

Элементы теории и методы исследования робастного хаоса

Алексей Казаков
НИУ ВШЭ, Нижний Новгород

План лекции

- Что такое аттрактор и какие они бывают
- О робастных аттракторах и псевдогиперболичности
- О методах проверки псевдогиперболичности
- Аттрактор Лоренца
- Критерии Шильникова рождения аттрактора Лоренца
- Четырёхкрылый аттрактор Лоренца
 - Геометрическая модель
 - Псевдогиперболичность
 - Критерий рождения
- Приложение к моделям связанных осцилляторов

Что такое аттрактор и какие они бывают

Аттрактор

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

i Текущая версия страницы пока **не проверялась** опытными участниками и может значительно отличаться от **версии, проверенной 5 июля 2022 года**; проверки

У этого термина существуют и другие значения, см. *Аттрактор (значения)*.

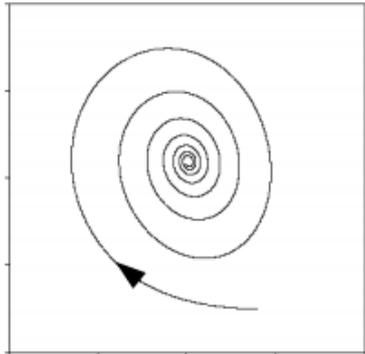
Аттра́ктор (англ. *attract* — привлекать, притягивать) — компактное подмножество **фазового пространства динамической системы**, все траектории из некоторой окрестности которого стремятся к нему при времени, стремящемся к бесконечности. Аттрактором может являться притягивающая **неподвижная точка** (к примеру, в задаче о маятнике с трением о воздух), **периодическая траектория** (пример — самовозбуждающиеся колебания в контуре с положительной обратной связью), или некоторая ограниченная область с неустойчивыми траекториями внутри (как у странного аттрактора).

Для классификации аттракторов удобно использовать показатели Ляпунова

$$\dot{x} = F_t(x)$$

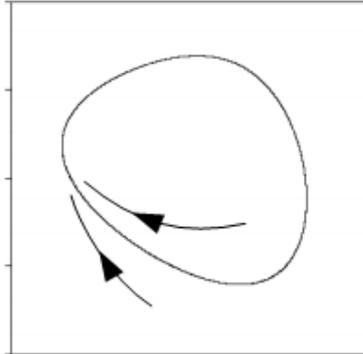
$$\Lambda_1(x) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|D_x F_t\|$$

Состояние равновесия



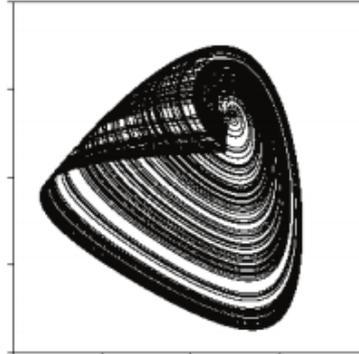
$$\Lambda_1 < 0$$

Предельный цикл

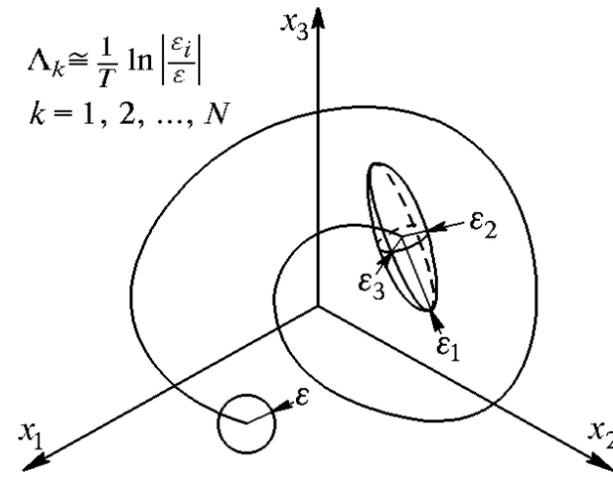


$$\Lambda_1 = 0$$

Хаотический
(странный) аттрактор



$$\Lambda_1 > 0$$



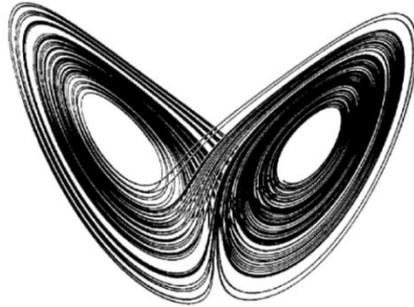
С.П. Кузнецов. Динамический хаос. 2001

Хаотические аттракторы

$\Lambda_1 > 0$ – условие хаотичности

Система Лоренца, 1963

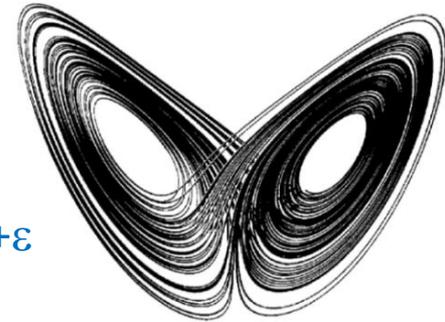
$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(r - z) - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$



$b = 8/3, \sigma = 10, r = 28$
 $\Lambda_1 = 0.907$

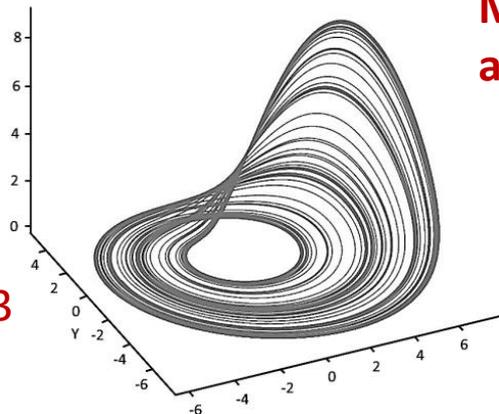
Малые вариации b, σ, r
не разрушают аттрактор

$b = 8/3 + \varepsilon, \sigma = 10 + \varepsilon, r = 28 + \varepsilon$
 $\Lambda_1 \approx 0.9$, for small ε



Система Рёсслера, 1972

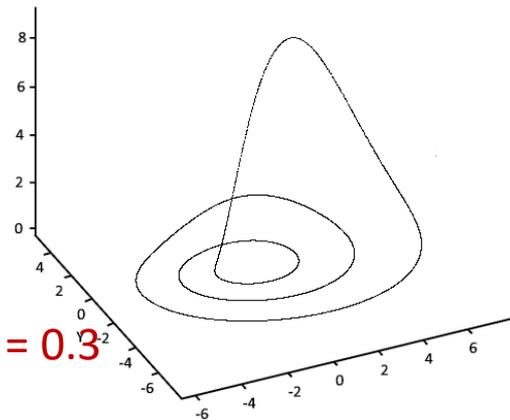
$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b - cz + xz \end{cases}$$



$b = 0.3, c = 4.9, a = 0.3$
 $\Lambda_1 = 0.07$

Малые вариации b, c, a
Могут разрушить
аттрактор

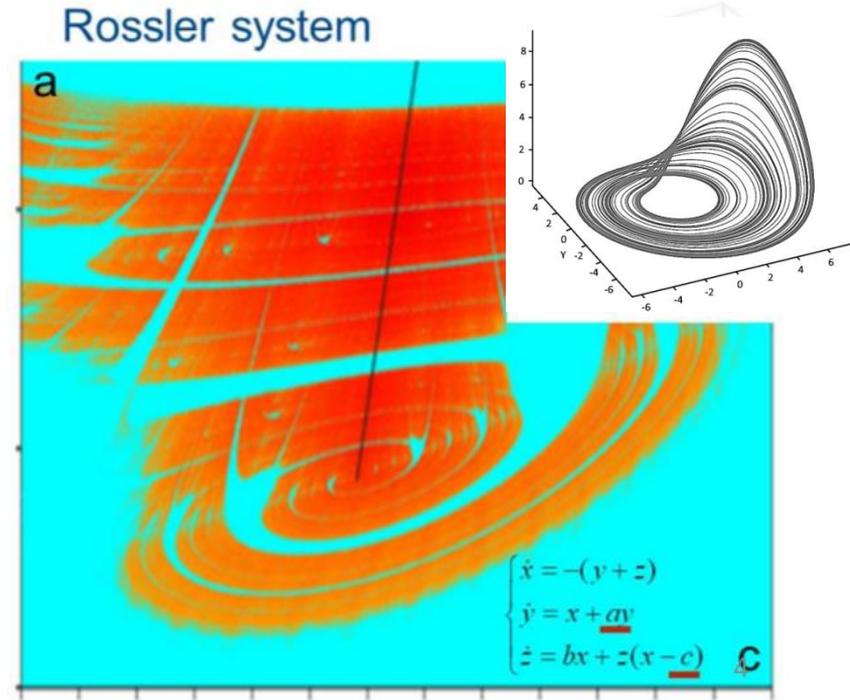
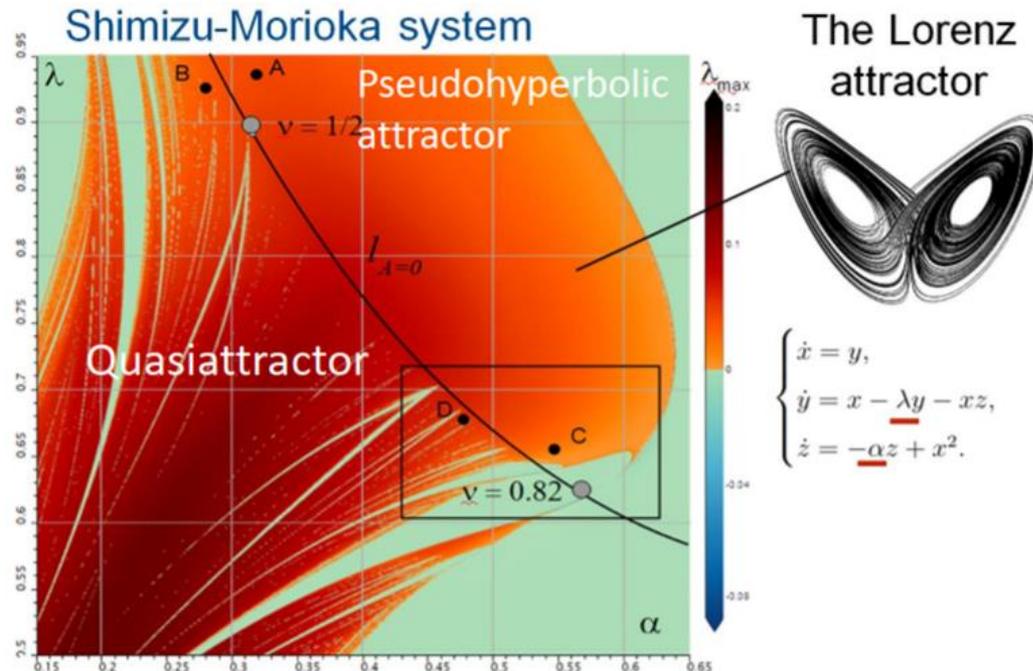
$b = 0.303, c = 4.9, a = 0.3$
 $\Lambda_1 = 0$



Хаотические аттракторы

Псевдогиперболические аттракторы
 $\Lambda_1 > 0$ для всех близких систем
 (при возмущениях, изменении параметров)

Квазиаттрактор – **никогда** нельзя
 быть уверенным, что хаотичность
 ($\Lambda_1 > 0$) остается при возмущениях



Определение псевдогиперболичности

Определение 1. Пусть \mathcal{A} является положительно инвариантным множеством n -мерного C^r -гладкого потока F (то есть, $F_t(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ для $t > 0$). Множество \mathcal{A} называется псевдогиперболическим, если оно обладает следующими свойствами.

