Асимптотическая теория солитонов для неинтегрируемых уравнений

А. М. Камчатнов

Институт спектроскопии РАН
Сколковский институт науки и технологии

XXI Научная школа «Нелинейные волны – 2024»
Нижний Новгород, 5–11 ноября 2024 г.

Содержание

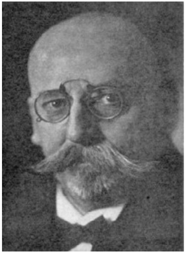
- Асимптотическая интегрируемость
- Обобщённое правило квантования Бора-Зоммерфельда
- Гамильтонова динамика солитонов

Солитоны

Ж. Буссинеск 1842–1929

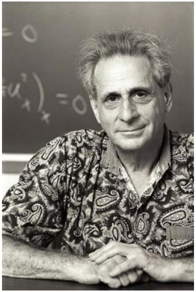
лорд Рэлей 1842–1919

Д. Кортевег 1848–1941



Г. де Фриз 1866–1934

Классики объяснили нам, что появление уединённых волн (солитонов) обусловлено конкуренцией двух физических эффектов — нелинейности, вызывающей укручение фронта интенсивной волны, и дисперсии, вызывающей расплывание волновых пакетов. Эти эффекты имеют общий характер.



М. Крускал
1925–2006

П. Лакс
1926

В. Е. Захаров
1939–2023

В современную эпоху был выделен и изучен особый класс «полностью интегрируемых» нелинейных волновых уравнений.

Обобщённое нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ)

Обобщённое НУШ (уравнение Гросса-Питаевского)

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} - f(|\psi|^2)\psi = 0,$$

записанное в безразмерных переменных, подстановкой

$$\psi = \sqrt{\rho}\exp\left(i\int^x u(x',t)dx'\right)$$

преобразуется к системе

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0,$$
$$u_t + uu_x + \frac{c^2}{\rho}\rho_x + \left(\frac{\rho_x^2}{8\rho^2} - \frac{\rho_{xx}}{4\rho}\right)_x = 0,$$

где

$$c^2 = \rho f'(\rho) = \frac{dp}{d\rho}.$$

Линеаризация системы относительно состояния с однородной плотностью ρ и постоянной скоростью течения u даёт закон дисперсии Боголюбова

$$\omega_{\pm} = k\left(u \pm \sqrt{c^2 + \frac{k^2}{4}}\right)$$

для линейных гармонических волн $\propto \exp[i(kx - \omega t)]$.
В бездисперсионном пределе мы получаем стандартные уравнения газовой динамики:

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad u_t + uu_x + \frac{c^2}{\rho}\rho_x = 0.$$

В общем случае получаем уравнение для профиля плотности волны, распространяющейся с скоростью V, $(\xi = x - Vt)$:

$$\rho_\xi^2 = 2\rho \int_\rho^{\rho_0} [f(\rho_0) - f(\rho)] d\rho - V^2(\rho_0 - \rho)^2.$$

Это уравнение интегрируется «в квадратурах» при любой функции $f(\rho)$ и даёт, в частности, солитонные решения.

Таким образом, существование солитонных решений никак не выделяет особого класса полностью интегрируемых уравнений. Система гидродинамических уравнений с двумя переменными ρ, u всегда может быть преобразована к диагональной римановой форме переходом к «римановым инвариантам» $r_\pm = r_\pm(\rho, u)$

$$\begin{gathered}\frac{\partial r_+}{\partial t} + v_+ \frac{\partial r_+}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial r_-}{\partial t} + v_- \frac{\partial r_-}{\partial x} = 0 \\ \omega_\pm = \omega_\pm(k, r_+, r_-), \qquad v_\pm = \lim_{k \to 0} \frac{\omega_\pm(k, r_+, r_-)}{k}.\end{gathered} \tag{1}$$

В частности, уравнения газовой динамики

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad u_t + u u_x + \frac{c^2}{\rho} \rho_x = 0$$

приобретают такую форму для римановых инвариантов

$$r_+ = \frac{u}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\rho \frac{c(\rho) d\rho}{\rho}, \quad r_- = \frac{u}{2} - \frac{1}{2} \int_0^\rho \frac{c(\rho) d\rho}{\rho}, \quad v_\pm = u \pm c.$$

Уравнения (1) задают динамику крупномасштабных волн.

Тогда, если длина волны $\sim 2\pi/k$ линейных волн много меньше характерного размера ℓ, на котором существенно изменяется крупномасштабная фоновая волна, то из таких волн можно составить волновой пакет также малого размера Δ $(2\pi/k \ll \Delta \ll \ell)$, с точностью $\sim \Delta$ определить координату пакета $x(t)$ и с точностью $\sim \Delta^{-1}$ волновое число k несущей волны. Согласно оптико-механической аналогии, они подчиняются уравнениям Гамильтона

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial k}, \quad \frac{dk}{dt} = -\frac{\partial\omega}{\partial x},$$

где $\omega(k, r_+, r_-)$ зависит от x через решения $r_+ = r_+(x,t)$, $r_- = r_-(x,t)$ гидродинамических уравнений. Таким образом, мы приходим к объединённой системе

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial r_+}{\partial t} + v_+ \frac{\partial r_+}{\partial x} = 0, \quad &&\frac{\partial r_-}{\partial t} + v_- \frac{\partial r_-}{\partial x} = 0,\\
&\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial k}, &&\frac{dk}{dt} = -\frac{\partial\omega}{\partial x},
\end{aligned}$$

определяющей движение пакета по неоднородному и зависящему от времени фону крупномасштабной волны.

