Gerstner, Neural Computations 2000
El Boustani and Destexhe, Neural Computations 2009
Deco et al, J. Neurosci 2013
Schwalger, Deger, and Gerstner, PLoS Comput Biol 2017

“Модели нейронных масс нового поколения”

Montbrió, Pazó, and Roxin, Phys. Rev. X 2015 **(MPR, 400+ цитирований)**

Классические модели нейронных масс

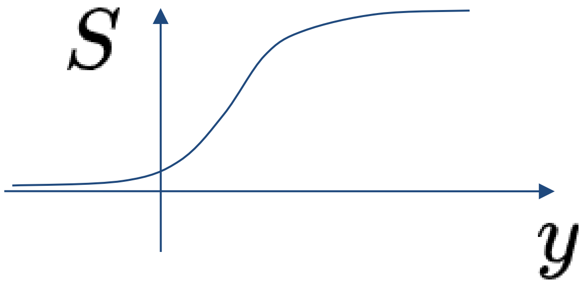
выход
(частота спайков)

функция
активации

вход
(электрическое поле)

$$x = S(\ y\ )$$

Функция активации



Классические модели нейронных масс

выход
(частота спайков)

функция
активации

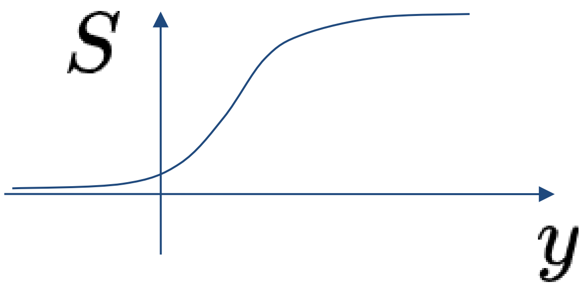
вход
(электрическое поле)

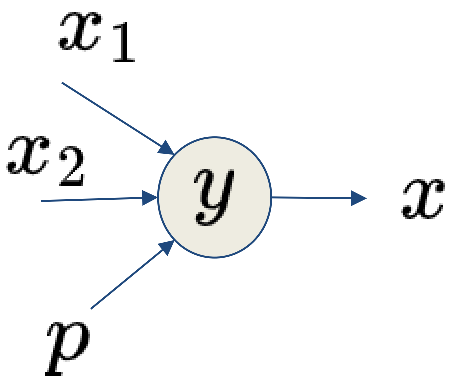
$$x = S(\,y\,)$$

$$y = \sum w_i x_i + p$$

веса
синаптически
х связей

Функция активации





Добавляем динамику

1. Динамическая переменная = частота спайков
   Wilson and Cowan 1972

$$x = S(\ y\ )$$

$$y = \sum w_i x_i$$

Добавляем динамику

1. Динамическая переменная = частота спайков
   Wilson and Cowan 1972

$$\tau \dot{x} = -x + S(\, y \,)$$

$$y = \sum w_i x_i$$

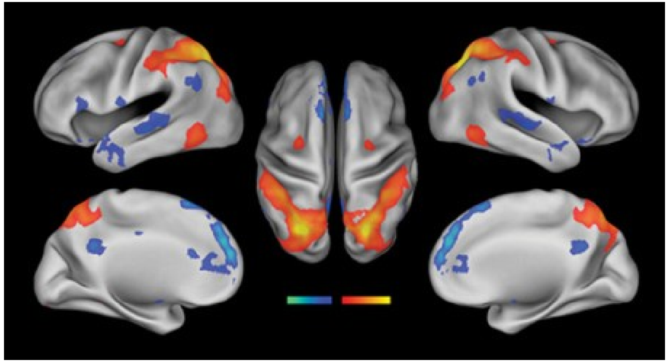
Добавляем динамику

1. Динамическая переменная = частота спайков
   Wilson and Cowan 1972

$$\tau \dot{x} = -x + S(\ y\ )$$

$$y = \sum w_i x_i$$

Моделирование BOLD сигналов



Deco et al. J. Neurosci 2013

Добавляем динамику

2. Динамическая переменная = электрическое поле

Freeman 1972, Jansen and Rit 1995

$$x = S(\ y\ )$$

$$y = \sum w_i x_i$$

Добавляем динамику

2. Динамическая переменная = электрическое поле

Freeman 1972, Jansen and Rit 1995

$$x = S(\ y\ )$$

$$\tau^2 \ddot{y} = \sum w_i x_i - 2\tau\dot{y} - y$$

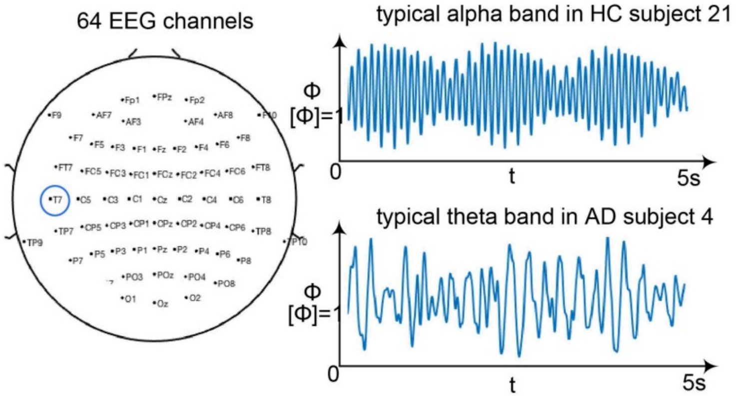
Добавляем динамику

2. Динамическая переменная = электрическое поле

Freeman 1972, Jansen and Rit 1995

$$x = S(\,y\,)$$
$$\tau^2 \ddot{y} = \sum w_i x_i - 2\tau\dot{y} - y$$

Моделирование EEG сигналов



Stefanovski et al. Front. Comp. Neurosci. 2019

Классические модели нейронных масс

- Усредненные переменные: частота x, поле y
- Эмпирическая функция активации $S(y)$
- Эмпирическая динамика либо для x, либо для y

Классические модели нейронных масс

- Усредненные переменные: частота *x*, поле *y*
- Эмпирическая функция активации *S(y)*
- Эмпирическая динамика либо для *x*, либо для *y*

Модели нейронных масс нового поколения

- Усредненные переменные: частота *x*, поле *y*
- **Уравнения для усредненных переменных выводятся из микроскопических уравнений!**

Модель Монтбрио-Пазо-Роксина

*Montbrió, Pazó, and Roxin, Phys. Rev. X 2015 (**MPR**)*

Популяция нейронов с глобальными связями

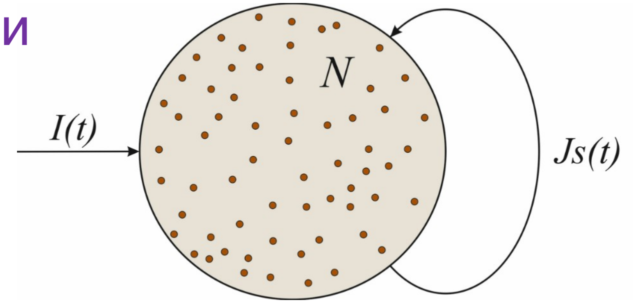
$$\dot{V}_j = V_j^2 + \eta_j + Js(t) + I(t)$$

мембранный потенциал

неоднородная возбудимость

рекуррентный сигнал

однородный внешний стимул



Модель Монтбрио-Пазо-Роксина

*Montbrió, Pazó, and Roxin, Phys. Rev. X 2015 (**MPR**)*

Популяция нейронов с глобальными связями

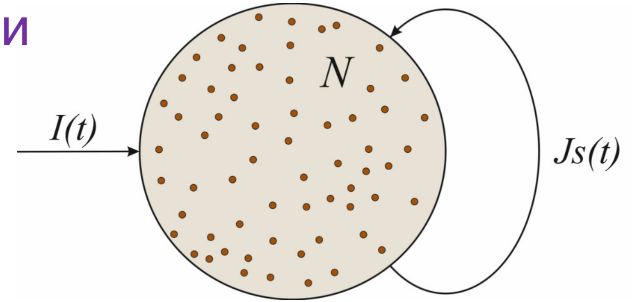
$$\dot{V}_j = V_j^2 + \eta_j + Js(t) + I(t)$$

мембранный потенциал

неоднородная возбудимость

рекуррентный сигнал

однородный внешний стимул

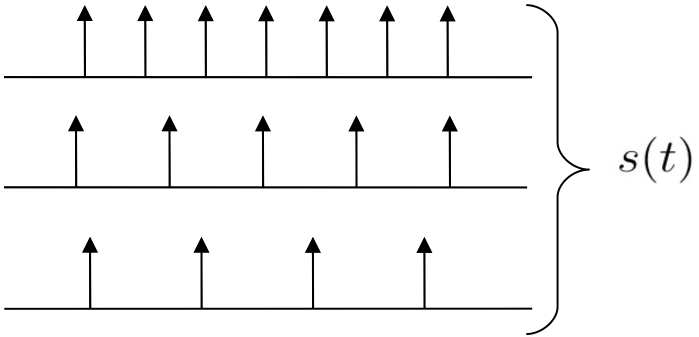


Правило спайка:

$$\text{if } V_j \geq V_p, \text{ then } V_j \to V_r$$

Выходной сигнал сети:

$$s(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_k \delta(t - t_j^k)$$



Техника редукции

Термодинамический предел

$$N \to \infty : \ \rho(V|\eta, t), \ g(\eta)$$

функция условной плотности

функция распределения параметра

Техника редукции

Термодинамический предел

$$N \to \infty : \ \rho(V|\eta, t), \ g(\eta)$$

функция условной плотности

функция распределения параметра

Уравнений непрерывности

$$\partial_t \rho + \partial_V [\rho(V^2 + \eta + Js(t) + I(t))] = 0$$

Техника редукции

Термодинамический предел

$$N \to \infty: \; \rho(V|\eta, t), \; g(\eta)$$

функция условной плотности

функция распределения параметра

Уравнений непрерывности

$$\partial_t \rho + \partial_V [\rho(V^2 + \eta + Js(t) + I(t))] = 0$$

Выходной сигнал сети ⇒ средняя частота генерации

$$s(t) = r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(V_p|\eta, t)\, \dot{V}(V_p|\eta, t)\, d\eta$$