- а) Для любой точки $x \in \mathcal{A}$ существует два непрерывно зависящих от x линейных подпространства, $E_1(x)$ и $E_2(x)$, где $\dim E_1 = k$ и $\dim E_2 = n - k$, которые инвариантны относительно дифференциала DF потока,

$$DF_t E_1(x) = E_1(F_t(x)), \quad DF_t E_2(x) = E_2(F_t(x)),$$

для любых $t \geq 0$.

- б) Разложение на E_1 и E_2 является доминирующим, то есть существуют константы $C_1 > 0$ и $\beta > 0$ такие, что

$$\|DF_t(x)|_{E_2}\| \cdot \|(DF_t(x)|_{E_1})^{-1}\| \leq C_1 e^{-\beta t}$$

для любых $t \geq 0$ и $x \in \mathcal{A}$. Это означает, что любое возможное сжатие в $E_1(x)$ равномерно слабее, чем сжатие в $E_2(x)$, и любое возможное растяжение в $E_1(x)$ равномерно сильнее любого возможного растяжения в $E_2(x)$.

- с) Линеаризованный поток DF на E_1 экспоненциально растягивает любые k -мерные объемы, то есть существуют константы $C_2 > 0$ и $\sigma > 0$ такие, что

$$\det(DF_t(x)|_{E_1}) \geq C_2 e^{\sigma t}$$

для любых $t \geq 0$ и $x \in \mathcal{A}$.

Если псевдогиперболическое множество \mathcal{A} является аттрактором, мы называем его *псевдогиперболическим аттрактором*.

Если условия (b) и (c) заменить на более сильные условия

b') дифференциал DF экспоненциально сжимает любые векторы в E_2 , то есть существуют константы $B_1 > 0$ и $\sigma_1 > 0$ такие, что

$$\|DF_t(x)|_{E_2}\| \leq B_1 e^{-\sigma_1 t}$$

для любых $t \geq 0$ и $x \in \mathcal{A}$,

c') DF экспоненциально растягивает любые векторы в E_1 , то есть существуют константы $B_2 > 0$ и $\sigma_2 > 0$ такие, что

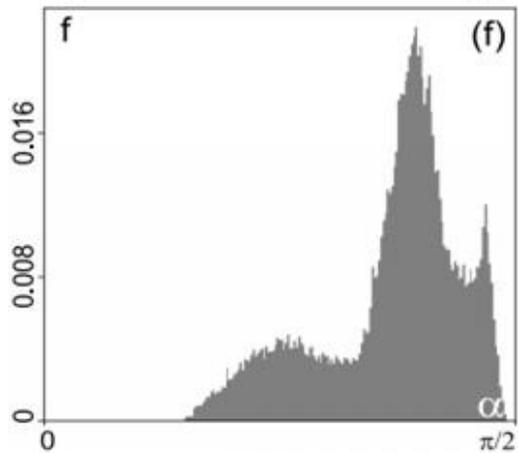
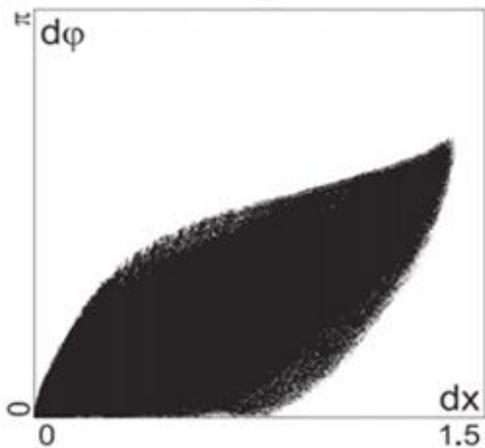
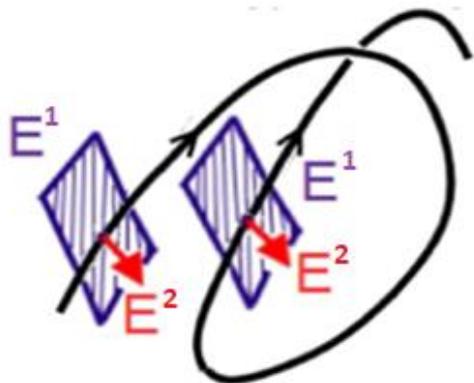
$$\|(DF_t(x)|_{E_1})^{-1}\| \leq B_2 e^{-\sigma_2 t}$$

для любых $t \geq 0$ и $x \in \mathcal{A}$,

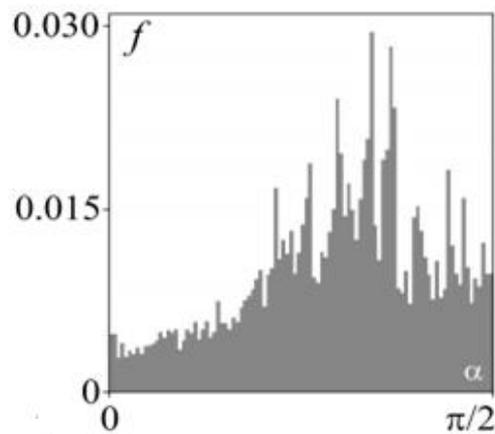
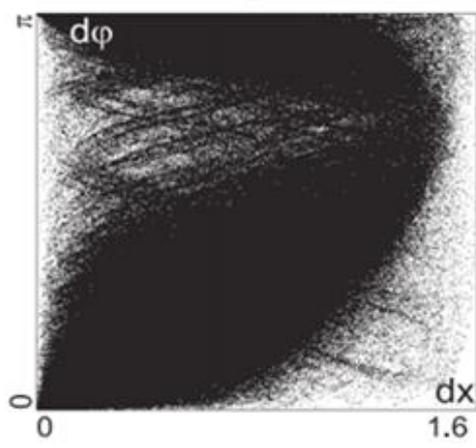
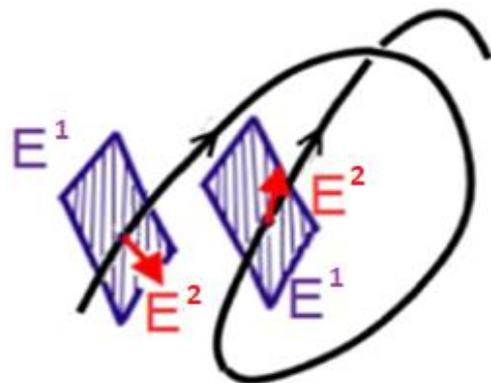
Получится классическое определение гиперболичности.

Pseudohyperbolicity

E^1 is orientable

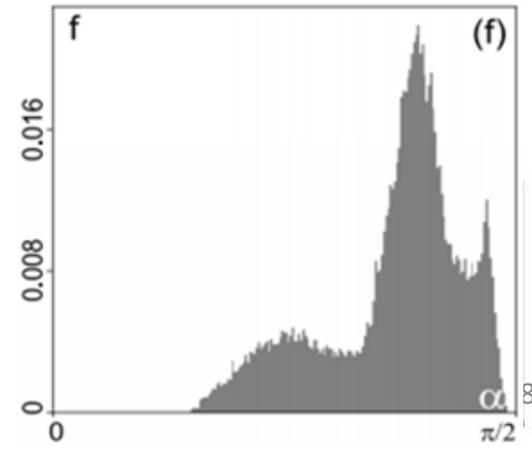
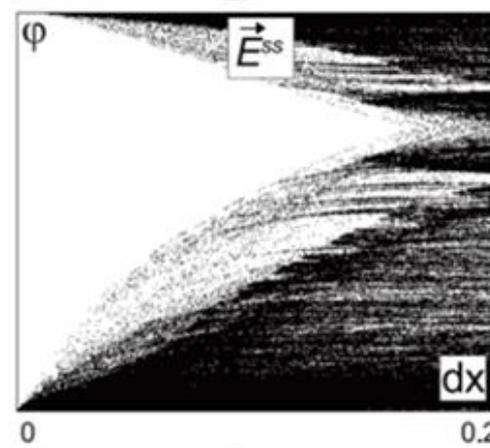
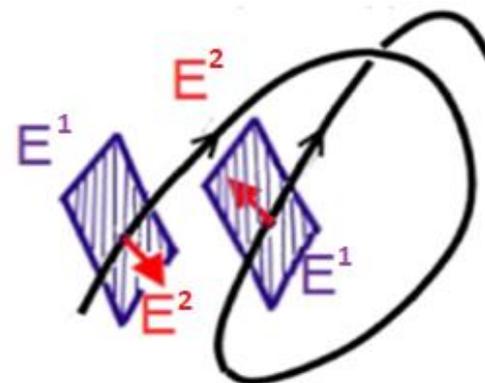


No pseudohyperbolicity



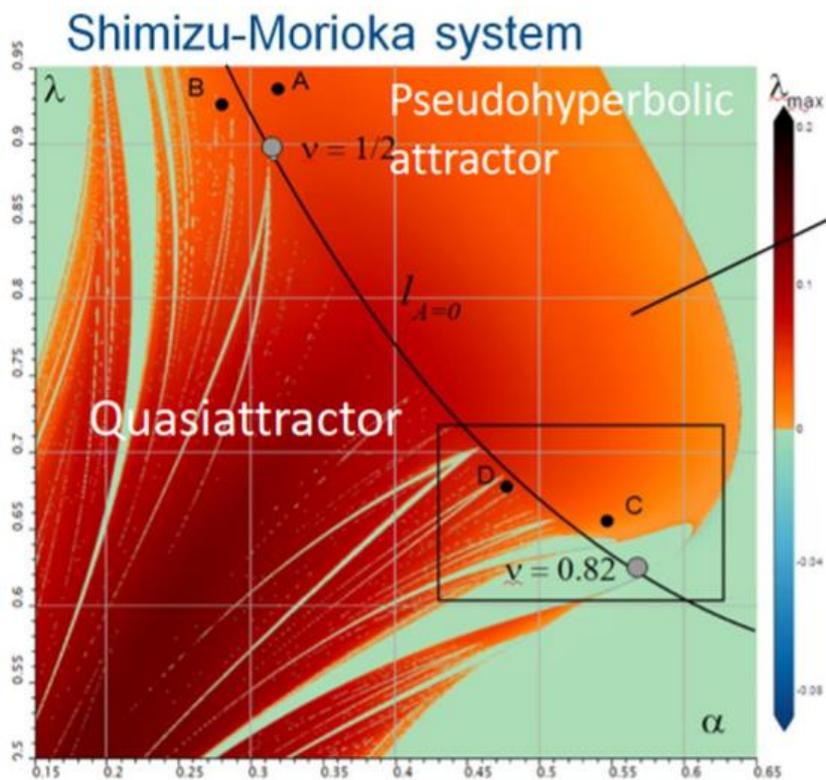
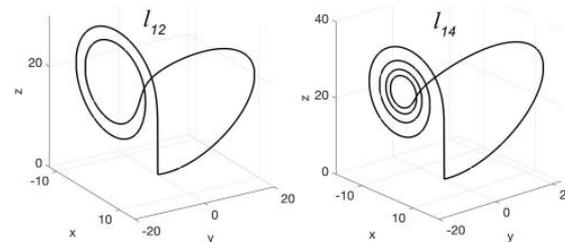
Pseudohyperbolicity