Асимптотическая интегрируемость

Мы хотим, чтобы объединённая система

$$\frac{\partial r_+}{\partial t} + v_+ \frac{\partial r_+}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r_-}{\partial t} + v_- \frac{\partial r_-}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial k}, \quad \frac{dk}{dt} = -\frac{\partial \omega}{\partial x}$$

могла быть проинтегрирована в квадратурах. Это означает, что должен существовать интеграл

$$\Phi(k, r_+, r_-) = \mathrm{const} \quad \text{или} \quad k = k(r_+, r_-, q)$$

уравнений Гамильтона для любых решений $r_+ = r_+(x, t)$, $r_- = r_-(x, t)$ гидродинамических уравнений.

Это и есть условие асимптотической интегрируемости.

Простые волны фонового течения

Если фоновое течение является простой волной, то один из римановых инвариантов постоянен. Пусть $r_- = \mathrm{const}$. В этом случае условие асимптотической интегрируемости упрощается:

$$\frac{\partial r_+}{\partial t} + v_+ \frac{\partial r_+}{\partial x} = 0, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial k}, \qquad \frac{dk}{dt} = -\frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

Если $k = k(r_+, q)$ — интеграл уравнений Гамильтона, то

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{\partial \omega}{\partial r_+}\frac{\partial r_+}{\partial x}, \qquad \frac{dr_+}{dt} = \frac{\partial r_+}{\partial t} + \frac{\partial r_+}{\partial x}\frac{dx}{dt} = -\left(v_+ - \frac{\partial \omega}{\partial k}\right)\frac{\partial r_+}{\partial x},$$

откуда

$$\frac{dk}{dr_+} = \frac{\partial \omega / \partial r_+}{v_+ - v_g}, \tag{2}$$

где $v_g = \partial \omega / \partial k$. Уравнение (2) всегда имеет решение: распространение пакетов по простым волнам является асимптотически интегрируемой задачей.

G. A. El, Chaos, **15,** 037103 (2005)
A. M. Kamchatnov, Chaos, **30,** 123148 (2020)

Фоновое течение общего вида

Объединённая система

$$\frac{\partial r_+}{\partial t} + v_+ \frac{\partial r_+}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r_-}{\partial t} + v_- \frac{\partial r_-}{\partial x} = 0$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial k}, \quad \frac{dk}{dt} = -\frac{\partial \omega}{\partial x}$$

имеет интеграл $k = k(r_+, r_-, q)$, если удовлетворяются уравнения

$$\frac{\partial k}{\partial r_+} = \frac{\partial \omega / \partial r_+}{v_+ - v_g}, \qquad \frac{\partial k}{\partial r_-} = \frac{\partial \omega / \partial r_-}{v_- - v_g},$$

причём

$$\frac{\partial}{\partial r_-}\left(\frac{\partial k}{\partial r_+}\right) = \frac{\partial}{\partial r_+}\left(\frac{\partial k}{\partial r_-}\right).$$

D. V. Shaykin, A. M. Kamchatnov, Phys. Fluids, **35,** 062108 (2023)
A. M. Kamchatnov, Chaos, **33,** 093105 (2023)

Решение I: закон дисперсии

$$\omega = k\left(r_+ + r_- \pm \frac{1}{2}\sqrt{(r_+ - r_-)^2 + \sigma k^2}\right),$$

интеграл

$$k^2 = 4\sigma(q - r_+)(q - r_-),$$

где $\sigma = \pm 1$ соответствует знаку дисперсии и q является постоянной интегрирования.

Решение II: закон дисперсии

$$\omega = k\left\{r_+ + r_- + \frac{\sigma k^2}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{r_+ + r_-}{2} + \frac{\sigma k^2}{8}\right)^2 - r_+ r_-}\right\},$$

интеграл

$$k^2 = \frac{4\sigma}{q}(q - r_+)(q - r_-).$$

Связь с полной интегрируемостью

Будем интерпретировать формулу $k^2 = K(r_+, r_-, q)$ как соотношение теории ВКБ для решения $\phi \propto \exp(2i \int k dx)$ уравнения $\phi_{xx} = \mathcal{A}\phi$. Тогда мы получаем квазиклассический предел первого уравнения пары Лакса:

$$\phi_{xx} = \mathcal{A}\phi, \qquad \phi_t = -\frac{1}{2}\mathcal{B}_x\phi + \mathcal{B}\phi_x,$$

то есть

$$\overline{\mathcal{A}} = -\frac{1}{4}k^2(r_+, r_-, q).$$

Вторая функция $\mathcal{B}$ может быть записана в квазиклассическом пределе в виде

$$\overline{\mathcal{B}} = -\frac{\omega[k(r_+, r_-, q), r_+, r_-]}{k(r_+, r_-, q)}$$

Таким образом, мы получаем пару Лакса в «универсальной форме», выраженной через римановы инварианты r_+ и r_-.