Техника редукции

Уравнение непрерывности

$$\partial_t \rho + \partial_V [\rho (V^2 + \eta + Js(t) + I(t))] = 0$$

Подстановка Лоренца

$$\rho(V|\eta, t) = \frac{1}{\pi} \frac{x(\eta, t)}{[V - y(\eta, t)]^2 + x(\eta, t)^2}$$

$$\frac{1}{\pi} x(\eta, t) = r(\eta, t) = \rho(V \to \infty|\eta, t)\dot{V}(V \to \infty|\eta, t)$$ - средняя частота субпопуляции

$$y(\eta, t) = \langle V \rangle(\eta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} V \rho(V|\eta, t) dV$$ - среднее поле субпопуляции

$$w(\eta, t) \equiv x(\eta, t) + iy(\eta, t)$$ - комплексный параметр порядка субпопуляции

Техника редукции

Уравнение непрерывности

$$\partial_t \rho + \partial_V [\rho(V^2 + \eta + Js(t) + I(t))] = 0$$

Подстановка Лоренца

$$\rho(V|\eta,t) = \frac{1}{\pi}\frac{x(\eta,t)}{[V-y(\eta,t)]^2 + x(\eta,t)^2}$$

$$\frac{1}{\pi}x(\eta,t) \;=\; r(\eta,t) = \rho(V\to\infty|\eta,t)\dot{V}(V\to\infty|\eta,t)$$ - средняя частота субпопуляции

$$y(\eta,t) \;=\; \langle V\rangle(\eta,t) = \int_{-\infty}^{\infty} V\rho(V|\eta,t)dV$$ - среднее поле субпопуляции

$$w(\eta,t) \equiv x(\eta,t) + iy(\eta,t)$$ - комплексный параметр порядка субпопуляции

$$\partial_t w(\eta,t) = i[\eta + Jr(t) + I(t) - w(\eta,t)^2]$$

$$r(t) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} w(\eta,t)g(\eta)d\eta$$

Техника редукции

$$\partial_t w(\eta,t) = i[\eta + Jr(t) + I(t) - w(\eta,t)^2]$$

$$r(t) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} w(\eta,t)g(\eta)d\eta$$

Распределение локальных параметров по Лоренцу:

$$g(\eta) = \frac{1}{\pi}\frac{\gamma^2}{\gamma^2 + (\eta-\zeta)^2}$$

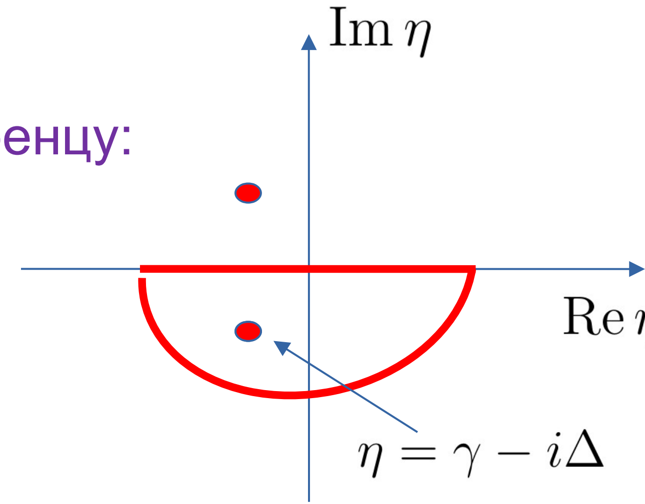
Техника редукции

$$\partial_t w(\eta,t) = i[\eta + Jr(t) + I(t) - w(\eta,t)^2]$$

$$r(t) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} w(\eta,t) g(\eta) d\eta$$

Распределение локальных параметров по Лоренцу:

$$g(\eta) = \frac{1}{\pi}\frac{\gamma^2}{\gamma^2 + (\eta-\zeta)^2}$$



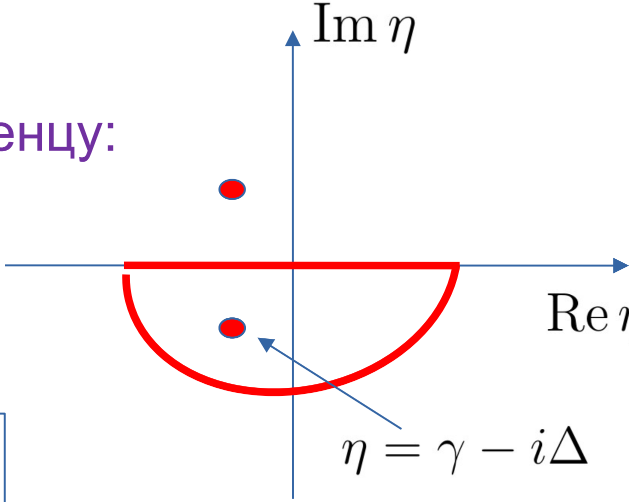
Техника редукции

$$\partial_t w(\eta,t) = i[\eta + Jr(t) + I(t) - w(\eta,t)^2]$$

$$r(t) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} w(\eta,t)g(\eta)d\eta$$

Распределение локальных параметров по Лоренцу:

$$g(\eta) = \frac{1}{\pi}\frac{\gamma^2}{\gamma^2 + (\eta-\zeta)^2}$$



Модель нейронной массы

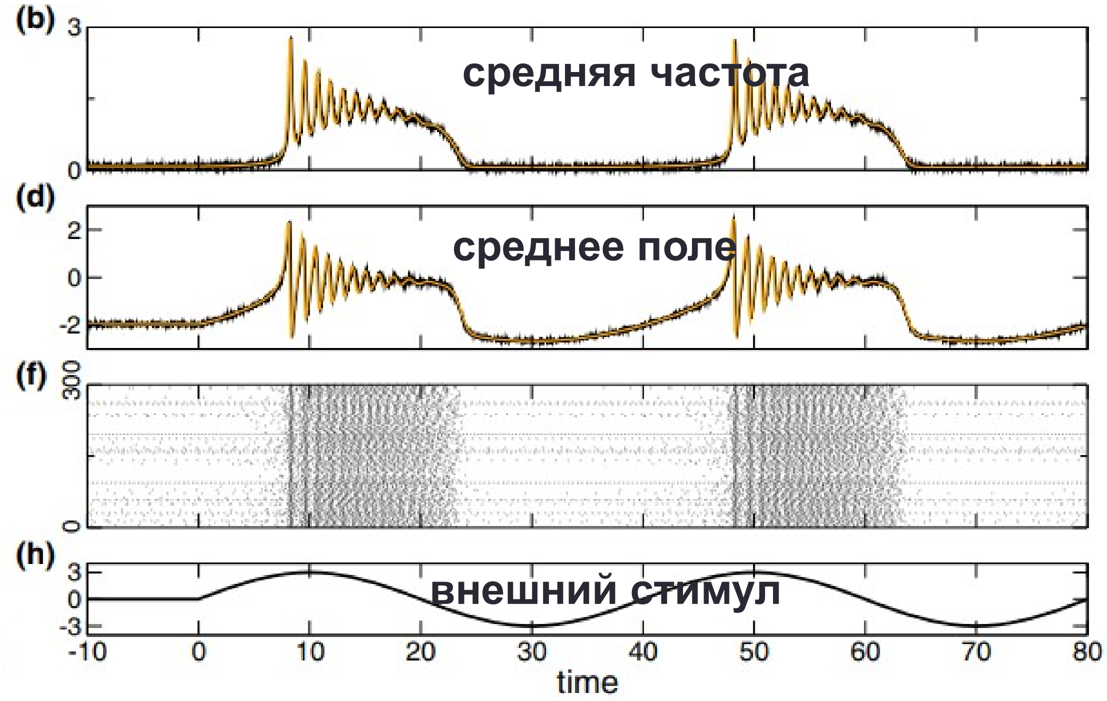
$$\dot r = \Delta/\pi + 2rv$$ - средняя частота