+ E^1 is non-orientable



Свойства псевдогиперболических аттракторов

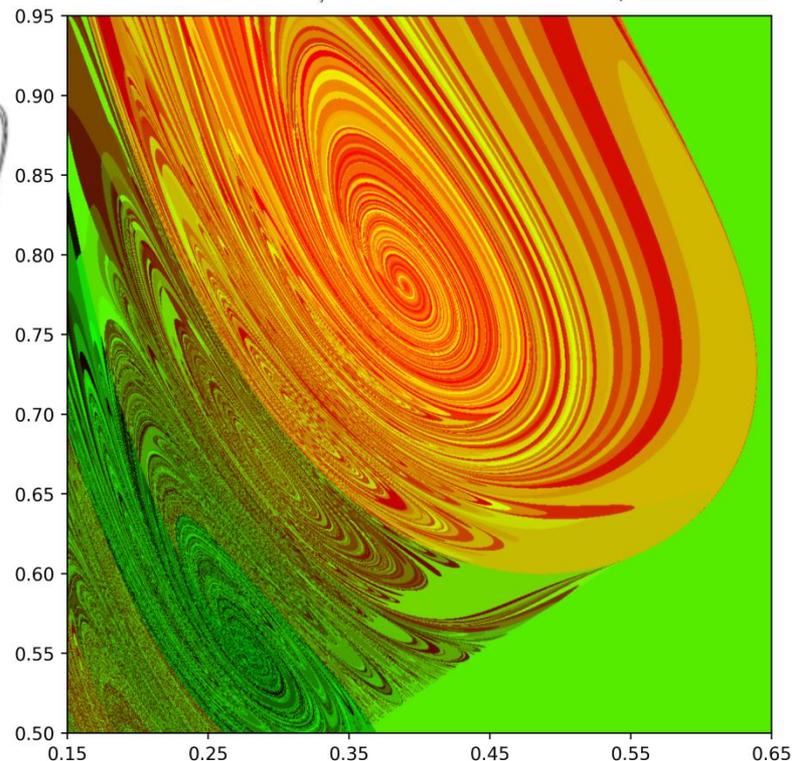
- Демонстрируют робастную хаотическую динамику (максимальный показатель Ляпунова любой траектории положительный ($\Lambda_1 > 0$) и это свойство сохраняется при малых возмущениях)
- Не являются грубыми (бифуркации происходят при сколь угодно малых возмущениях)



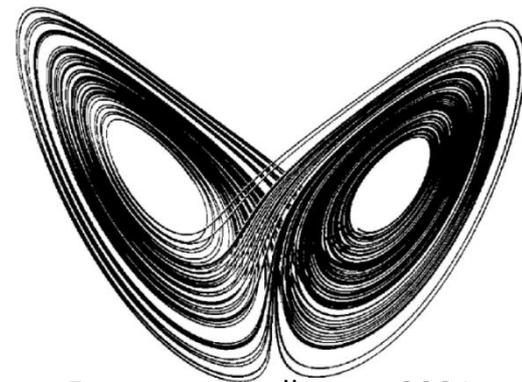
The Lorenz attractor



$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x - \lambda y - xz, \\ \dot{z} = -\alpha z + x^2. \end{cases}$$



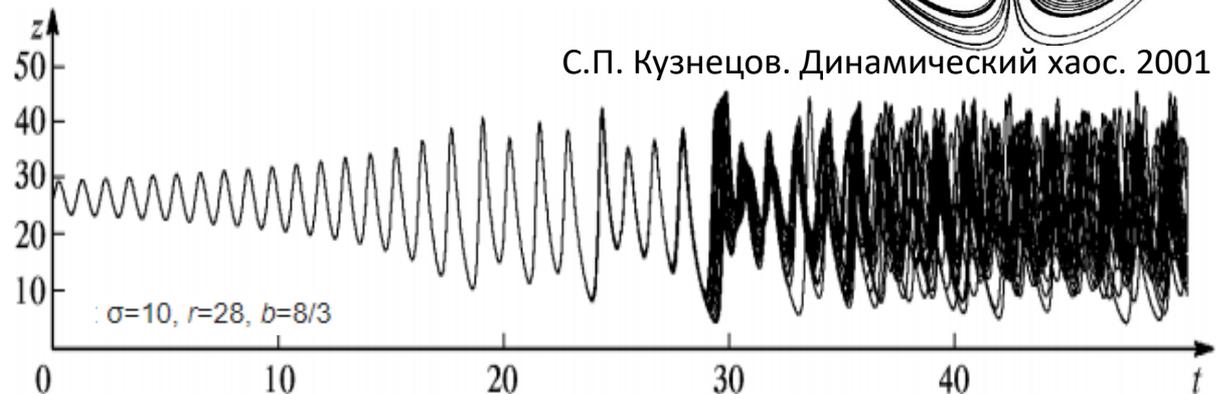
Аттрактор Лоренца



- Открыт Э. Лоренцем (1963) в трехмерной системе

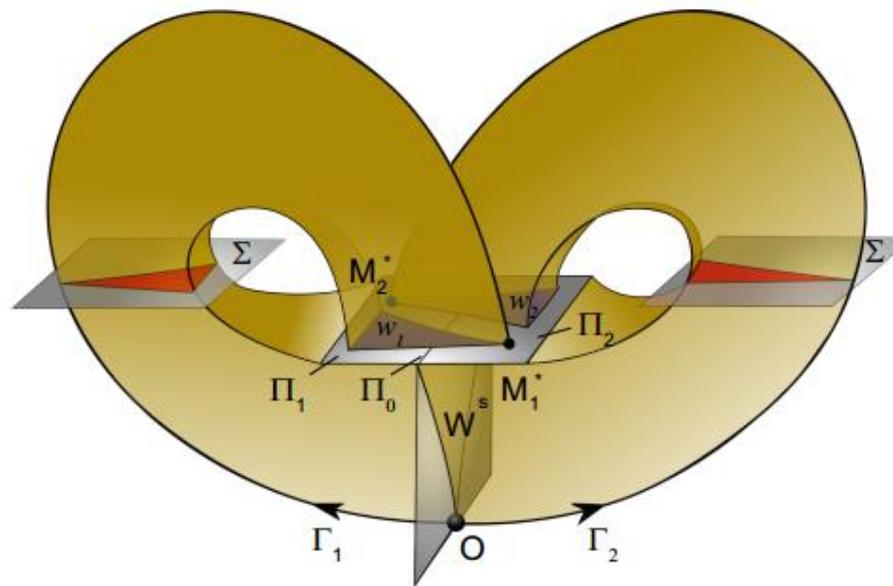
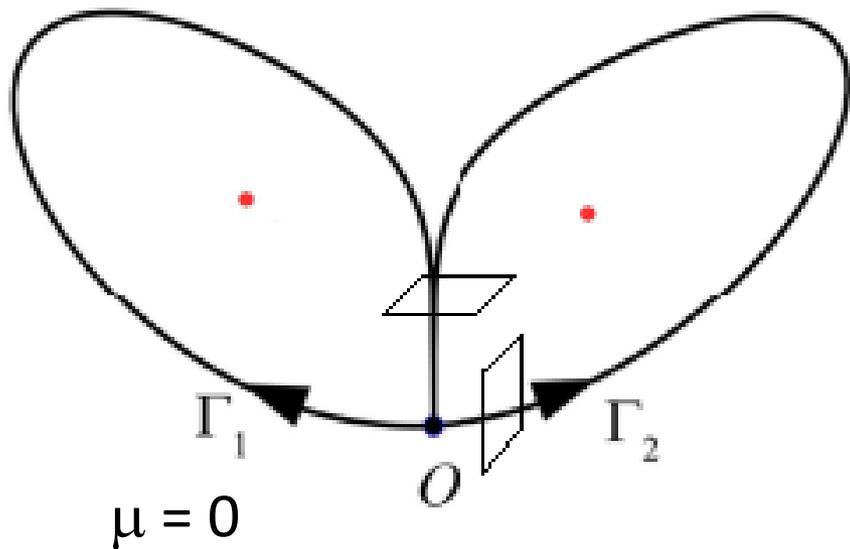
$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = x(r - z) - y, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases}$$

$$x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z$$



- Теория – 70е-80е года. Работы Афраймовича-Быкова-Шильникова, Гукенхеймера-Вильямса, Бунимовича-Синяя и др.
- Доказательство существования аттрактора в системе Лоренца: Такер (1999).
- Доказательство существования аттрактора Лорена в системе Шимицу-Мориока: Овсянников Тураев (2016), Цапинский, Тураев, Жгличинский (2017).

Геометрическая модель Афраймовича-Быкова-Шильникова



Отображение Пуанкаре

$$\bar{x} = (x^* + B|y|^\nu + o(|y|^\nu)) \cdot \text{sign}(y),$$

$$\bar{y} = (\mu + A|y|^\nu + o(|y|^\nu)) \cdot \text{sign}(y).$$

$\nu = -\lambda_1/\gamma$ – седловой индекс
 μ – параметр расщепления
 A – сепаратрисная величина

Согласно А-Б-Ш, при выполнении следующих условий отображение является гиперболическим.

1) равномерное сжатие в направлении параллельном сильно устойчивому направлению состояния равновесия

$$\left\| \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right\| < 1$$

2) равномерное растяжение в направлении трансверсальном устойчивому многообразию

$$\left\| \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \right\| > 1$$

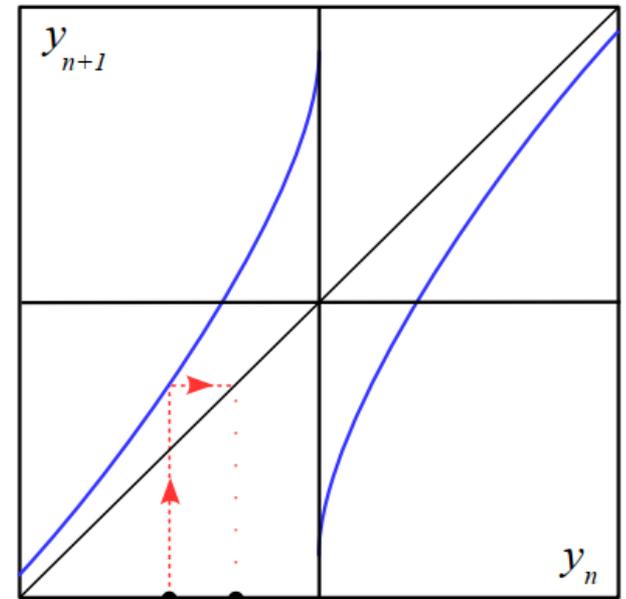
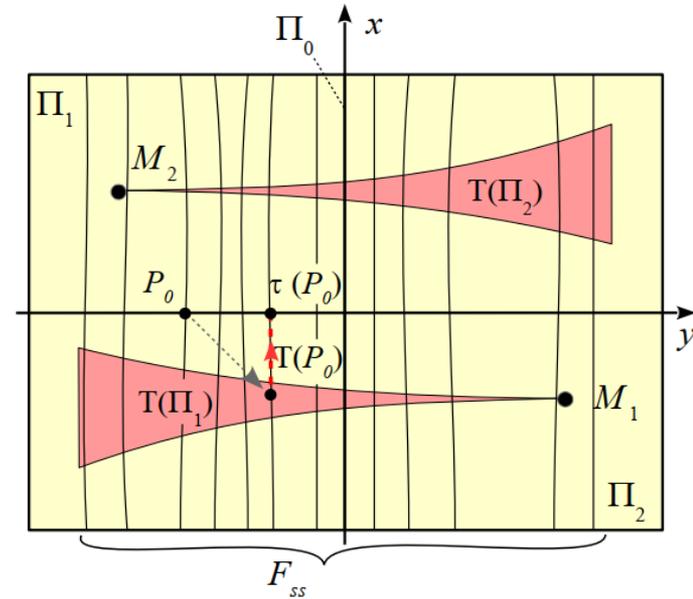
3) Условие существования поля устойчивых конусов

$$\left\| \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \right)^{-1} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right\| < \left(1 - \left\| \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \right)^{-1} \right\| \right) \cdot \left(1 - \left\| \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right\| \right)$$

В этом случае существует гладкое инвариантное слоение.