Решение I

Если считать квазиклассические выражения точными, то

$$\mathcal{A} = -\sigma(q - r_+)(q - r_-), \quad \mathcal{B} = -q - \frac{1}{2}(r_+ + r_-)$$

и мы получаем полностью интегрируемую систему

$$(r_+ + r_-)_t + \frac{3}{2}(r_+ + r_-)(r_+ + r_-)_x - (r_+ r_-)_x = 0,$$
$$(r_+ r_-)_t + r_+ r_-(r_+ + r_-)_x + \frac{1}{2}(r_+ + r_-)(r_+ r_-)_x + \frac{\sigma}{4}(r_+ + r_-)_{xxx} = 0.$$

Если взять

$$r_+ = \frac{u}{2} + \sqrt{\rho}, \qquad r_- = \frac{u}{2} - \sqrt{\rho},$$

то мы получим систему Каупа-Буссинеска

$$\rho_t + (\rho u)_x - \frac{\sigma}{4} u_{xxx} = 0, \qquad u_t + u u_x + \rho_x = 0.$$

Решение II

В случае

$$\mathcal{A} = -\frac{\sigma}{q}(q - r_+)(q - r_-), \quad \mathcal{B} = -q - \frac{1}{2}(r_+ + r_-)$$

мы получаем

$$(r_+ + r_-)_t + \frac{3}{2}(r_+ + r_-)(r_+ + r_-)_x - (r_+ r_-)_x - \frac{\sigma}{4}(r_+ + r_-)_{xxx} = 0,$$
$$(r_+ r_-)_t + r_+ r_-(r_+ + r_-)_x + \frac{1}{2}(r_+ + r_-)(r_+ r_-)_x = 0,$$

Если взять

$$r_+ = \frac{u}{2} + \sqrt{\frac{u^2}{4} - \rho}, \quad r_- = \frac{u}{2} - \sqrt{\frac{u^2}{4} - \rho},$$

то получим систему Захарова-Ито

$$u_t + \frac{3}{2}uu_x - \rho_x - \frac{\sigma}{4}u_{xxx} = 0,$$
$$\rho_t + \rho u_x + \frac{1}{2}u\rho_x = 0.$$

Если

$$r_\pm = vw \pm \sqrt{(1-v^2)(1-w^2)}.$$

то мы получим два полностью интегрируемых дисперсионных обобщения

$$v_t - [w(1-v^2)]_x + \frac{\sigma v (vw)_{xxx}}{4(v^2-w^2)} = 0,$$
$$w_t - [v(1-w^2)]_x - \frac{\sigma w (vw)_{xxx}}{4(v^2-w^2)} = 0,$$

и

$$v_t - [w(1-v^2)]_x + \frac{\sigma w (vw)_{xxx}}{4(v^2-w^2)} = 0,$$
$$w_t - [v(1-w^2)]_x - \frac{\sigma v (vw)_{xxx}}{4(v^2-w^2)} = 0$$

уравнений Овсянникова для волн в модели двухслойной мелкой воды.

Приближённое решение для обобщённого НУШ

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} - f(|\psi|^2)\psi = 0,$$

Закон дисперсии Боголюбова

$$\omega_\pm = k\left(u \pm \sqrt{c^2 + \frac{k^2}{4}}\right)$$

для линейных гармонических волн, где $c^2 = \rho f'(\rho)$.
В бездисперсионном пределе получаем

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad u_t + uu_x + \frac{c^2}{\rho}\rho_x = 0.$$

Уравнения асимптотической интегрируемости имеют вид

$$\frac{\partial k}{\partial c} = -\frac{c[(2 + c\rho'/\rho)k^2 + 4(1 + c\rho'/\rho)c^2]}{k(k^2 + 3c^2)},$$

$$\frac{\partial k}{\partial u} = -\frac{\sqrt{k^2 + 4c^2}[k^2 + 2(1 + \rho/(c\rho'))c^2]}{k(k^2 + 3c^2)}.$$

Коммутатор полученных производных равен

$$\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial k}{\partial u}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial k}{\partial c}\right)=\frac{\sqrt{k^2+4c^2}}{k\rho\rho'(k^2+3c^2)^2}$$
$$\times\left[(k^2+6c^2)\rho'^2(\rho'-2c)+2(k^2+3c^2)\rho^2(c\rho''-\rho')\right].$$

Он обращается в нуль в случае интегрируемого НУШ $f(\rho)=\rho=c^2$ и стремится к нулю как $\sim k^{-2}$ при $k\to\infty$. Таким образом, условие асимптотической интегрируемости выполняется в пределе больших k. В этом пределе получаем приближённое выражение для интеграла уравнений Гамильтона:

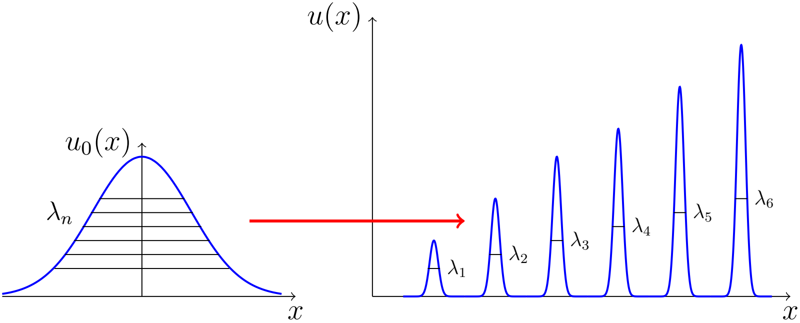
$$k^2=(q-u)^2-2[f(\rho)+\rho f'(\rho)],\qquad q\gg 1.$$

Существование интеграла, точного или приближённого, уравнений Гамильтона для движения пакета по неоднородному и зависящему от времени фону ведёт к важным следствиям!

Распад интенсивного импульса на солитоны

Уравнение Кортевега-де Фриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \qquad u_n(x,t) = \frac{2\lambda_n}{\mathrm{ch}^2[\sqrt{\lambda_n}(x - 4\lambda_n t)]}$$



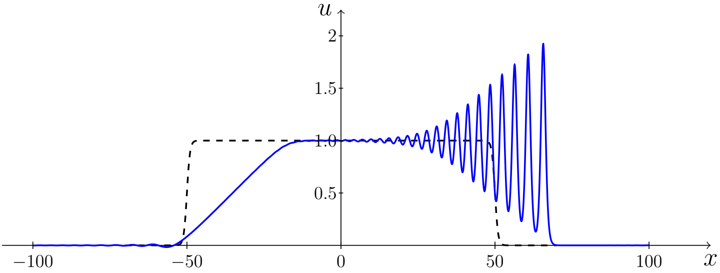
Асимптотическая формула Бора-Зоммерфельда (Карпмана)

$$\frac{1}{\pi}\int_{x_1(\lambda_n)}^{x_2(\lambda_n)} \sqrt{u_0(x) + \lambda_n}\, dx = n + \frac{1}{2}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N$$

Теория дисперсионных ударных волн

А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ, **65**, 590 (1973).

Промежуточная стадия эволюции импульса — дисперсионная ударная волна:



Модуляционная теория Уизема:

G. B. Whitham, Proc. Roy. Soc. London, A **283**, 238 (1965).

Закон сохранения «числа волн»:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \qquad \omega = \omega(k, \rho, u).$$

Осцилляции входят в область нелинейных колебаний со скоростью

$$\frac{dN}{dt} = \frac{|v_g - v_{phase}|}{\lambda} = \frac{1}{2\pi}\left(k\frac{\partial\omega}{\partial k} - \omega\right).$$

В случае уравнения КдФ

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

имеем $\omega = 6uk - k^3$, $v_g = d\omega/dk = 6u - 3k^2$, $v_+ = 6u$ и решение уравнения асимптотической интегрируемости

$$\frac{dk}{du} = \frac{\partial\omega/\partial u}{v_+ - v_g} = \frac{2}{k}$$

с начальным условием $k(0) = 0$ даёт значение волнового числа на «столике» $k_L = k(u_0) = 2\sqrt{u_0}$.

Левый край ДУВ распространяется по «столику» с групповой скоростью

$$v_g = 6u_0 - 3k_L^2 = -6u_0,$$

которая отличается от фазовой скорости волны

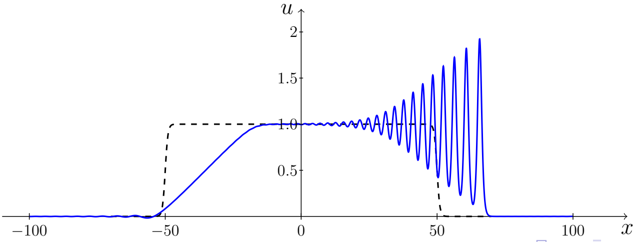
$$v_{phase}(k_L) = \frac{\omega}{k_L} = 6u_0 - k_L^2 = 2u_0.$$

Поэтому число осцилляций внутри ДУВ увеличивается со скоростью

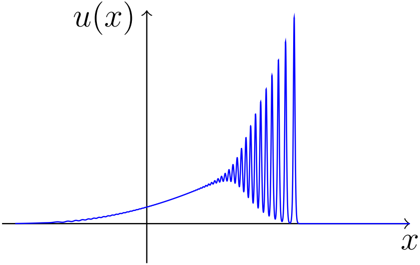
$$\frac{dN}{dt} = \frac{v_{phase} - v_g}{\lambda} = \frac{k_L}{2\pi} \cdot 8u_0 = \frac{8}{\pi} u_0^{3/2}.$$