$$\dot v = v^2 + \zeta - \pi^2 r^2 + Jr + I(t)$$ - среднее поле

*Montbrió, Pazó, and Roxin, Phys. Rev. X 2015 (**MPR**)*

Динамика модели нейронной массы

*Montbrió, Pazó, and Roxin, Phys. Rev. X 2015 (**MPR**)*



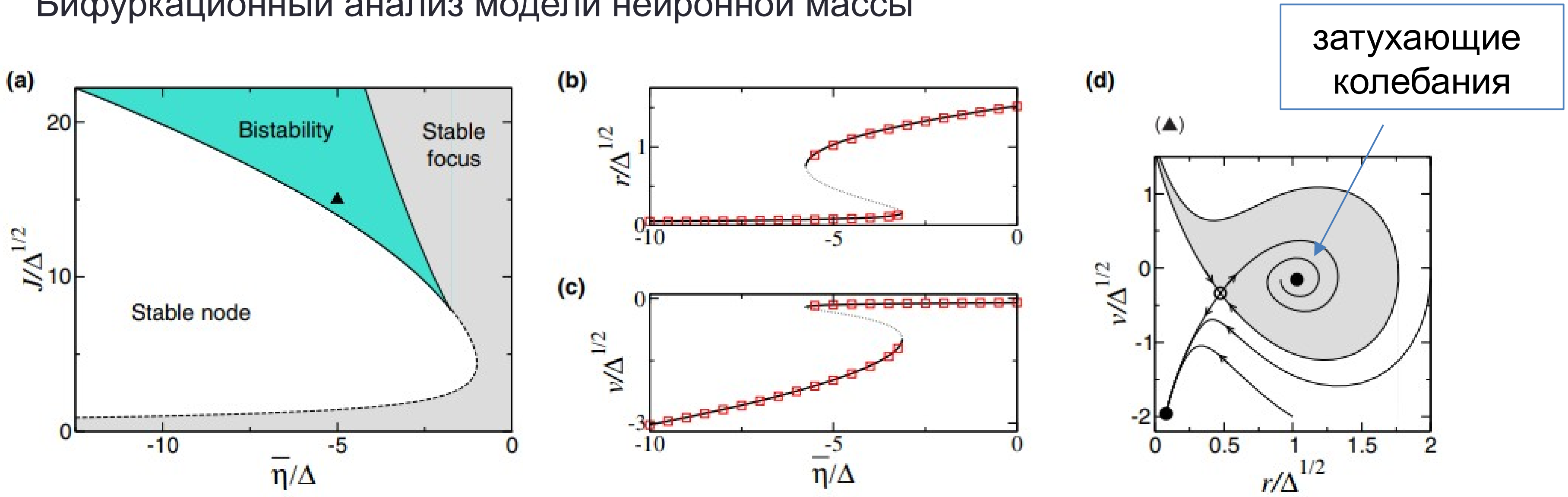
Динамика модели нейронной массы

*Montbrió, Pazó, and Roxin, Phys. Rev. X 2015 (**MPR**)*

$$\dot{r} = \Delta/\pi + 2rv$$

$$\dot{v} = v^2 + \zeta - \pi^2 r^2 + Jr + I(t)$$

Бифуркационный анализ модели нейронной массы



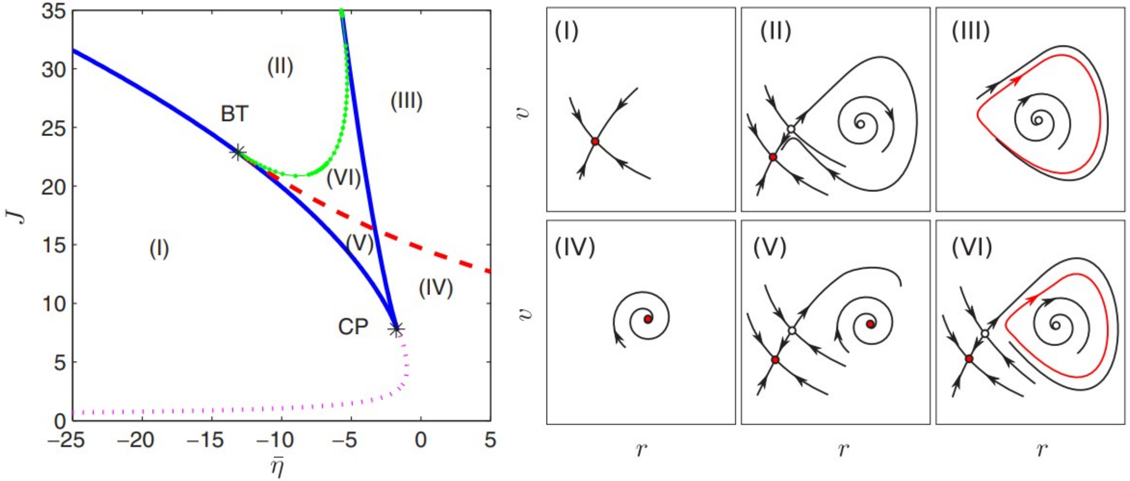
Учет конечной длительности спайков

Ratas and Pyragas, Physical Review E 2016

$$\dot{r} = 1/\pi + 2rv$$

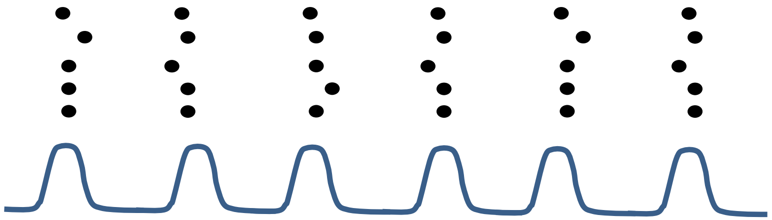
$$\dot{v} = \bar{\eta} + v^2 - \pi^2 r^2 + J V_{\text{th}} S(t)$$

$$S(t) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2} - \arctan\left[\frac{V_{\text{th}} - v(t)}{\pi r(t)}\right]\right\}$$

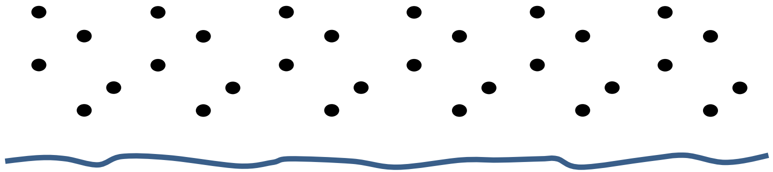


Связь колебаний частоты и синхронизации внутри популяции

Синхронизация есть



Синхронизации нет

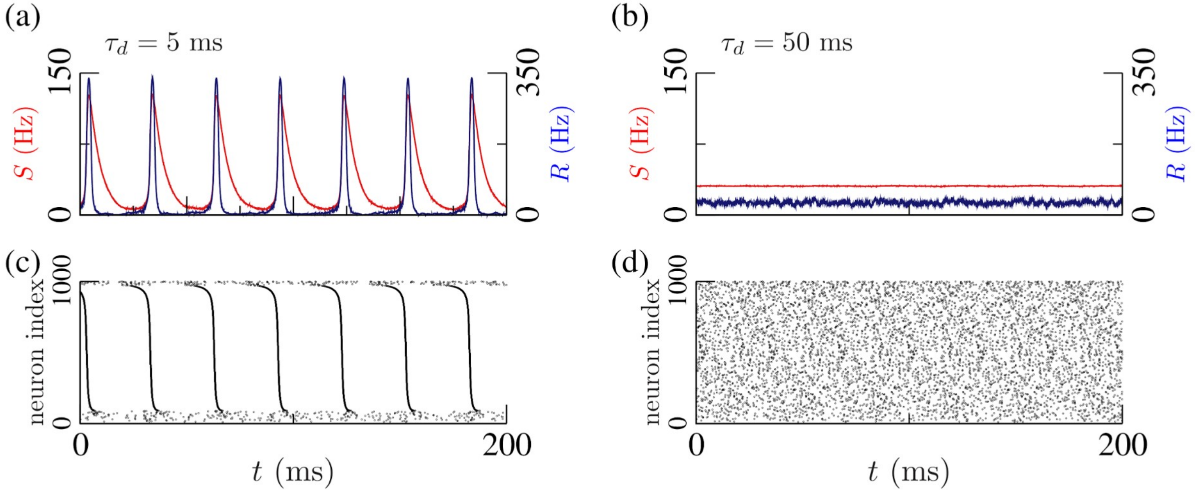


Колебания на макроуровне = **синхронизация** на микроуровне

Учет медленной кинетики синапсов

Devalle et al, PLOS Comput Biol 2017

$$\tau_m \dot{R} = \frac{\Delta}{\pi \tau_m} + 2RV,$$
$$\tau_m \dot{V} = V^2 - (\pi \tau_m R)^2 - J\tau_m S + \Theta,$$
$$\tau_d \dot{S} = -S + R.$$



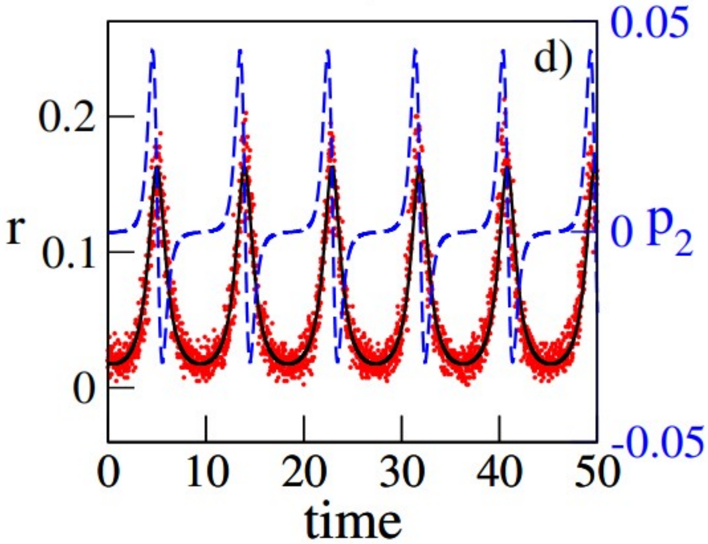
Учет шумового воздействия

Goldobin, Di Volo, Torcini, Physical Review Letters 2021

$$\dot{V}_j = V_j^2 + I_0 + \eta_j + J_j s(t) + \sigma_j \xi_j(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{r} = (\Delta_\eta + \Delta_J r + p_2)/\pi + 2rv \quad ,$$
$$\dot{v} = I_0 + \eta_0 + J_0 r - \pi^2 r^2 + v^2 + q_2 \quad ,$$
$$\dot{q}_2 = 2\mathcal{N}_R + 4(p_3 + q_2 v - \pi p_2 r) \quad ,$$
$$\dot{p}_2 = 2\mathcal{N}_I + 4(-q_3 + \pi q_2 r + p_2 v) \quad .$$



Учет формы неоднородности

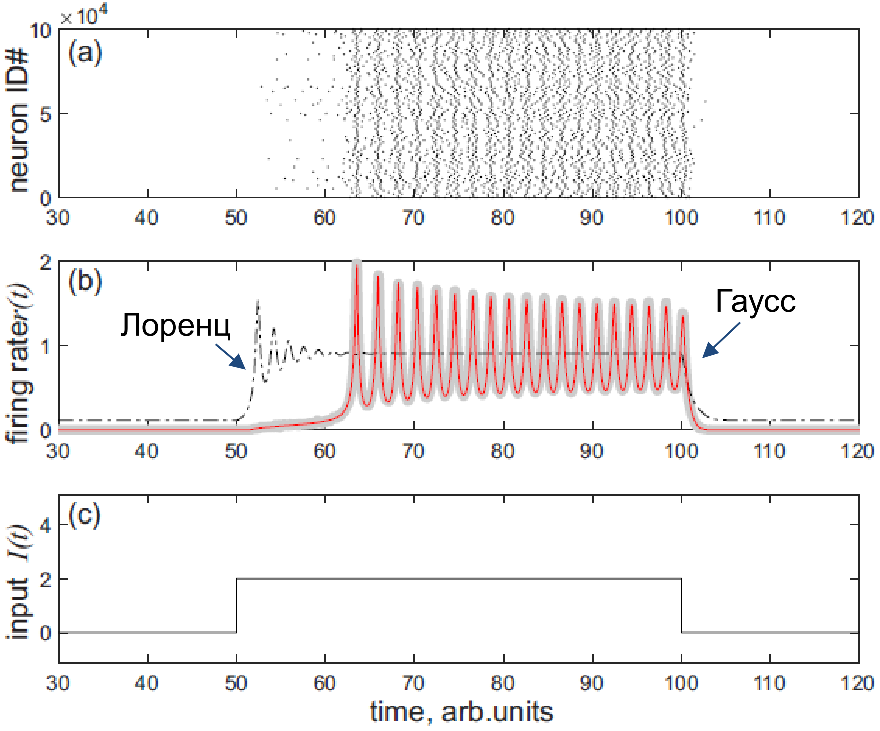
Klinshov, Kirillov and Nekorkin, Physical Review E 2021

$g(\eta)$ - распределение возбудимости внутри популяции

Модель нейронной массы для Гауссова распределения:

$$\dot{w}_k = i\left[\eta_k + Jr - w_k^2 + I(t)\right], \quad k = 1, \ldots, n.$$