Фактор-отображение по слоям:

$$\bar{y} = (\mu + A|y|^\nu + o(|y|^\nu)) \cdot \text{sign}(y).$$



- Условия 1-3 не удастся проверить аналитически (за исключением «специальных» случаев [B19])
- Численная проверка (computer-assisted proof) для системы Лоренца выполнена Такером [T99].
- Эффективные численные методы, основанные на понятии псевдогиперболичности [TS98], разработаны нами недавно [GKT21, GKKT21]
- Также существует альтернативный способ доказательства существования аттракторов Лоренца с помощью проверки критериев Шильникова и их обобщений [Sh81]

[B19] Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. //Chaos, 2019

[T99] Tucker W. The Lorenz attractor exists //Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics. – 1999. – Т. 328. – №. 12. – С. 1197-1202.

[TS98] Turaev D., Shilnikov L.P. // Математический сборник, 1998

[GKT21] Gonchenko S., Kazakov A., Turaev D. //Nonlinearity, 2021

[GKKT21] Гонченко С. В, Кайнов М., Казаков А., Тураев Д. ПНД, 2021

[Sh81] Шильников Л.П.// Усп. мат. наук, 1981.

Численный метод проверки псевдогиперболичности

Проверка условий **(b)** и **(c)** определения 1 выполняется с помощью вычисления показателей Ляпунова $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \dots \geq \Lambda_n$ для достаточно длинной траектории аттрактора.

- Условие **(c)** растяжение объемов в подпространстве E_1 :

$$\Lambda_1 + \dots + \Lambda_k > 0$$

- Условие **(b)**

$$\Lambda_k > \Lambda_{k+1}$$

- Для проверки условия **(a)** вычисляем ляпуновские ковариантные вектора, образующие подпространства E_1 и E_2 .

Проверка непрерывности E_1 и E_2

Наш метод применим для случая, когда

- $\dim(E_2(x)) = 1$
- $\dim(E_1(x)) = n-1$

В этом случае, удобно использовать стандартные обозначения из гиперболической теории

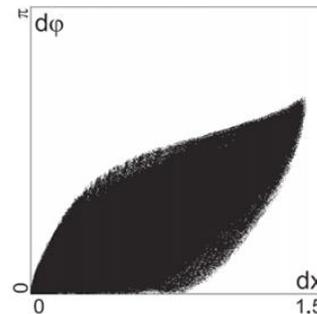
- $E^{ss}(x) \Leftrightarrow E_2(x)$
- $E^{cu}(x) \Leftrightarrow E_1(x)$

1. Проверка непрерывности $E^{ss}(x)$:

- Получаем достаточно длинную траекторию на аттракторе и сохраняем точки x_1, x_2, \dots, x_m на этой траектории
- Идем назад по сохраненной траектории (x_m, x_{m-1}, \dots, x_1), вычисляем максимальный показатель Ляпунова (этот показатель соответствует минимальному показателю для системы в прямом времени) и сохраняем соответствующий ляпуновский вектор $v(x_i)$ для каждой точки x

=> Для каждой точки x_i мы знаем вектор $v(x_i)$ отвечающий сильному сжатию

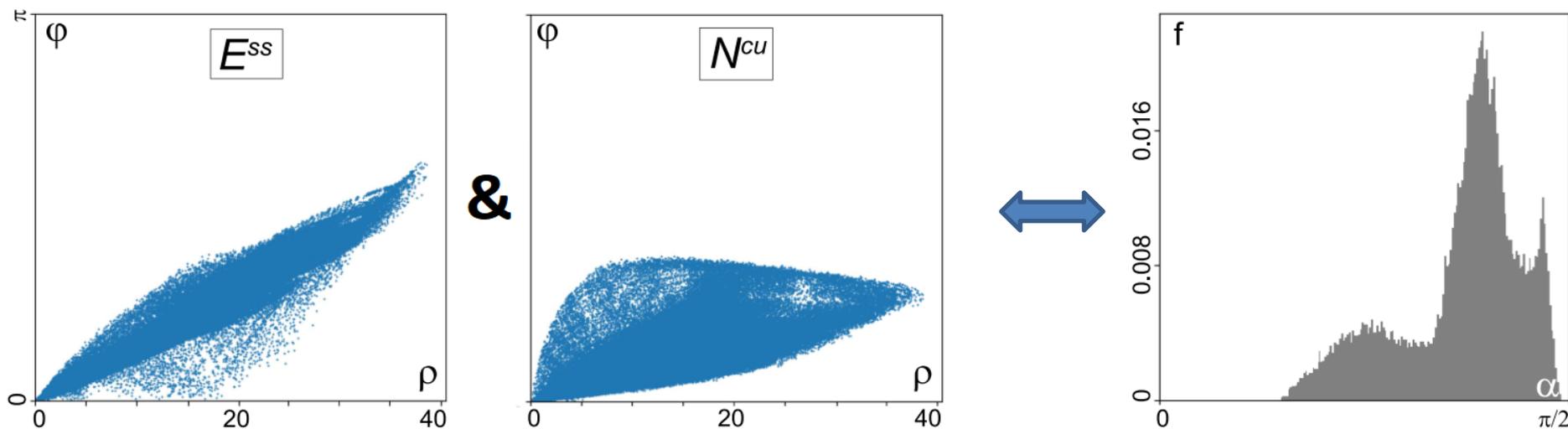
- Вычисляем $dx = \text{dist}(x_i, x_j)$ и $d\varphi = \text{angle}(v(x_i), v(x_j))$ для каждой пары точек (x_i, x_j) , результат выводим на график $(dx, d\varphi)$.



2. Вместо проверки непрерывности $E^{cu}(x)$ выполняется проверка непрерывности ортогонального к $E^{cu}(x)$ подпространства $N^{cu}(x)$ с помощью схожей процедуры.

Метод углов для проверки условия (а)

Вместо расчета диаграмм непрерывности для $E_1(x)$ и $E_2(x)$ можно вычислять минимальный угол между этими подпространствами, используя метод Купцова-Кузнецова. Этот метод позволяет обрабатывать гораздо более длинные траектории аттрактора.



P. V. Kuptsov, “Fast numerical test of hyperbolic chaos,” *Phys. Rev. E* **85**, 015203 (2012).

P. V. Kuptsov and S. P. Kuznetsov, *Regular Chaotic Dynamics* **23**, 908–932 (2018)

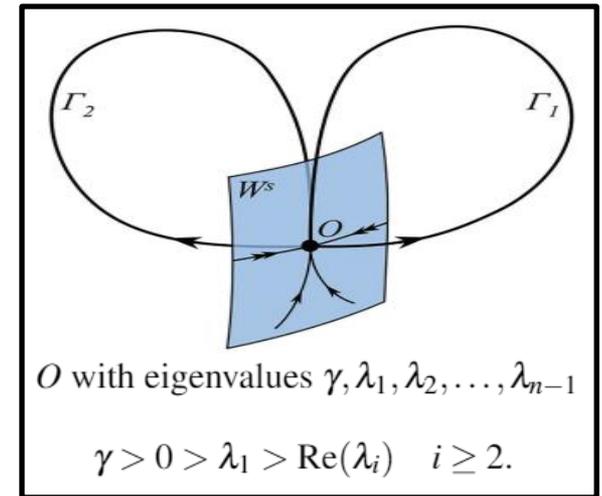
Критерий Шильникова в симметричном случае I

Шильников (1981)

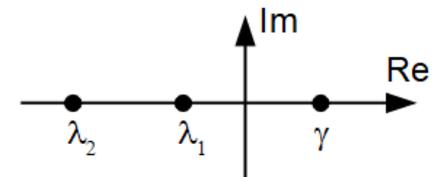
Пусть выполняются следующие 3 условия

1. both unstable separatrices Γ_1 and Γ_2 return to O at $t \rightarrow +\infty$ along the eigenvector corresponding to λ_1 ;
2. saddle index of O is equal to one, i.e. $\nu = -\lambda_1/\gamma = 1$;
3. the so-called separatrix value (coefficient A before $|x|^\nu$ in the factor map) satisfies the condition

$$0 < |A| < 2. \quad (1)$$



Согласно Шильникову [Sh81], бифуркации такой системы приводят к рождению аттрактора Лоренца.

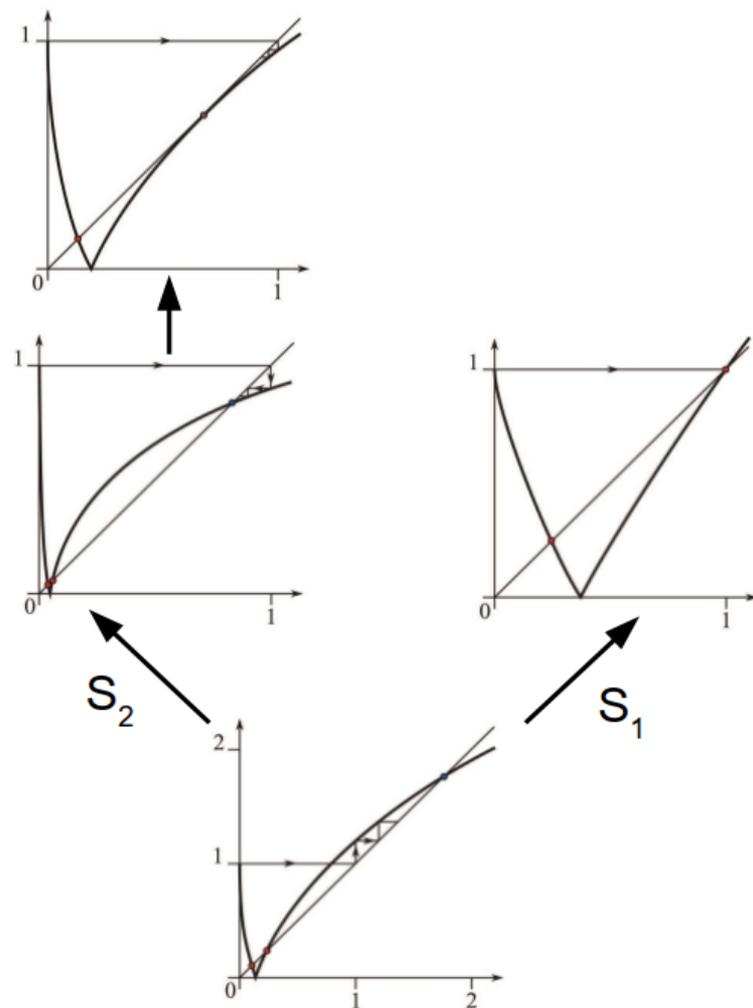
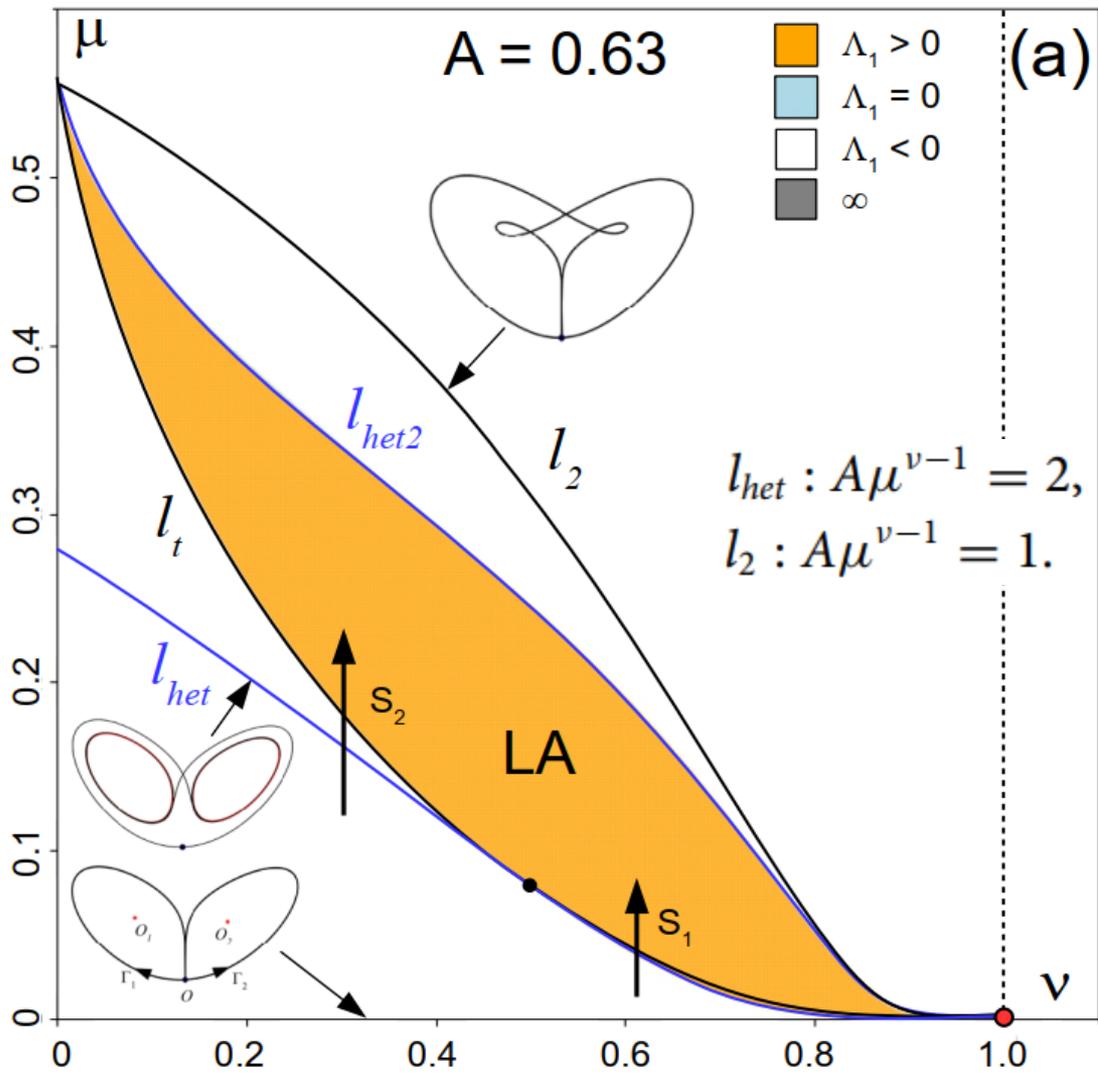
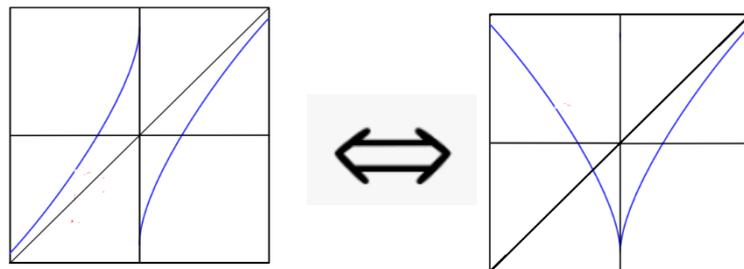