и

$$N(t) = \frac{8}{\pi} u_0^{3/2} t.$$



Число солитонов в начальном импульсе



Интегрирование формулы

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{2\pi}\left(k\frac{\partial\omega}{\partial k} - \omega\right)$$

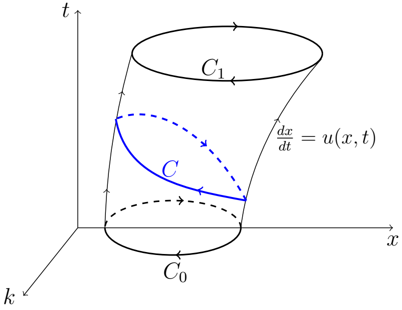
по времени даёт

$$N = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left(k\frac{\partial\omega}{\partial k} - \omega\right) dt = \frac{S}{2\pi},$$

где k есть решение уравнений асимптотической интегрируемости с начальным условием $k = 0$ в точке опрокидывания.

Получилась половина интегрального инварианта Пуанкаре-Картана

$$N = \frac{1}{2\pi} \int (k\delta x - \omega \delta t)$$



Гидродинамическое течение согласовано с уравнениями Гамильтона и мы можем вычислить N для начального момента времени:

$$N = \frac{1}{2\pi} \int k(\rho_0(x), u_0(x))dx,$$

где $\rho_0(x), u_0(x)$ начальные распределения.

Пример: обобщённое уравнение КдФ

Для уравнения

$$u_t + V_0(u)u_x + u_{xxx} = 0.$$

Вычисление даёт

$$N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{3}V_0(u_0(x))}\,dx.$$

Эта формула подразумевает устойчивость солитонов. Например, в случае

$$u_t + 6u^p u_x + u_{xxx} = 0$$

солитонные решения существуют при $p > 0$:

$$u_s(x,t) = \frac{u_m}{\mathrm{ch}^{2/p}\left[\frac{1}{2}p\sqrt{V_s}(x - V_s t)\right]},$$

где

$$u_m = \left[\frac{1}{12}V_s(p+1)(p+2)\right]^{1/p}.$$

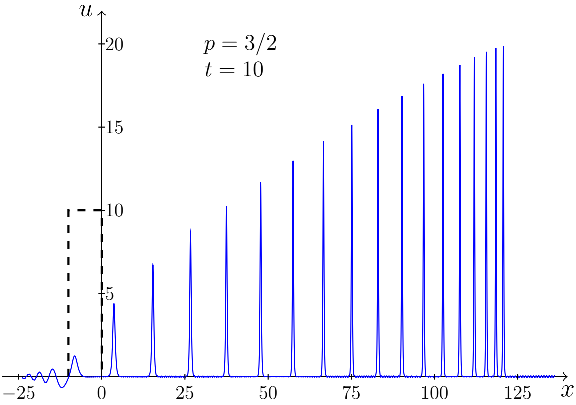
Однако они неустойчивы при $p > 4$
(E. A. Kuznetsov, Phys. Lett. A **101**, 314 (1984)).

Для начального распределения в виде столика

$$u_0(x) = \begin{cases} u_0, & -L \le x \le 0, \\ 0, & x < -L \quad \text{and} \quad x > 0, \end{cases}$$

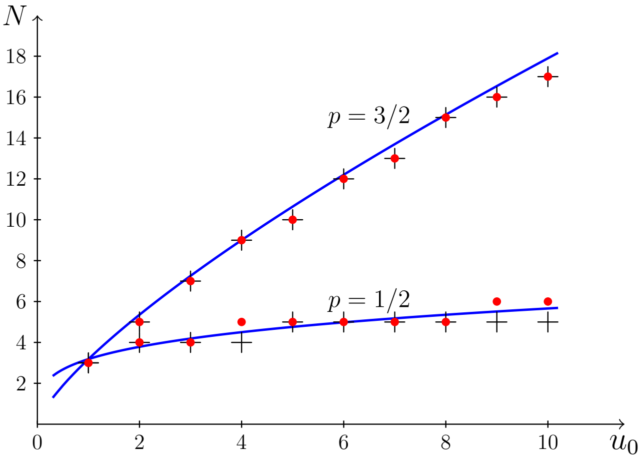
общее выражение сводится к асимптотической формуле $(N \gg 1)$

$$N \approx \frac{L}{\pi} u_0^{p/2}.$$



Число солитонов как функция u_0, $(L = 10)$

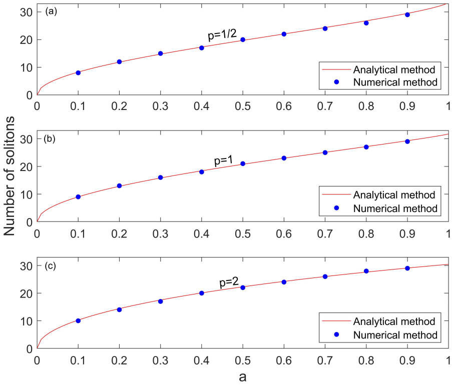
$$N \approx \frac{L}{\pi} u_0^{p/2}$$



Обобщённое НУШ: число солитонов

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} - \frac{1}{p}|\psi|^{2p}\psi = 0, \quad N = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{c_0(c_0 - c(x))}\,dx, \quad c = \rho^{p/2}$$

$$c(x) = \left[1 - \frac{a}{\mathrm{ch}^2(x/l)}\right]^{p/2}, \qquad u_0(x) = \frac{2}{p}[c(x) - c_0]$$