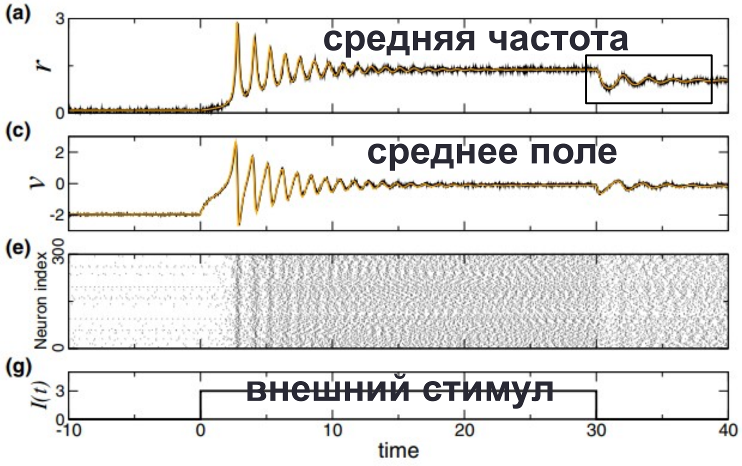
$$r = \gamma_n 2^n \sigma_n^{2n+1} n! \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re}\left(i \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{(\eta_k - \bar{\eta})^{2n+1}}\right).$$



Учет эффектов конечного размера

$$\dot{V}_j = V_j^2 + \eta_j + Js(t) + I(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{r} &= \Delta/\pi + 2rv \\ \dot{v} &= v^2 + \zeta - \pi^2 r^2 + Jr + I(t) \end{aligned}}$$

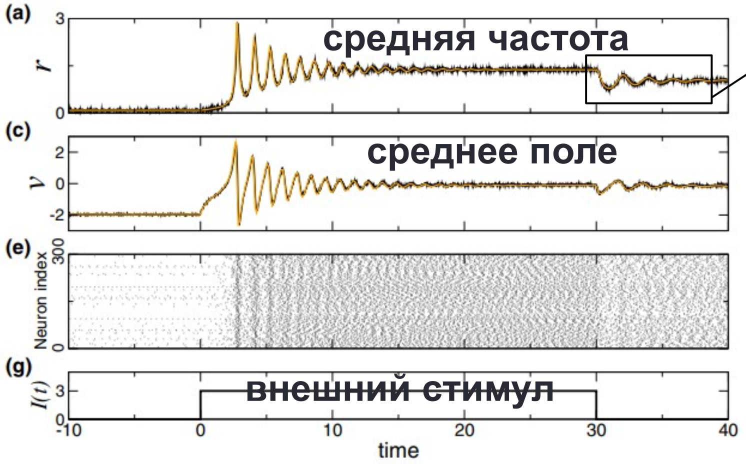


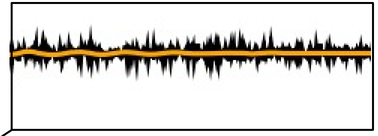
Учет эффектов конечного размера

$$\dot{V}_j = V_j^2 + \eta_j + Js(t) + I(t)$$

$$\dot{r} = \Delta/\pi + 2rv$$

$$\dot{v} = v^2 + \zeta - \pi^2 r^2 + Jr + I(t)$$

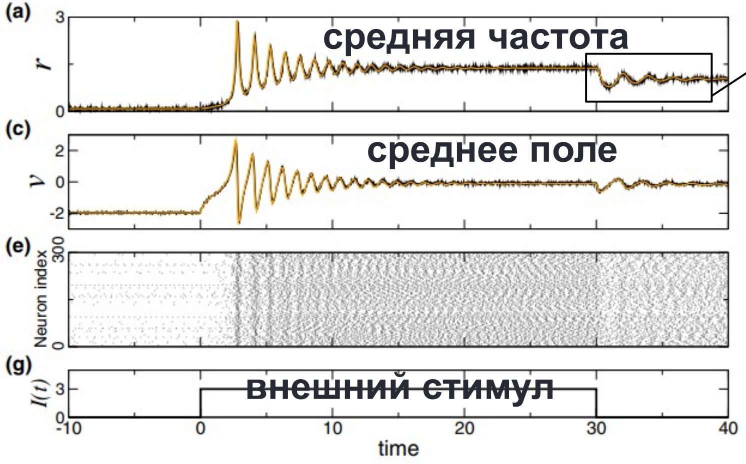


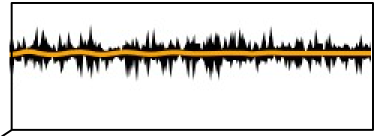


Учет эффектов конечного размера

$$\dot{V}_j = V_j^2 + \eta_j + Js(t) + I(t)$$

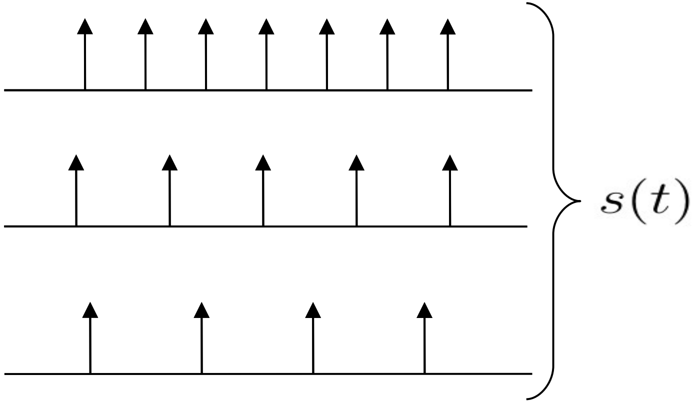
$$\boxed{\begin{aligned} \dot{r} &= \Delta/\pi + 2rv \\ \dot{v} &= v^2 + \zeta - \pi^2 r^2 + Jr + I(t) \end{aligned}}$$





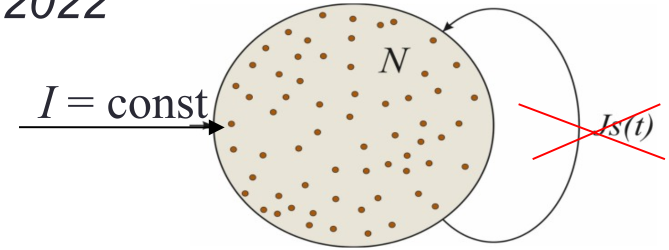
“дробовой шум”

$$s(t) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k}\delta(t - t_j^k)$$



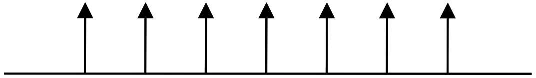
Учет эффектов конечного размера

Klinshov and Kirillov, Physical Review E 2022



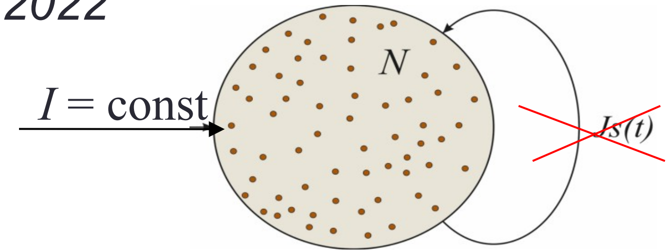
Сигнал на выходе одного нейрона:

$$s_j(t) = \nu_j \text{Ш}(\nu_j t - \theta_j)$$



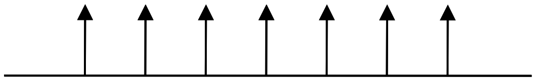
Учет эффектов конечного размера

Klinshov and Kirillov, Physical Review E 2022



Сигнал на выходе одного нейрона:

$$s_j(t) = \nu_j \text{Ш}(\nu_j t - \theta_j)$$



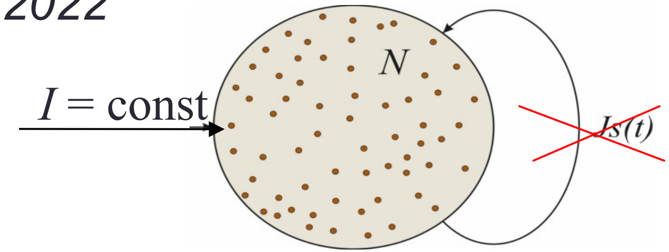
Сигнал на выходе полной сети:

$$s(t) = \langle s_j(t) \rangle = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} s_j(t) = r + \frac{1}{\sqrt{N}}\chi_0(t)$$

свободный дробовой шум

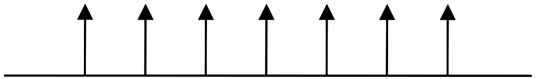
Учет эффектов конечного размера

Klinshov and Kirillov, Physical Review E 2022



Сигнал на выходе одного нейрона:

$$s_j(t) = \nu_j \text{Ш}(\nu_j t - \theta_j)$$



Сигнал на выходе полной сети:

$$s(t) = \langle s_j(t) \rangle = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} s_j(t) = r + \frac{1}{\sqrt{N}}\chi_0(t)$$

свободный дробовой шум

Спектр мощности свободного дробового шума:

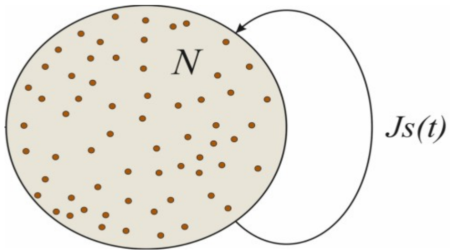
$$\boxed{W_0(\nu) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\nu^2}{q^3}\, g\left(\frac{\nu}{q}\right)}$$

Учет эффектов конечного размера

Klinshov and Kirillov, Physical Review E 2022

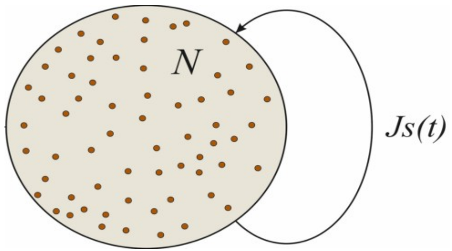
Модель нейронной массы MPR

$$\dot{r} = \Delta/\pi + 2rv$$
$$\dot{v} = v^2 + \zeta - \pi^2 r^2 + Jr$$



Учет эффектов конечного размера

Klinshov and Kirillov, Physical Review E 2022



Модель нейронной массы MPR

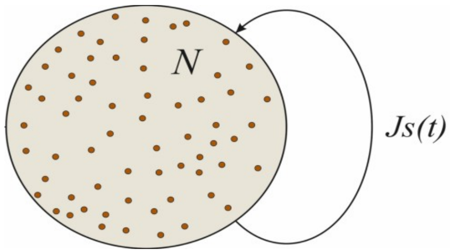
$$\dot r = \Delta/\pi + 2rv$$
$$\dot v = v^2 + \zeta - \pi^2 r^2 + \cancel{Jr} \quad Js$$