If condition (1) is fulfilled in the codimension-2 point (when system $F_{\mu,\nu}$ has a homoclinic butterfly with a neutral saddle), then in the (μ, ν) -parameter plane there exists an open region with the Lorenz attractor of the Afraimovich-Bykov-Shilnikov model and the point $(\mu, \nu) = (0, 1)$ belongs to its boundary

Доказательство: Робинсон (1989, 1992); Моралес, Пачифико, Сан Мартин (2005); Овсянников, Тураев (2016)

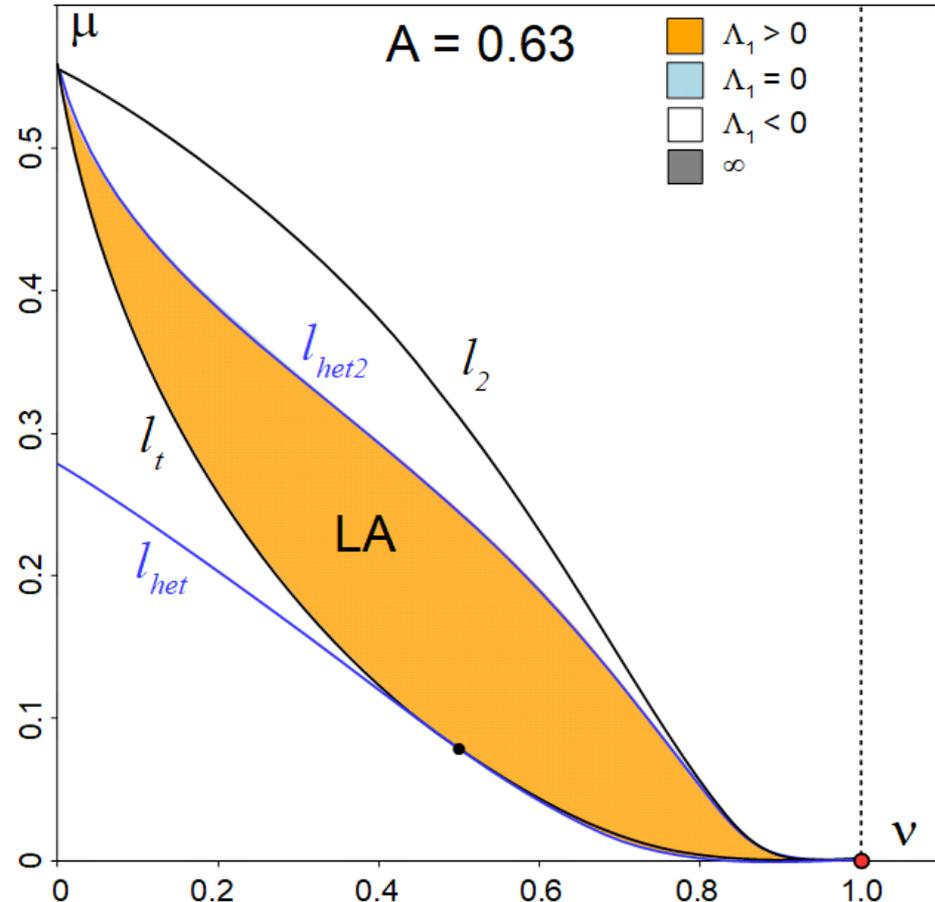
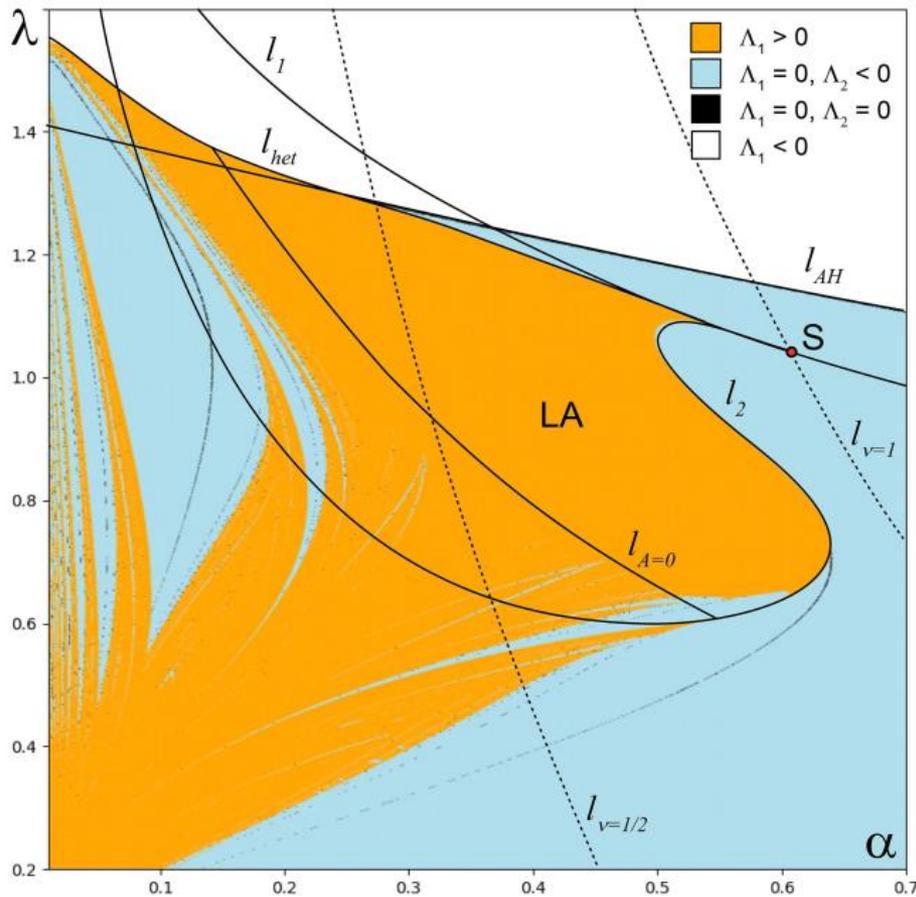
Идея доказательства

$$\bar{y} = (\mu + A|y|^\nu + o(|y|^\nu)) \cdot \text{sign}(y).$$



$0 < A < 1$, система Шимицу-Мориока

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x - \lambda y - xz, \\ \dot{z} = -\alpha z + x^2, \end{cases}$$



Аттракторы Лоренца в результате выполнения условий критерия Шильникова:

А. Шильников (1986, 1993); Овсянников, Тураев (2016); Цапинский, Тураев, Жгличинский (2017)

Критерий Шильникова в симметричном случае II

Шильников (1981)

Предположим, что в системе выполняются следующие три условия:

1. both unstable separatrices Γ_1 and Γ_2 return to O at $t \rightarrow +\infty$ along the eigenvector corresponding to λ_1 ;

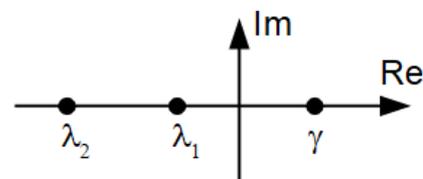
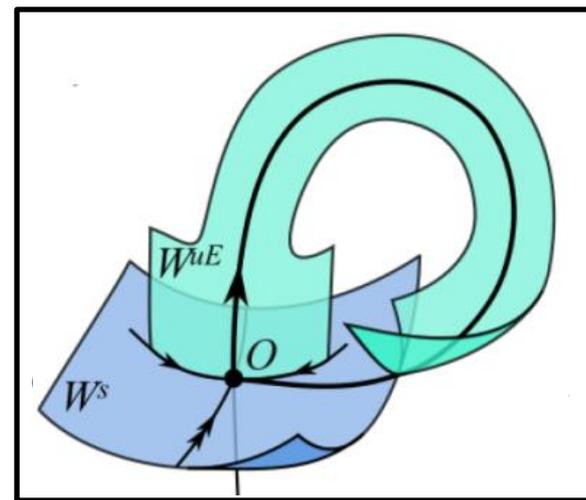
2. the extended unstable manifold $W^{uE}(O)$ is tangent to the stable manifold $W^s(O)$ at points of Γ_1 and Γ_2
(in this case $A = 0$, (3)
the so-called **inclination flip bifurcation**)

3. $1/2 < \nu < 1$ (4)

By Shilnikov, bifurcations of such system lead to the birth of the Lorenz attractor of two types: orientable Lorenz attractor and non-orientable Lorenz attractor