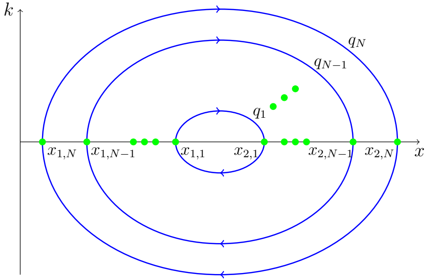


Мы узнаём в формуле для N правило квантования Бора-Зоммерфельда

$$N = \frac{1}{2\pi}\int k(\rho_0(x), u_0(x), q_N)dx$$

для наименьшего «собственного значения» q_N, соответствующего «последнему» солитону в «поезде» солитонов. Обобщение очевидно:

$$\int_{x_1(q_n)}^{x_2(q_n)} k[\rho_0(x), u_0(x), q_n]dx = 2\pi n, \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$



В результате мы связываем n-й солитон с «собственным значением» q_n.

Замечание Стокса

Линейная гармоническая волна $\propto \exp[i(kx - \omega t)]$
и малоамплитудный хвост солитона $\propto \exp[-\kappa|x - Vt|]$
подчиняются одним и тем же линеаризованным уравнениям.
Поэтому

$$V = \frac{\omega(i\kappa, r_+, r_-)}{i\kappa} \overset{\text{НУШ}}{=} u + \sqrt{\rho f'(\rho) - \frac{\kappa^2}{4}}.$$

Аналогичным образом точные решения уравнений асимптотической интегрируемости преобразуются в соотношения для обратной полуширины солитона κ:

$$\kappa^2 = -4\sigma(q - r_+)(q - r_-)$$

или

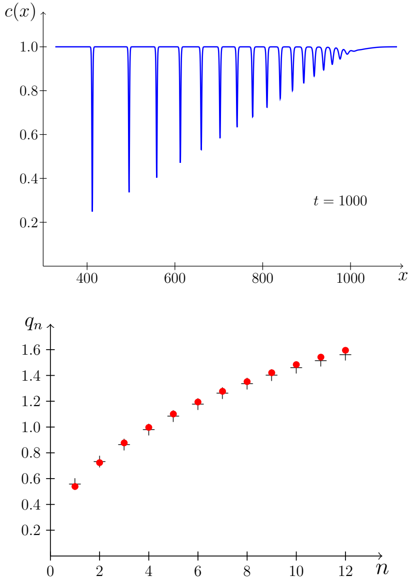
$$\kappa^2 = -\frac{4\sigma}{q}(q - r_+)(q - r_-).$$

В случае приближённого решения, справедливого при $k \gg 1$, переход к соотношению для $\kappa \gg 1$ возможен путём сшивки с асимптотикой точного решения для простой волны, поскольку асимптотический поезд солитонов является однонаправленным течением. Например, в случае $f(\rho) = \rho^2/2$ при заданных начальных распределениях $\rho_0(x), u_0(x)$, когда $\rho_0(x) \to \rho_b, u_0(x) \to 0$, скорости солитонов при $t \to \infty$, равны

$$V_n = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\rho_b^2 + (\rho_b + q_n)^2} - \rho_b\right),$$

где q_n находятся из правила Бора-Зоммерфельда

$$\frac{1}{2\pi}\int_{x_1(q_n)}^{x_2(q_n)} \sqrt{(q_n - u_0(x))^2 - 3\rho_0^2(x)}\, dx = n, \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$


$c(x)$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
$t = 1000$
400
600
800
1000
x
q_n
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
2
4
6
8
10
12
n

Теорема Эренфеста

Уравнение Гросса-Питаевского

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} - |\psi|^2\psi = U(x)\psi$$

определяет динамику конденсата в ловушке с потенциалом $U(x)$.
Определяем координату центра масс и среднюю «силу»

$$\langle x\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}}\int_{-\infty}^{\infty} x|\psi|^2 dx, \quad \langle U_x\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}}\int_{-\infty}^{\infty} U_x|\psi|^2 dx, \quad \mathcal{N} = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx.$$

Теорема Эренфеста гласит ($m = 1$ в нашем случае)

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle x\rangle = -\langle U_x\rangle.$$

Например, если $U(x) = \frac{\omega_0^2}{2}x^2$, то $\langle x\rangle$ осциллирует с частотой

$$\omega_{\text{центр масс}} = \omega_0.$$

Однако эксперимент и численный счёт дают частоту колебаний солитона в ловушке

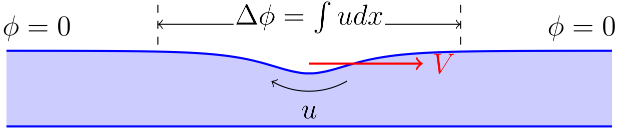
$$\omega_{\text{солитон}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

Противоток

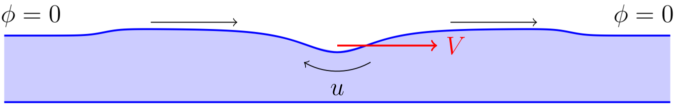
Это означает, что движение солитона сопровождается возбуждением противотока в фоновом распределении конденсата:

С. И. Шевченко, Физ. низких темп., **14,** 1011 (1988).