\+ дробовой шум

$$s(t) = r + \frac{1}{\sqrt{N}}\chi_0(t)$$

Учет эффектов конечного размера

Klinshov and Kirillov, Physical Review E 2022



Модель нейронной массы MPR

$$\dot r = \Delta/\pi + 2rv$$
$$\dot v = v^2 + \zeta - \pi^2 r^2 + \overset{Js}{\cancel{Jr}}$$

+ дробовой шум

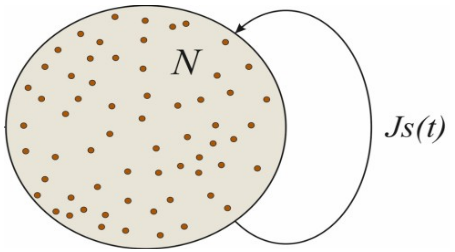
$$s(t) = r + \frac{1}{\sqrt{N}}\chi_0(t)$$

Стохастическая модель нейронной массы для популяции **конечного размера**:

$$\dot r = \Delta/\pi + 2rv,$$
$$\dot v = v^2 + \zeta - \pi^2 r^2 + Jr + \frac{J}{\sqrt{N}}\chi_0(t)$$

Учет эффектов конечного размера

Klinshov and Kirillov, Physical Review E 2022



Модель нейронной массы MPR

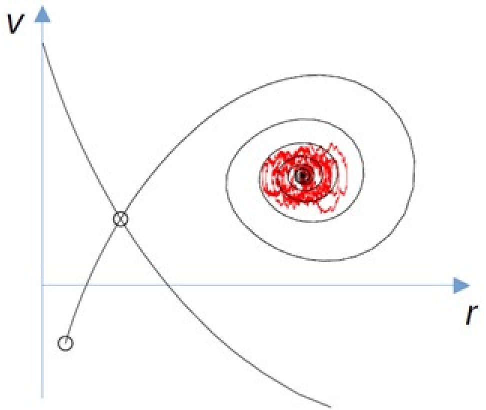
$$\dot r = \Delta/\pi + 2rv$$
$$\dot v = v^2 + \zeta - \pi^2 r^2 + \overset{Js}{\cancel{Jr}}$$

+ дробовой шум

$$s(t) = r + \frac{1}{\sqrt{N}}\chi_0(t)$$

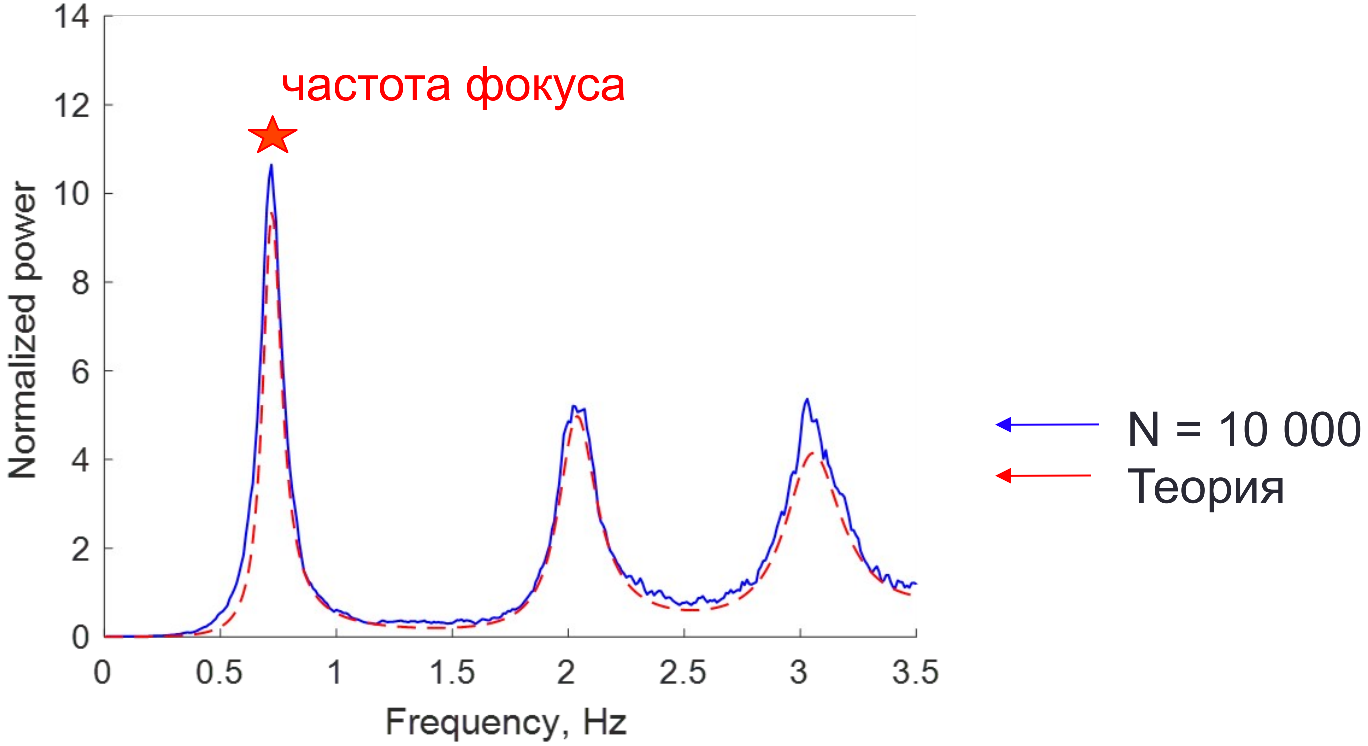
Стохастическая модель нейронной массы для популяции **конечного размера**:

$$\dot r = \Delta/\pi + 2rv,$$
$$\dot v = v^2 + \zeta - \pi^2 r^2 + Jr + \frac{J}{\sqrt{N}}\chi_0(t)$$



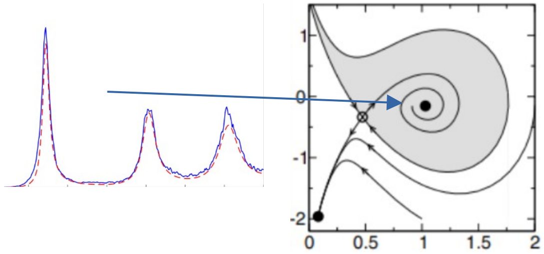
Спектр дробового шума

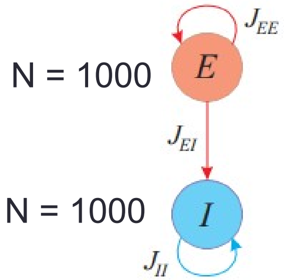
Klinshov and Kirillov, Physical Review E 2022