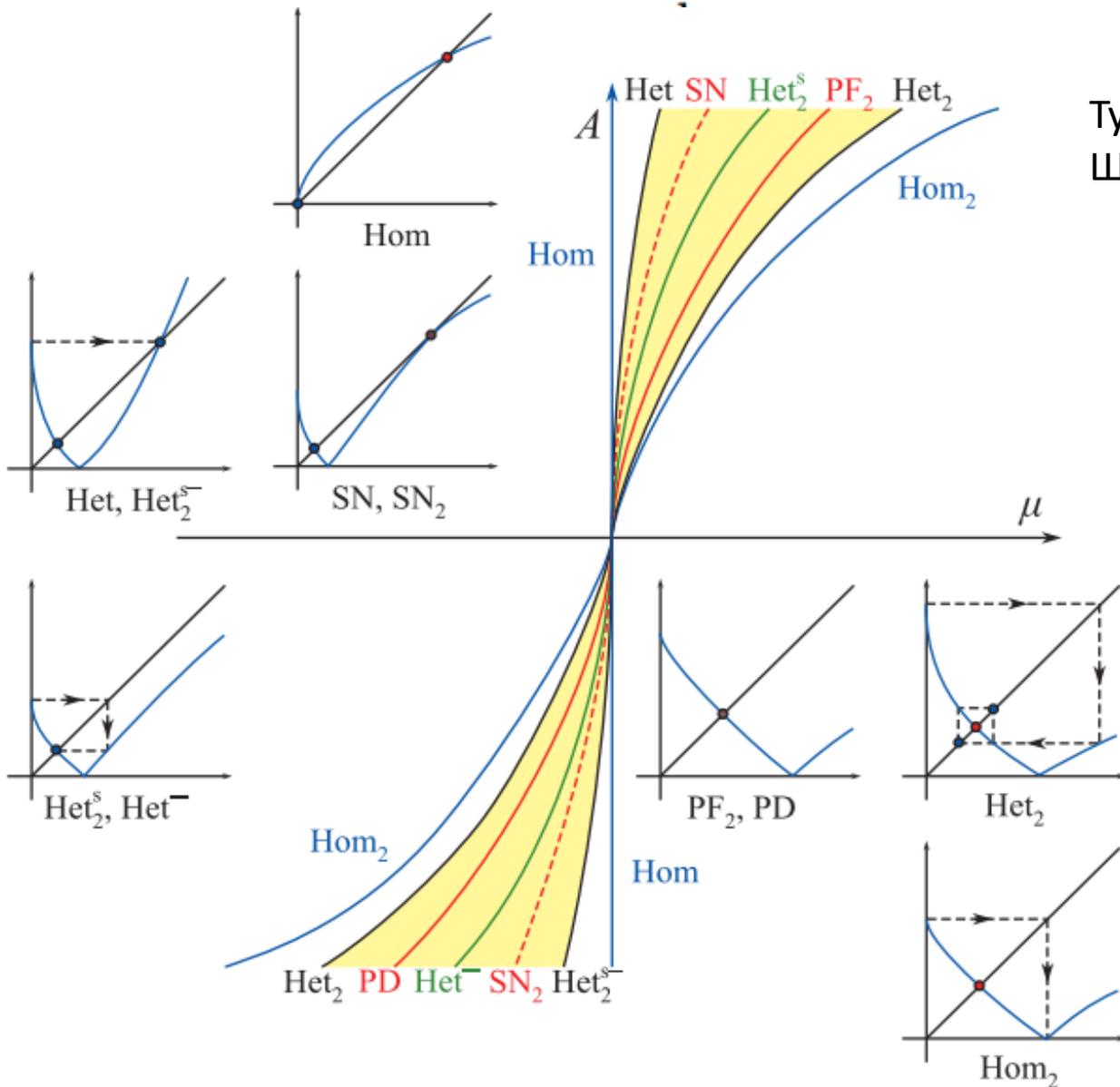
If condition (4) is fulfilled in the codimension-2 point (when system $F_{\mu,A}$ has a homoclinic butterfly with $A=0$), then in the (μ,A) -parameter plane there exist two open regions with the Lorenz attractor of the Afraimovich-Bykov-Shilnikov model and the point $(\mu,A) = (0,0)$ belongs to its boundary

Доказательство: Рыхлик (1990)



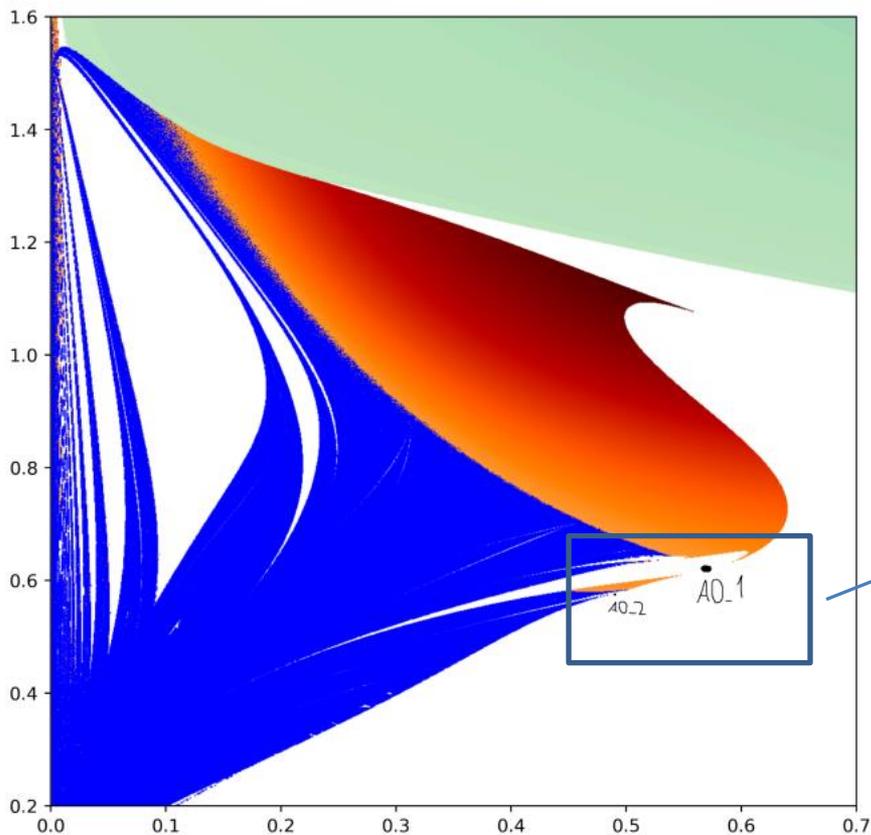
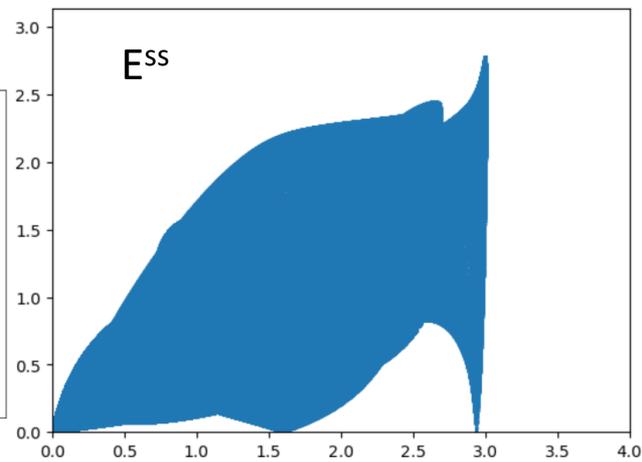
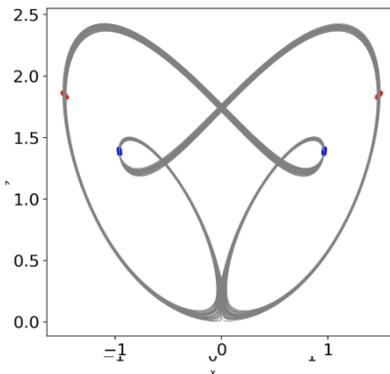
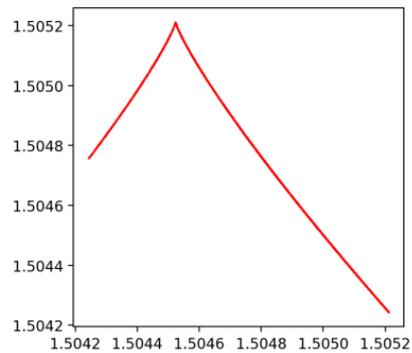
Идея доказательства

$$\bar{x} = (-\mu + A|x|^v + o(|x|^{2v})) \cdot \text{sign}(x)$$

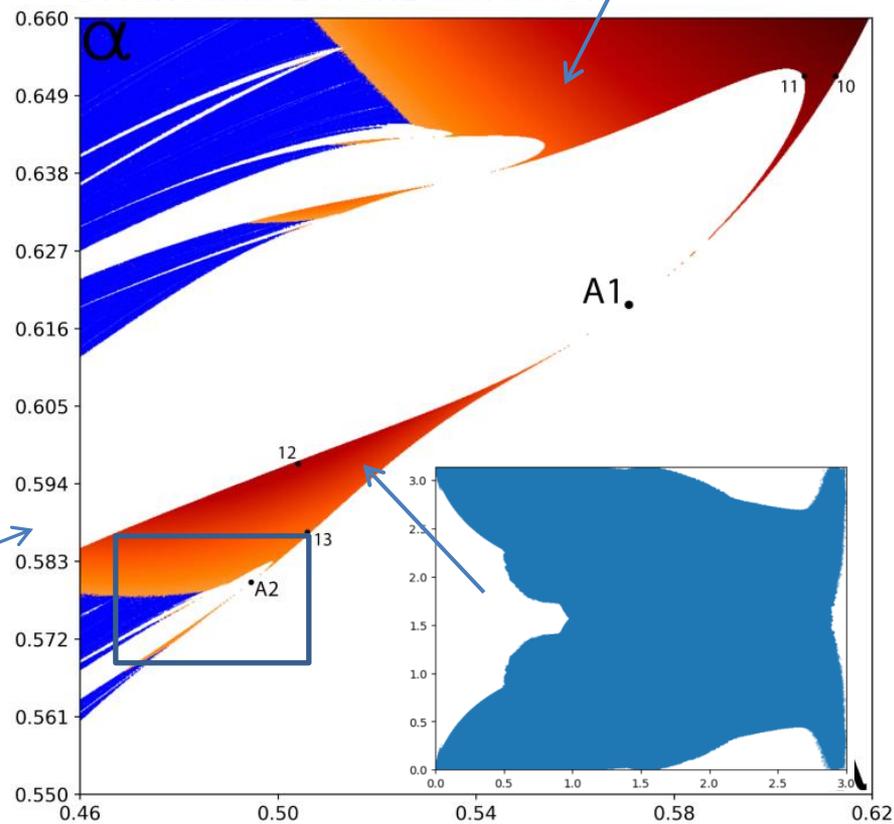


Тураев, А.Шильников, Л.П.
Шильников (1993)