Фаза конденсата должна оставаться однозначной функцией координаты. Поэтому скачок фазы $\Delta\phi$, возникающий при возбуждении солитона,



должен компенсироваться набегом фазы из-за течения в фоне:



Подстановка выражения

$$\kappa^2 = -4\sigma(q - r_+)(q - r_-)$$

в формулу Стокса даёт

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega(i\kappa, r_+, r_-)}{i\kappa} = q + \frac{1}{2}(r_+ + r_-).$$

Мы вводим переменную ϕ так, что $\kappa = (r_+ - r_-)\sin\phi$, и интерпретируем наше уравнение как уравнение Гамильтона:

$$\frac{dx}{dt} = r_+ + r_- + \frac{1}{2}(r_+ - r_-)\cos\phi = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Канонический импульс ищем в форме

$$p = (r_+ - r_-)^2 f(\phi).$$

Тогда интегрирование даёт

$$H = (r_+ + r_-)p + \frac{1}{2}(r_+ - r_-)^3 \int \cos\phi f'(\phi) d\phi,$$

где функцию $f(\phi)$ можно найти из другого уравнения Гамильтона

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Общие выражения для канонического момента и гамильтониана солитона ($\sigma = +1$):

$$p = \frac{1}{2}(r_+ - r_-)^2(\phi - \sin\phi\cos\phi),$$

$$H = (r_+ + r_-)p + \frac{1}{6}(r_+ - r_-)^3 \sin^3\phi,$$

где переменная ϕ связана со скоростью солитона $V = \dot{x}$ формулой

$$\phi = \arccos\frac{2(\dot{x} - r_+ - r_-)}{r_+ - r_-}.$$

Уравнение Ньютона

$$2\ddot{x} = (\dot{x} - r_+ - r_-)(r_+ + r_-)_x - \left[\frac{1}{4}(r_+ - r_-)^2 + 2(U_+ + U_-)\right]_x$$
$$- \frac{(r_+ - r_-)](U_+ - U_-)_x}{\sqrt{(r_+ - r_-)^2 - 4(\dot{x} - r_+ - r_-)^2}} \arccos\frac{2(\dot{x} - r_+ - r_-)}{r_+ - r_-}.$$

где $r_\pm(x,t)$ — решения гидродинамических уравнений для крупномасштабного фона:

$$\frac{\partial r_+}{\partial t} + \left[r_+ + r_- + \frac{1}{2}(r_+ - r_-)\right]\frac{\partial r_+}{\partial x} = -U_{+,x},$$
$$\frac{\partial r_-}{\partial t} + \left[r_+ + r_- - \frac{1}{2}(r_+ - r_-)\right]\frac{\partial r_-}{\partial x} = -U_{-,x},$$

Таким образом, для описания движения узких солитонов по крупномасштабному фону достаточно знать интеграл уравнений асимптотической интегрируемости!

Пример: солитон в БЭК с потенциалом и течением

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} - |\psi|^2\psi = U(x)\psi,$$

В этом случае

$$r_\pm = \frac{u}{2} \pm \sqrt{\rho}, \qquad \omega(k) = k\left(u + \sqrt{\rho + \frac{4^2}{4}}\right).$$

Уравнения асимптотической интегрируемости имеют решение

$$k^2 = (q-u)^2 - 4\rho.$$

Канонический импульс и гамильтониан даются выражениями

$$p = -2\dot{x}\sqrt{\rho_0 - (\dot{x}-u)^2} + 2\rho \arccos\frac{\dot{x}-u}{\sqrt{\rho}},$$

$$H = \frac{4}{3}\left[\rho - (\dot{x}-u)^2\right]^{3/2} + up.$$

Гидродинамические уравнения имеют вид:

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad u_t + uu_x + \rho_x = -U_x.$$

Уравнение Ньютона

Уравнение Ньютона

$$2\ddot{x} = -2U_x - \rho_x + (\dot{x} - u)u_x$$

или

$$2\ddot{x} = -U_x + u_t + u_x\dot{x} = -U_x + \dot{u}.$$

В этой форме уравнение Ньютона было выведено в теории возмущений для НУШ в
Th. Busch, J. R. Anglin, Phys. Rev. Lett., **84,** 2298 (2000).