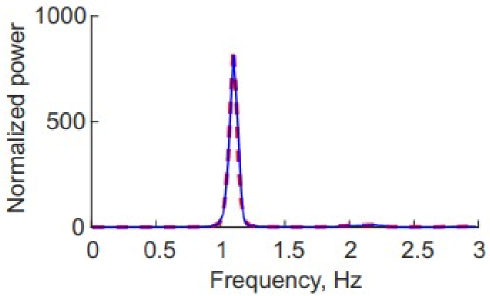


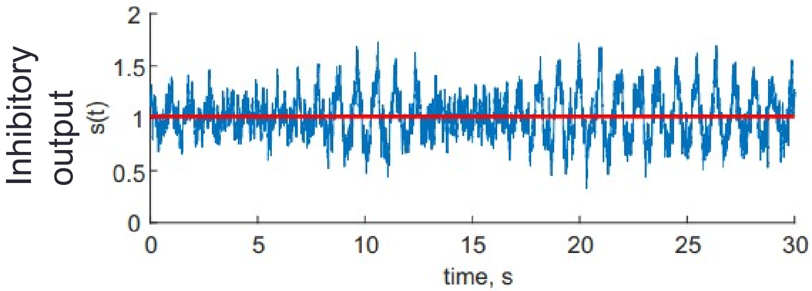
Резонансные эффекты дробового шума

Klinshov and Kirillov, Physical Review E 2022



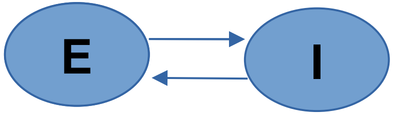




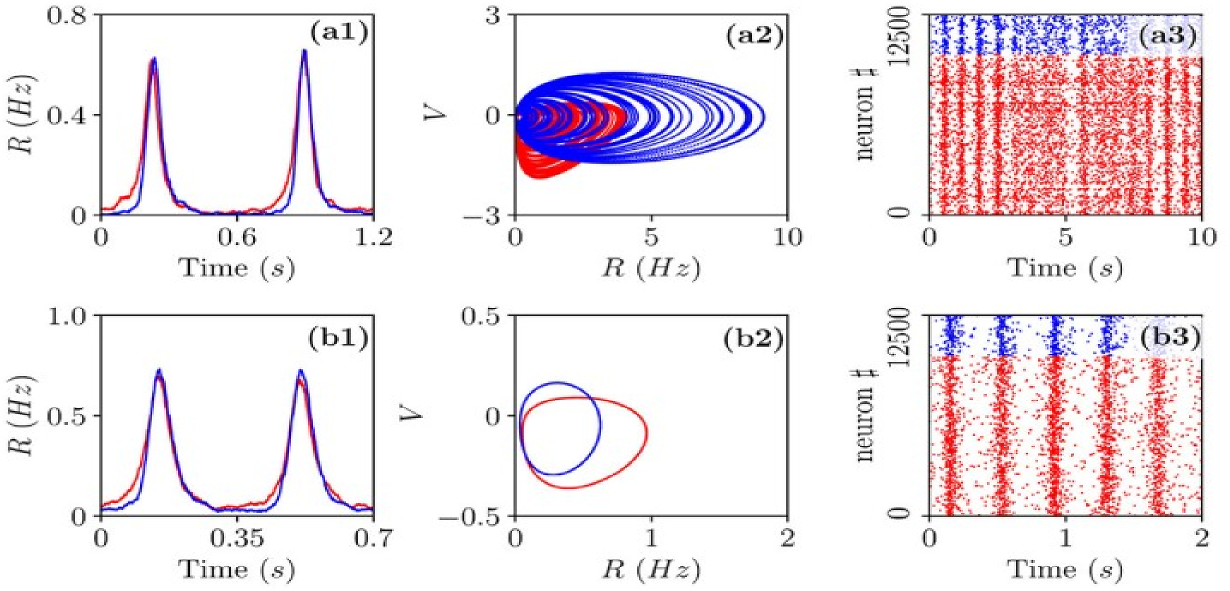


Моделирование двух популяций

Bi et al, Frontiers in Systems Neuroscience 2021

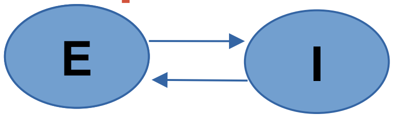


«Сбалансированная» динамика

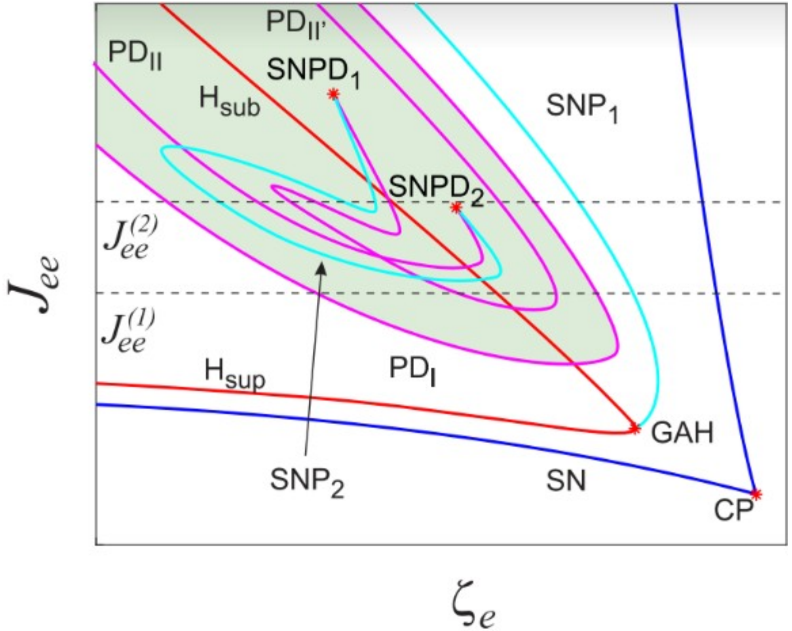


Моделирование двух популяций

Kirillov, Smelov and Klinshov, Chaos 2024

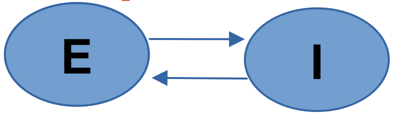


Бифуркационный анализ

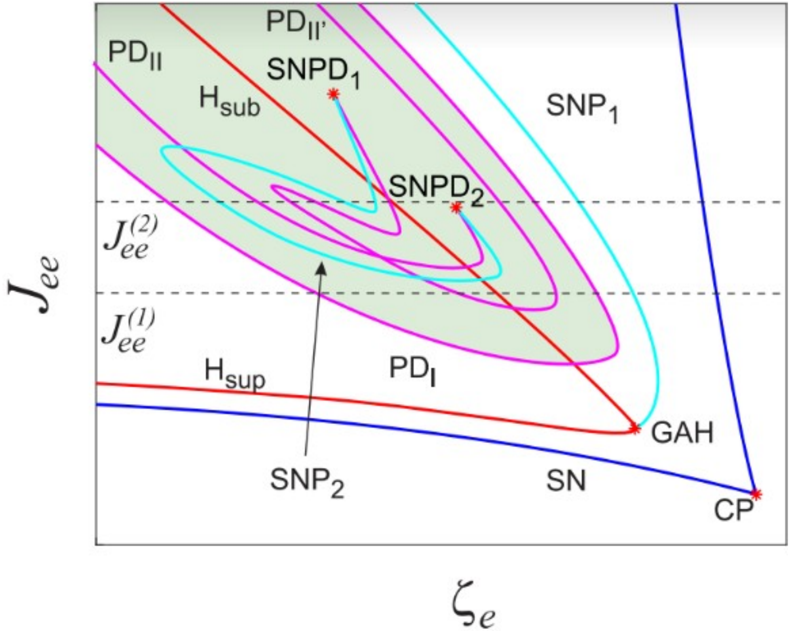


Моделирование двух популяций

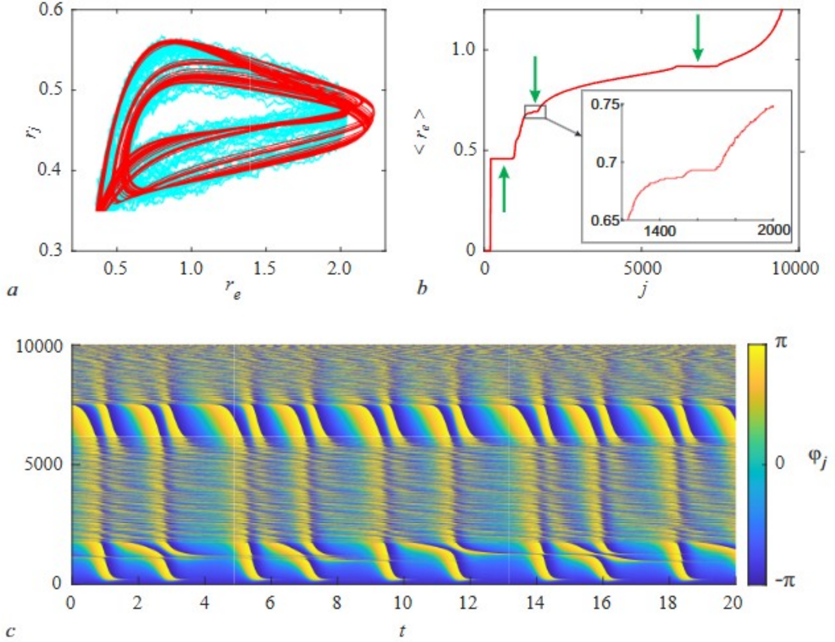
Kirillov, Smelov and Klinshov, Chaos 2024



Бифуркационный анализ



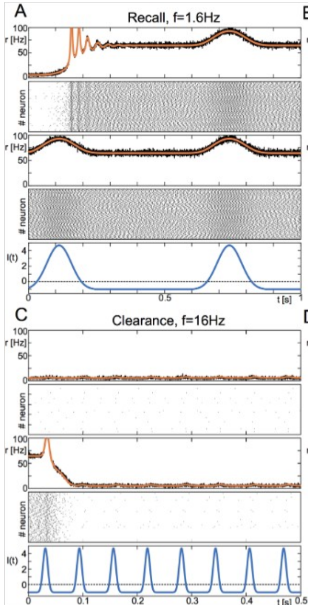
Хаотическая синхронизация

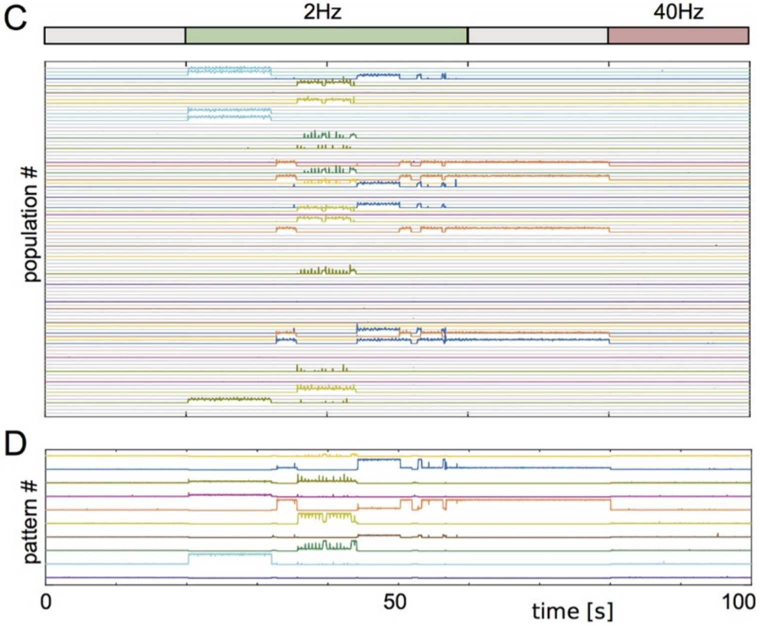


Моделирование нескольких популяций

Schmidt et al, PLOS Comput Biol 2018

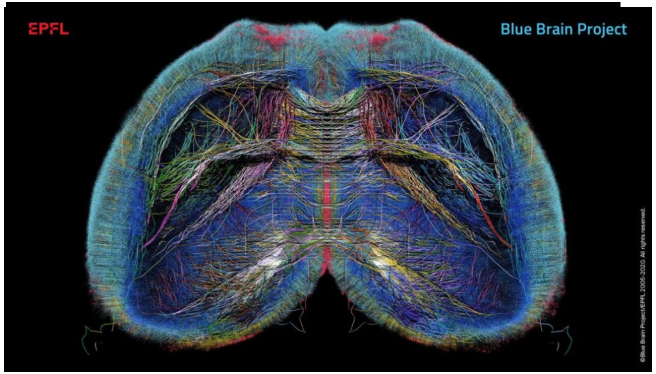
Рабочая память





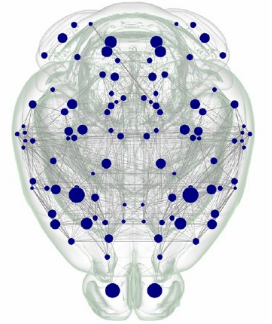
Моделирование целого мозга (whole brain modelling)

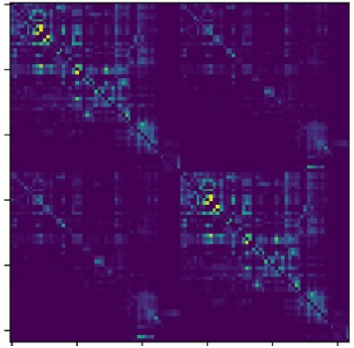
Микроскопическое описание
(сеть нейронов)



https://www.epfl.ch/research/domains/bluebrain/gallery/

Мезоскопическое описание
(набор популяций)