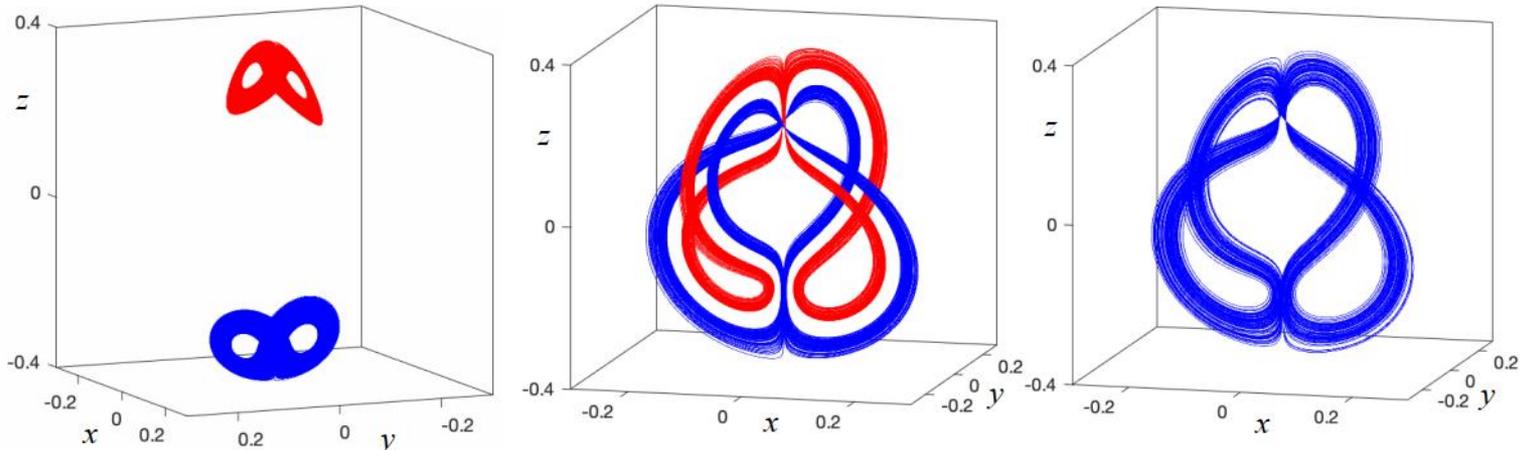
$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x - \lambda y - xz, \\ \dot{z} = -\alpha z + x^2, \end{cases}$$



Oriental Lorenz attractor



Четырехкрылый аттрактор Лоренца (Simo angel)



- Отрыт в 3D системе, являющейся нормальной формой бифуркации неподвижной точки с мультипликаторами $(-1, i, -i)$

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha x - \beta y - \frac{1}{2}z(x - y) + \frac{1}{2}(x^2 y + x y^2) + \frac{3}{8}z^2 x - \frac{1}{8}z^2 y, \\ \dot{y} = \beta x - \alpha y + \frac{1}{2}z(x + y) + \frac{1}{2}(x^2 y - x y^2) + \frac{1}{8}z^2 x + \frac{3}{8}z^2 y, \\ \dot{z} = \mu z + x^2 - y^2 - \frac{1}{4}z^3 - \frac{1}{2}z(x^2 + y^2), \end{cases} \quad (*)$$

- Может наблюдаться в системах с Z_4 симметрией

$$S : x \rightarrow y, \quad y \rightarrow -x, \quad z \rightarrow -z.$$

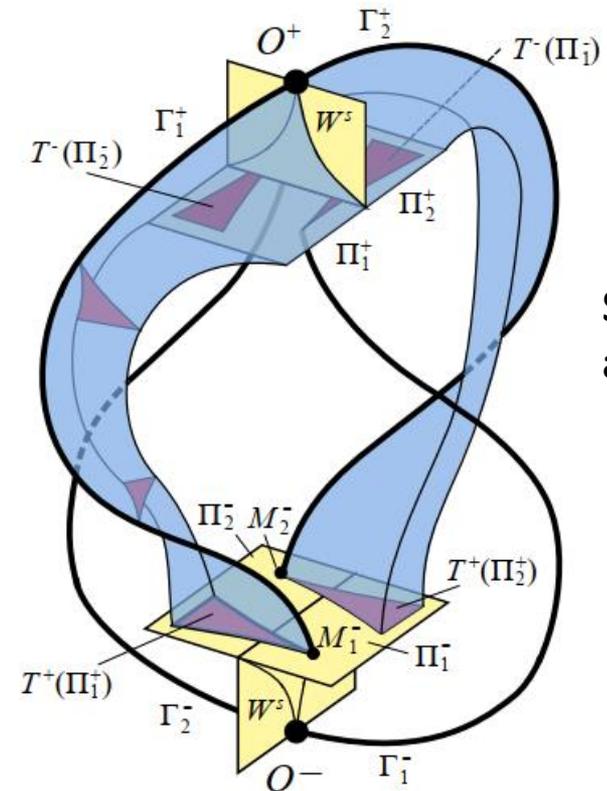
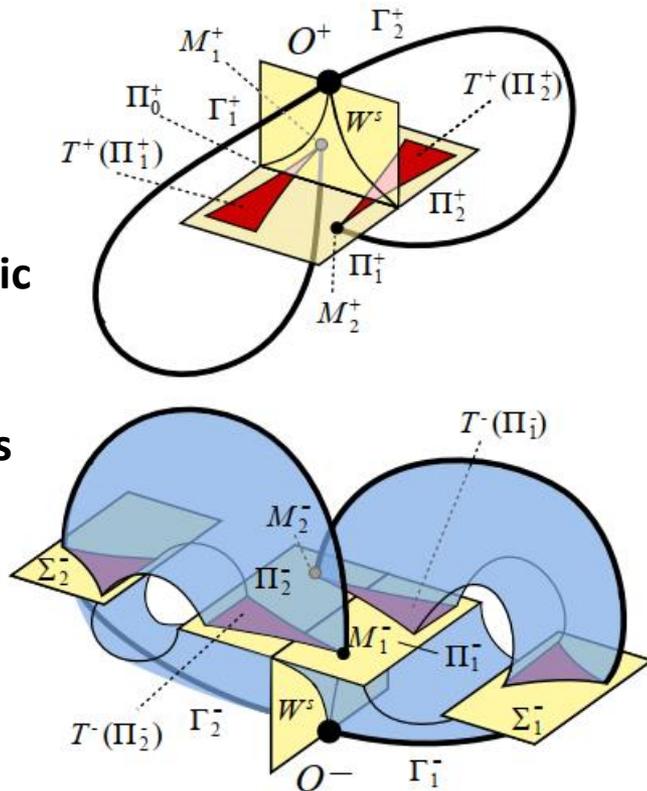
- Может быть определен с помощью геометрической модели

Геометрическая модель 4х-крылового аттрактора Лоренца

Consider a 3D system of ODEs. Assume that this system

- (A1) possesses Z_4 -symmetry \mathcal{S} ;
- (A2) has a pair of equilibria O^+ and O^- such that $O^+ = \mathcal{S}(O^-)$ and $O^- = \mathcal{S}(O^+)$, and eigenvalues γ, λ_1 , and λ_2 of these equilibria satisfy the conditions: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \gamma$ and $\nu = -\lambda_1/\gamma < 1$
- (A3) is pseudohyperbolic with $\dim E_1 = 2$ and $\dim E_2 = 1$ in an open forward-invariant domain \mathcal{D} that contains O^\pm .

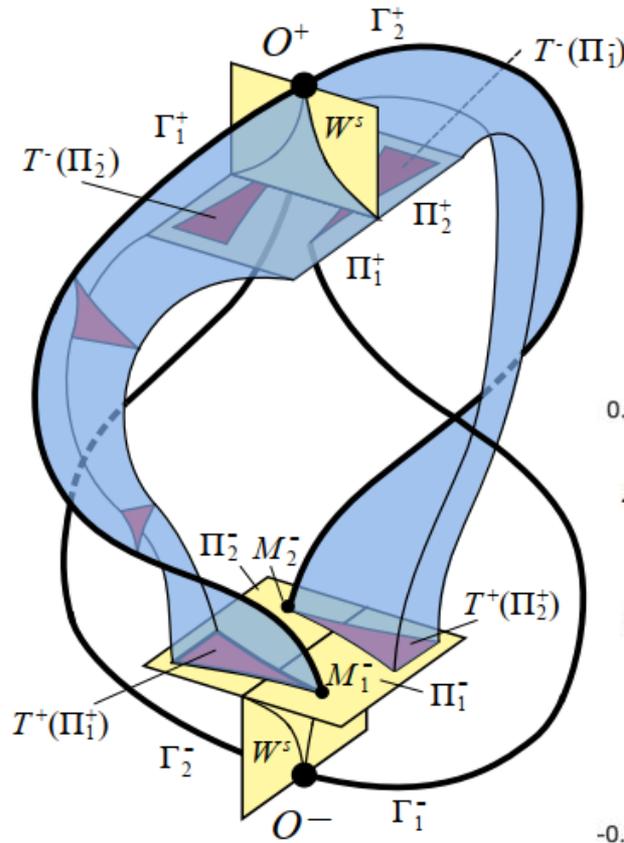
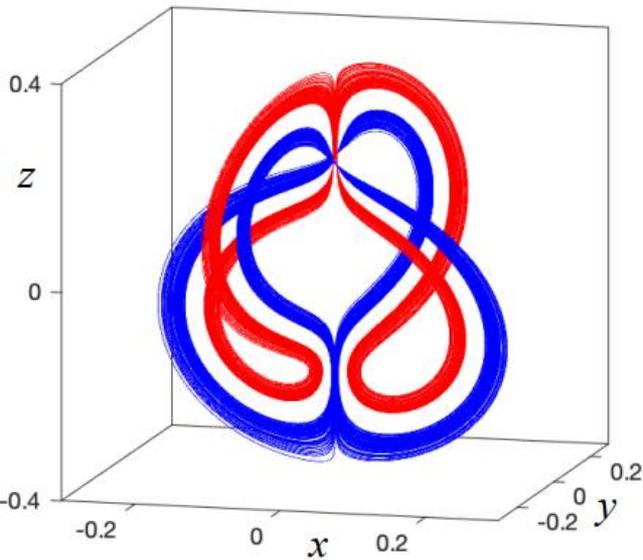
Symmetric pair of Lorenz attractors



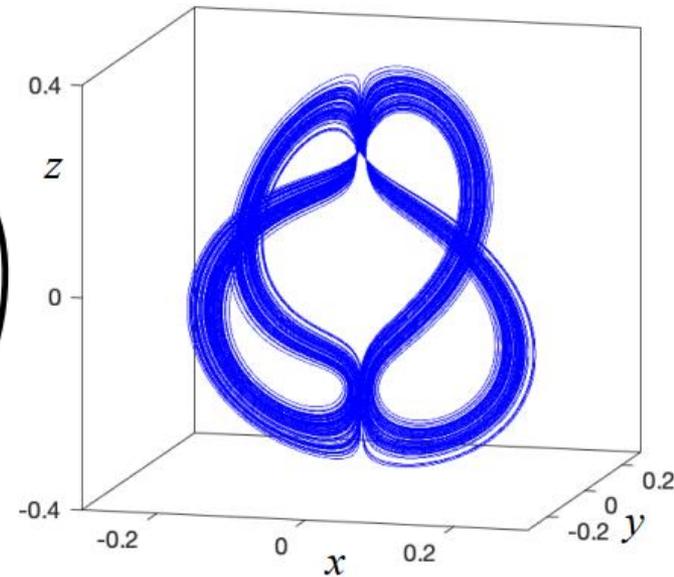
Simo angel attractor

Два типа четырехкрылых аттракторов

If O^+ and O^- belong to two different chain-transitive sets we have a pair of **2-winged Simo angels**



If O^+ and O^- belong to the same chain-transitive set we have a **4-winged Simo angels**