(1) В отсутствие потенциала уравнение

$$2\ddot{x} = \dot{u}$$

даёт интеграл

$$2\dot{x} - u = \mathrm{const}.$$

(2) В случае стационарного течения $(\rho = \rho(x), u = u(x))$

$$2\ddot{x} = -2U_x - \rho_x + (\dot{x} - u)u_x$$

гамильтонов подход даёт сохранения энергии

$$\varepsilon_s = \frac{4}{3}\left[\rho - (\dot{x} - u)^2\right]^{3/2} - 2u(\dot{x} - u)\sqrt{\rho - (\dot{x} - u)^2} + 2u\rho \arccos\frac{\dot{x} - u}{\sqrt{\rho}} = \mathrm{const}$$

(3) Нет течения $(u = 0)$

$$2\ddot{x} = -U_x.$$

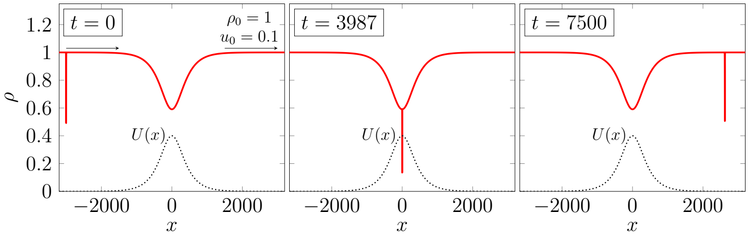
В гармонической ловушке $U(x) = \frac{\omega_0^2}{2}x^2$ тёмный солитон осциллирует с частотой

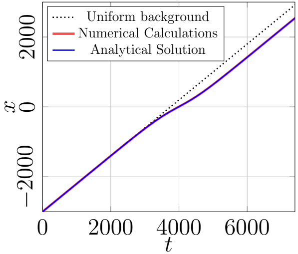
$$\omega_{\mathrm{soliton}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

Уравнение Ньютона

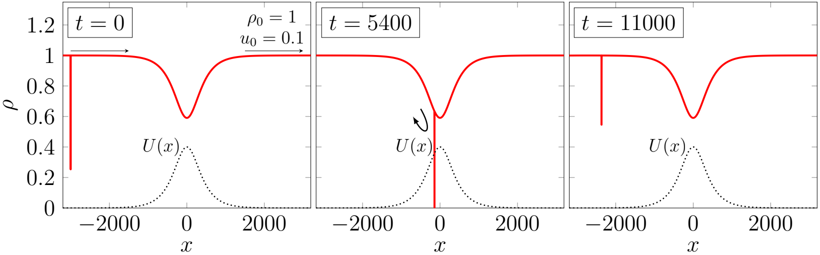
$$2\ddot{x} = -U_x + u_t + u_x\dot{x} = -U_x + \dot{u}.$$

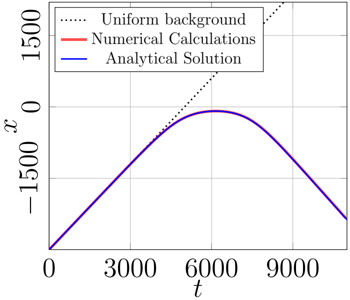
Путь солитона сквозь барьер





Отражение солитона от барьера





References

- A. M. Kamchatnov, Theory of quasi-simple dispersive shock waves and number of solitons, Chaos **30,** 123148 (2020)
- A. M. Kamchatnov, D. V. Shaykin, Propagation of wave packets along intensive simple waves, Phys. Fluids, **33,** 052120 (2021)
- S. K. Ivanov and A. M. Kamchatnov, Motion of dark solitons in a non-uniform flow of BEC, Chaos **32,** 113142 (2022)
- D. V. Shaykin, and A. M. Kamchatnov, Propagation of wave packets along large-scale background waves, Phys. Fluids, **35,** 062108 (2023)
- A. M. Kamchatnov, Asymptotic theory of not completely integrable soliton equations, Chaos **33,** 093105 (2023)
- AMK, D. V. Shaykin, Propagation of generalized Korteweg–de Vries solitons along large-scale waves, Phys. Rev. E. **108,** 054205 (2023)
- A. M. Kamchatnov, D. V. Shaykin, Quasiclassical integrability condition in AKNS scheme, Physica D, **460,** 134085 (2024)
- A. M. Kamchatnov, Hamilton theory of dark soliton motion in the NLS equation theory, Theor. Math. Phys. **219,** 44 (2024)
- AMK, D.V. Shaykin, Propagation of dark solitons of DNLS equations along a large-scale background, Wave Motion, **129,** 103349 (2024)


Анатолий Михайлович Камчатнов
Доктор физико-математических наук, профессор факультета физики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», главный научный сотрудник Института спектроскопии РАН. Автор около 200 научных работ в различных областях теоретической физики. Главные научные интересы лежат в области теории нелинейных волн. За работы по теории дисперсионных ударных волн награжден Президиумом РАН премией им. Л.И. Мандельштама.
9 785759 829331
Теория нелинейных волн
А.М. Камчатнов
МОНОГРАФИИ ВШЭ
Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики
$u(x)$
x
Теория нелинейных волн
А.М. Камчатнов

Спасибо за внимание!