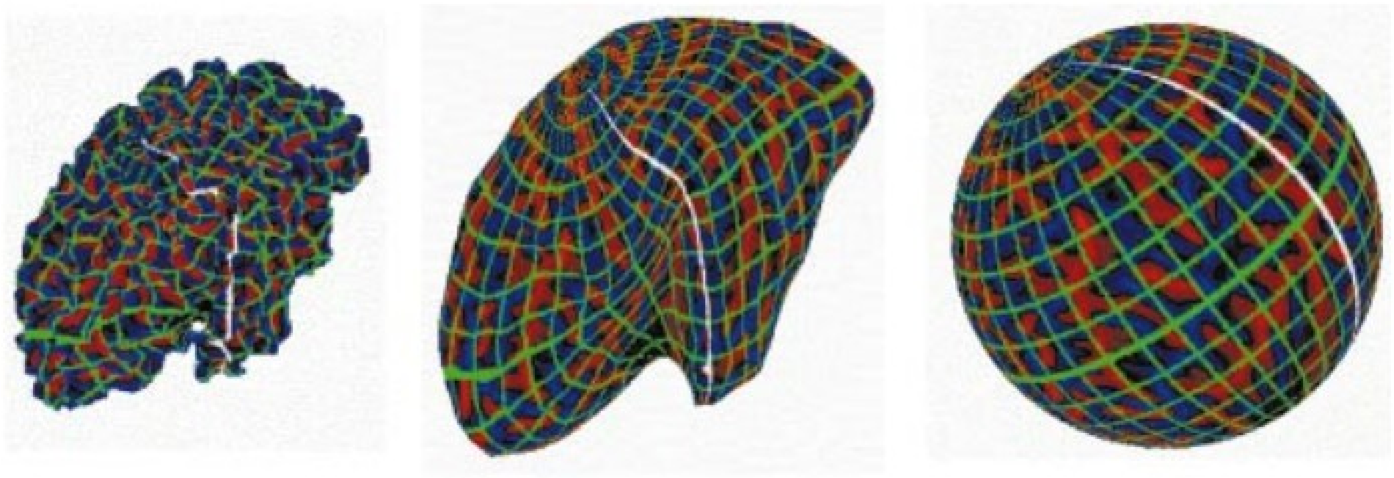




Rabuffo et al, eNeuro 2021

Моделирование целого мозга (whole brain modelling)

Ранние подходы: от нейронных масс к нейронным полям

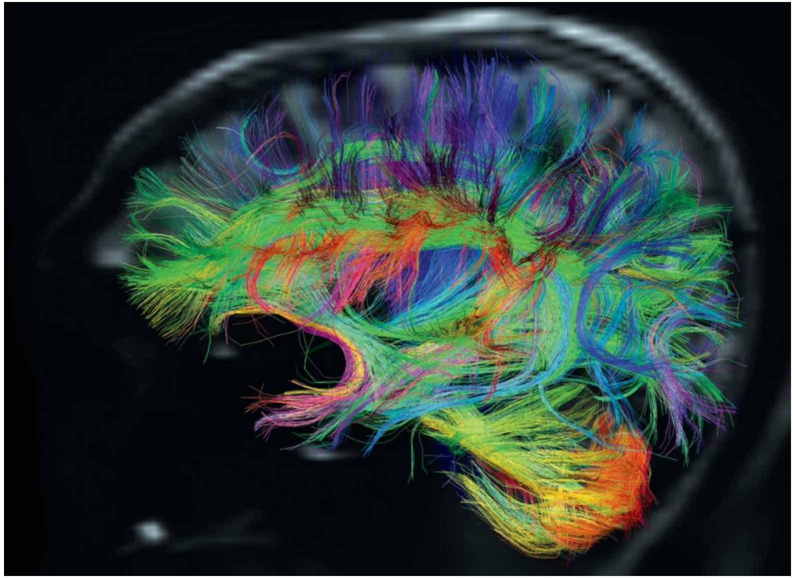


Jirsa et al, IEEE Trans. Med. Imag. 2002

Моделирование целого мозга (whole brain modelling)

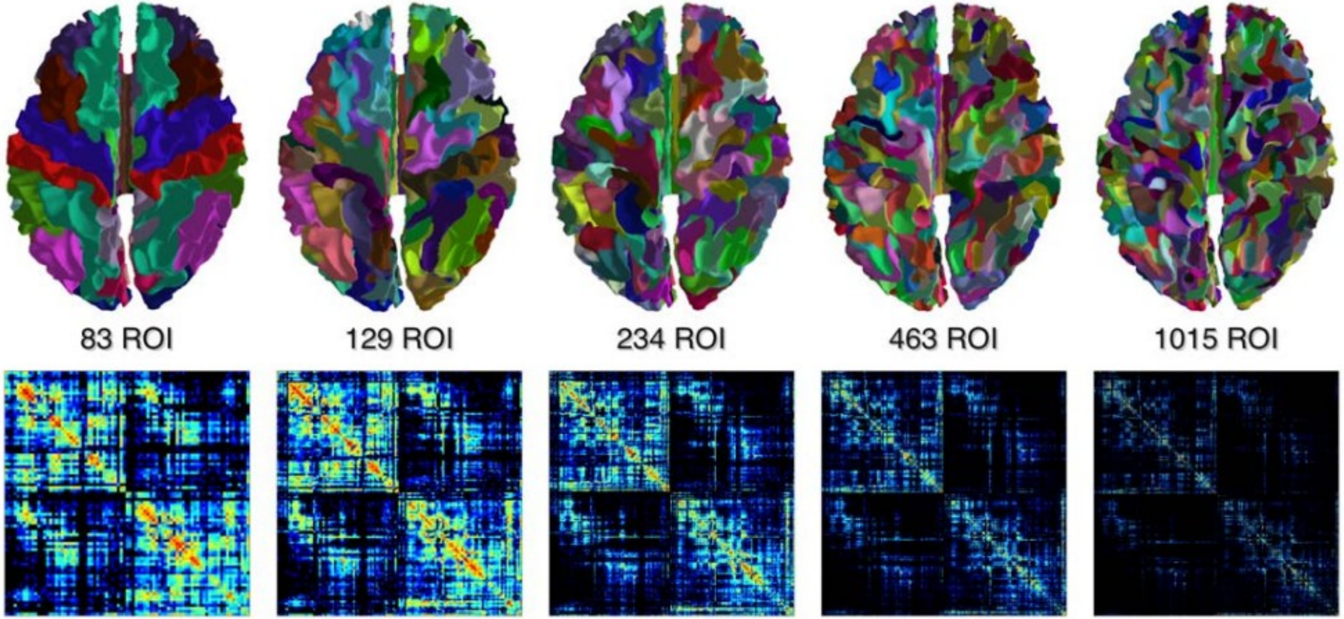
Коннектомика
(Sporns, Tononi, Kötter, 2005; Hangmann 2005)

Трактография
(диффузионная МРТ)



Bardin, Nature 2012

Моделирование целого мозга (whole brain modelling)



Daducci et al, PLOS One 2012

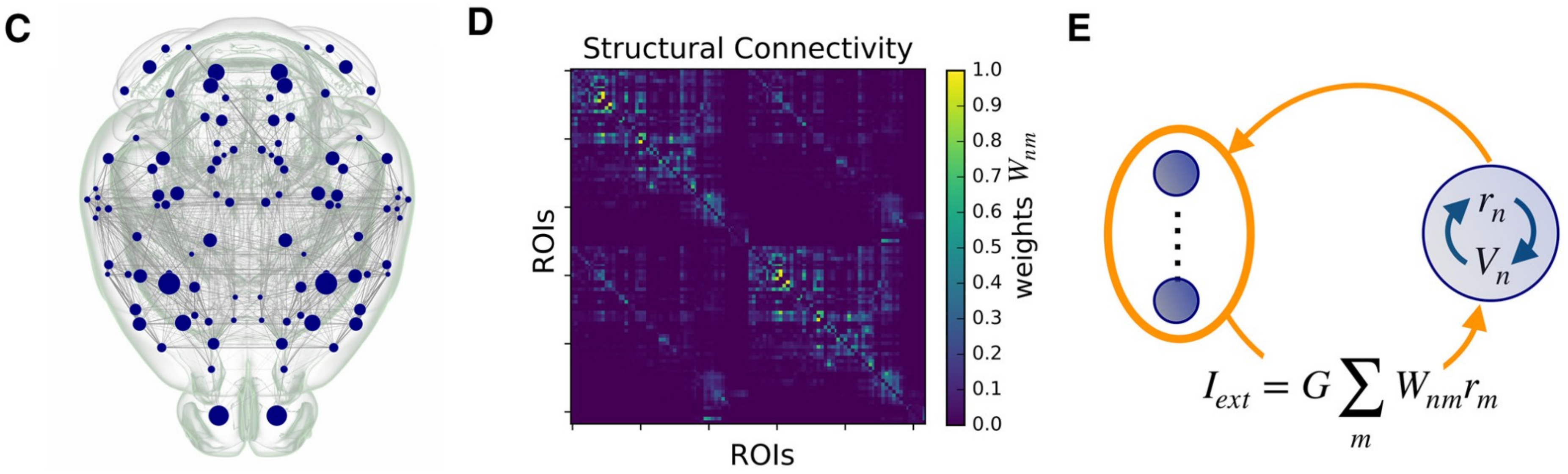
Моделирование целого мозга (whole brain modelling)

Paula Sanz Leon, Stuart A. Knock, M. Marmaduke Woodman, Lia Domide, Jochen Mersmann, Anthony R. McIntosh, and **Viktor Jirsa.** "The Virtual Brain: a simulator of primate brain network dynamics." *Frontiers in neuroinformatics* 7 (2013): 10.

500+ цитирований

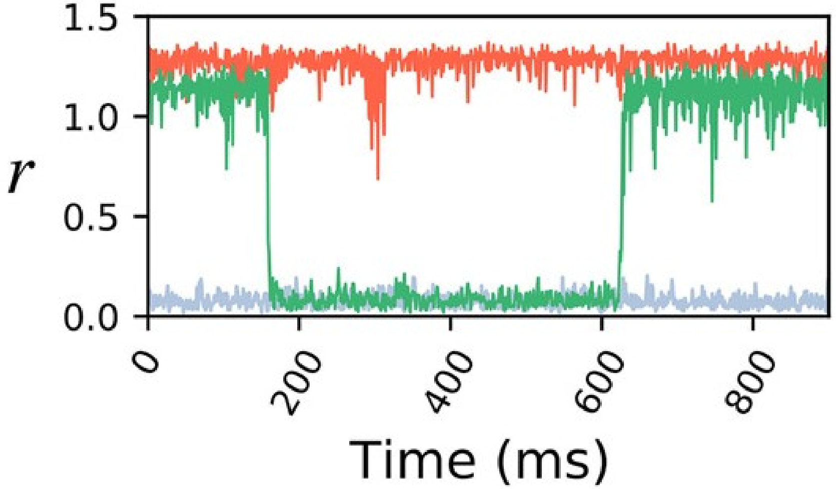
Мозг в состоянии покоя: нейронные каскады

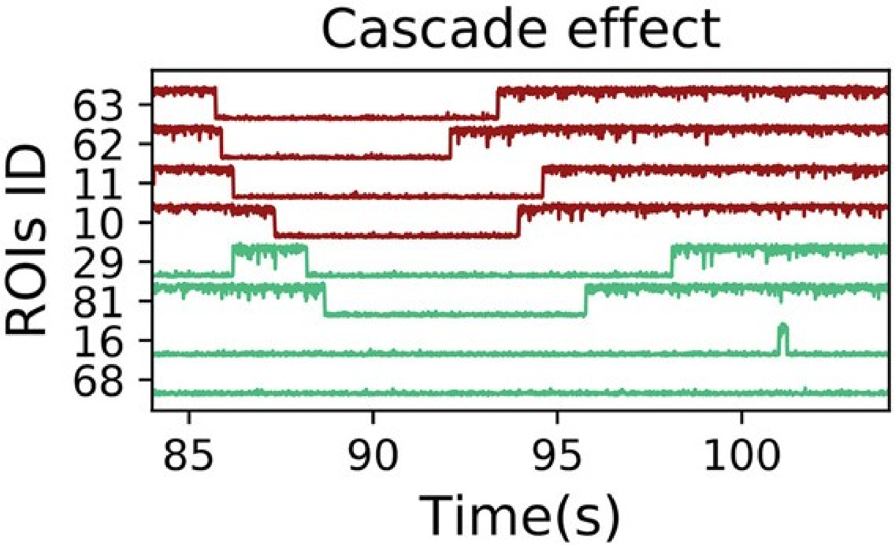
*Rabuffo, Fousek, Bernard and **Viktor Jirsa**, eNeuro 2021*



Мозг в состоянии покоя: нейронные каскады

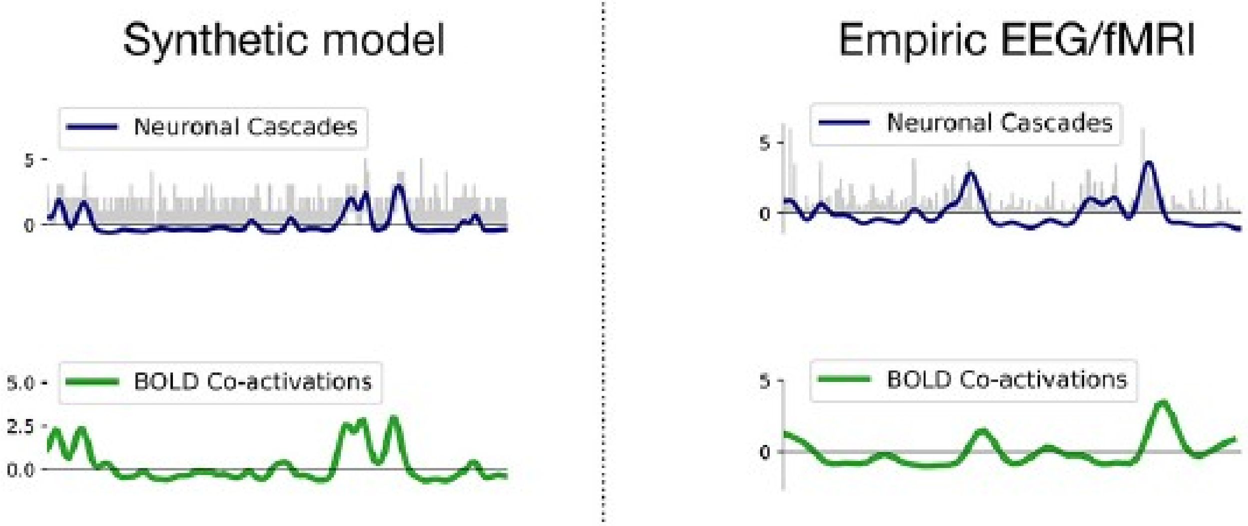
*Rabuffo, Fousek, Bernard and **Viktor Jirsa**, eNeuro 2021*





Мозг в состоянии покоя: нейронные каскады

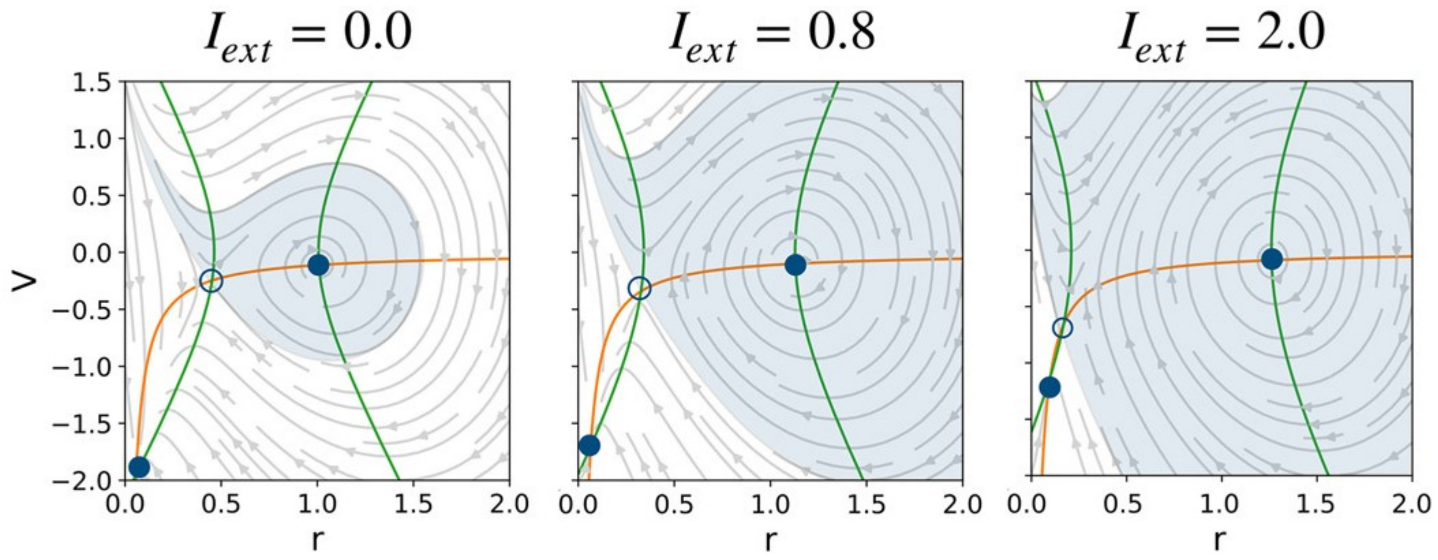
*Rabuffo, Fousek, Bernard and **Viktor Jirsa**, eNeuro 2021*



Медленные флуктуации активности (~ 1 - 10 с)

Мозг в состоянии покоя: нейронные каскады

*Rabuffo, Fousek, Bernard and **Viktor Jirsa**, eNeuro 2021*



Модели нейронных масс

Основная идея:
От отдельных нейронов - к популяциям нейронов (до 10^8 нейронов)

Применение:
Моделирование больших нейронных сетей и мозга в целом

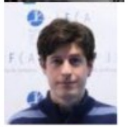
Преимущества “нового поколения”:
Выводятся из микроскопической динамики
Допускают модификацию и обобщение
Учитывают синхронизацию внутри популяции

Кто занимается моделями нейронных масс нового поколения

В.И. Некоркин
Нижний Новгород

С.Ю. Кириллов
Нижний Новгород

Ernest Montbrió
Barcelona



Diego Pazó
Santander

Alex Roxin
Barcelona

Alessandro Torcini
Florence

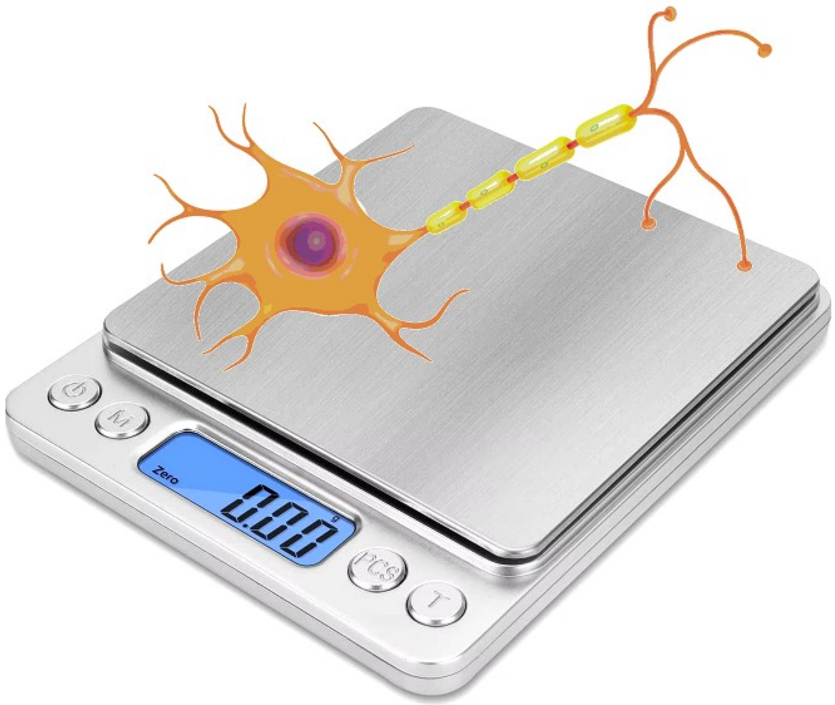
Kestutis Pyragas
Vilnius

Carlo Laing
Auckland

Steven Coombes
Nottingham

Denis Goldobin
Perm

Спасибо за внимание!



Обоснованность подстановки Лоренца

Сеть нейронов «накопление и сброс»

$$\dot{V}_j = V_j^2 + \eta_j + Js(t) + I(t) \quad \Rightarrow \quad V_j = \tan(\theta_j/2)$$

Сеть «тета-нейронов»

$$\dot{\theta}_j = (1-\cos\theta_j) + (1+\cos\theta_j)[\eta_j + Js(t) + I(t)]$$

Подстановка Отта-Антонсена: *Ott and Antonsen, Chaos 2008, 2009*

$$\partial_t \theta(\eta, t) = \Omega(\eta, t) + \mathrm{Im}[H(\eta, t)e^{-i\theta}]$$

$$\tilde{\rho}(\theta|\eta, t) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\left[\frac{1+\alpha(\eta, t)e^{i\theta}}{1-\alpha(\eta, t)e^{i\theta}}\right] \qquad \alpha(\eta, t) = \frac{1-w(\eta, t)}{1+w(\eta, t)}$$