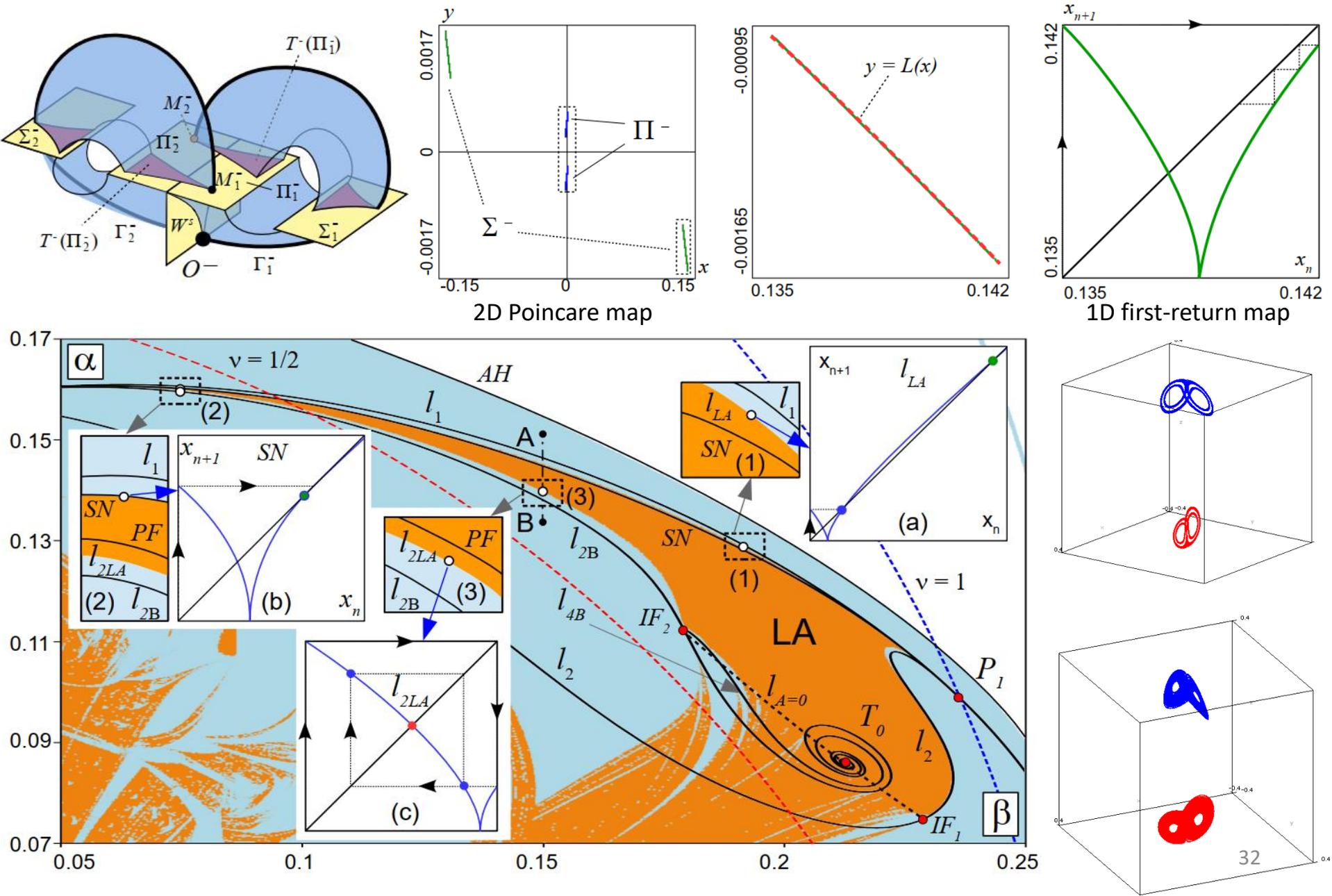
Due to the symmetry \mathcal{S} we have $T^- = \mathcal{S}^{-1} \circ T^+ \circ \mathcal{S}$

\Rightarrow the first return map from Π^+ to Π^+ is given by $T = -(\mathcal{S} \circ T^+)^2$.

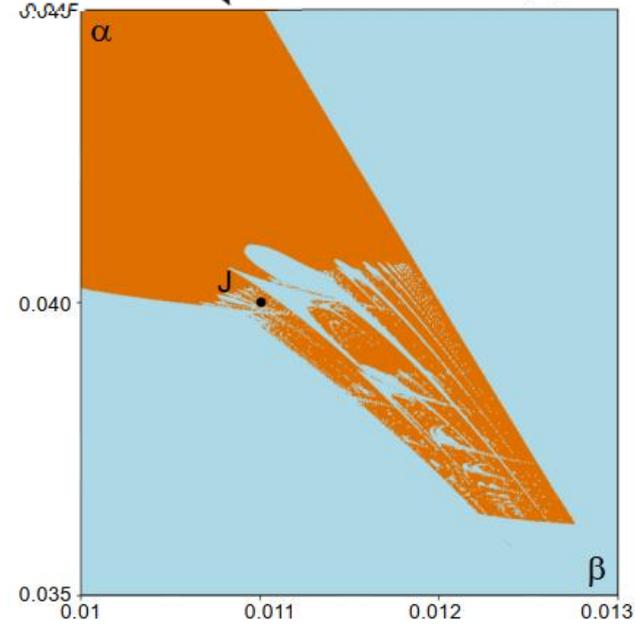
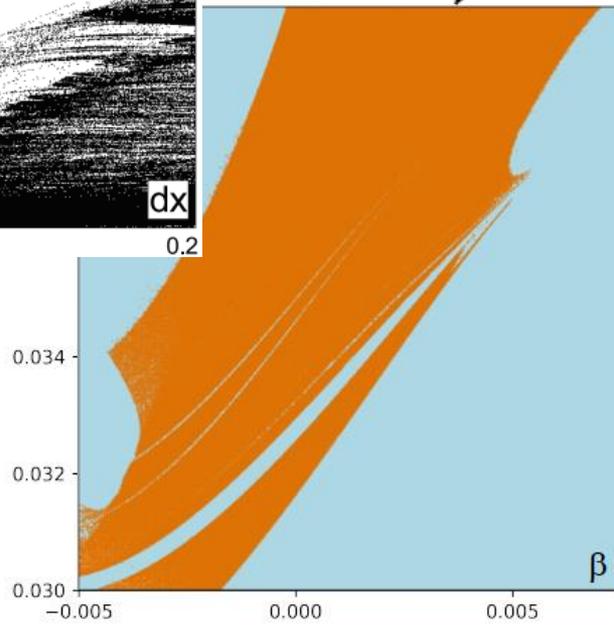
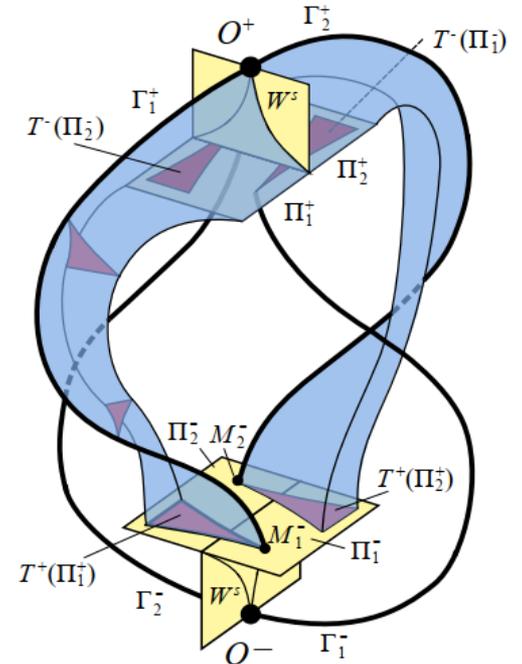
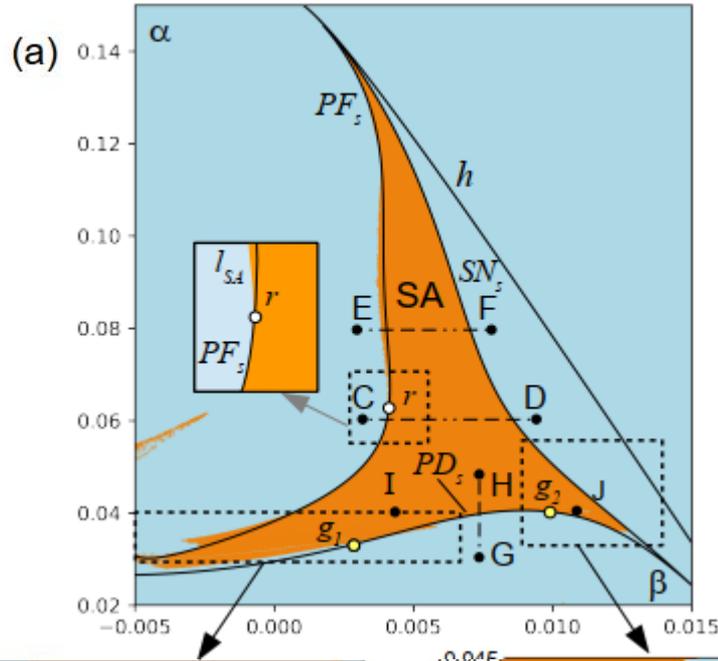
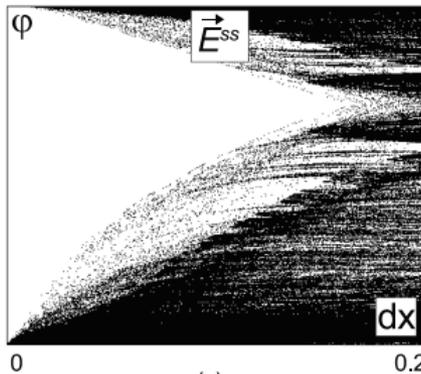
\Rightarrow the dynamics of T is captured by the iterations of the half-return map

$$\hat{T}^+ = \mathcal{S} \circ T^+ : \Pi_1^+ \cup \Pi_2^+ \rightarrow \Pi^-$$

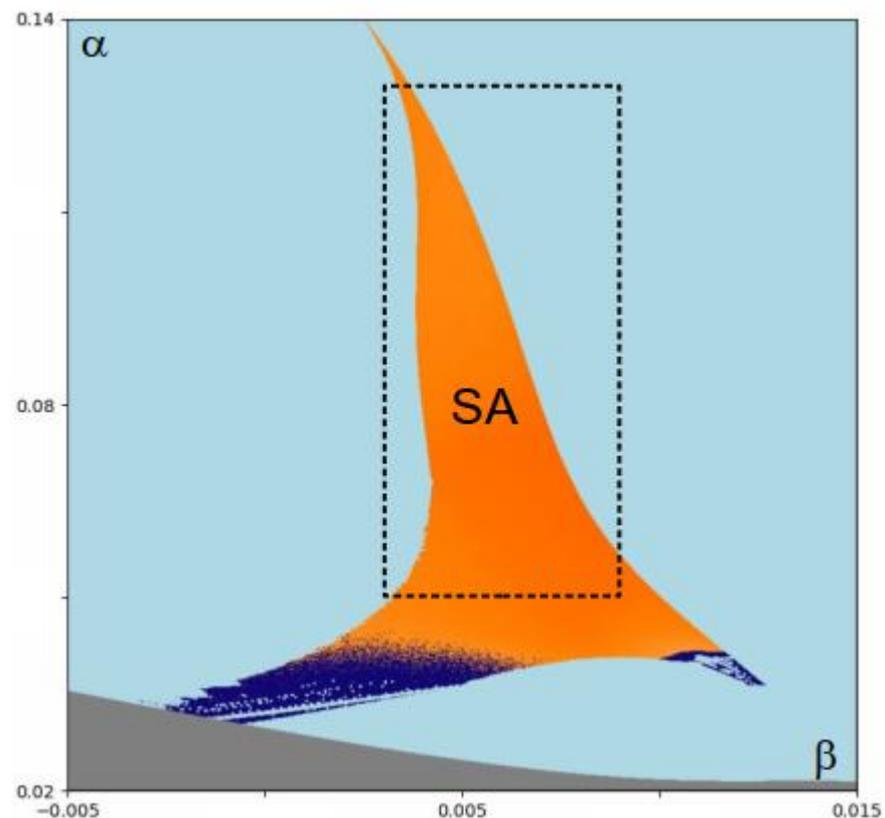
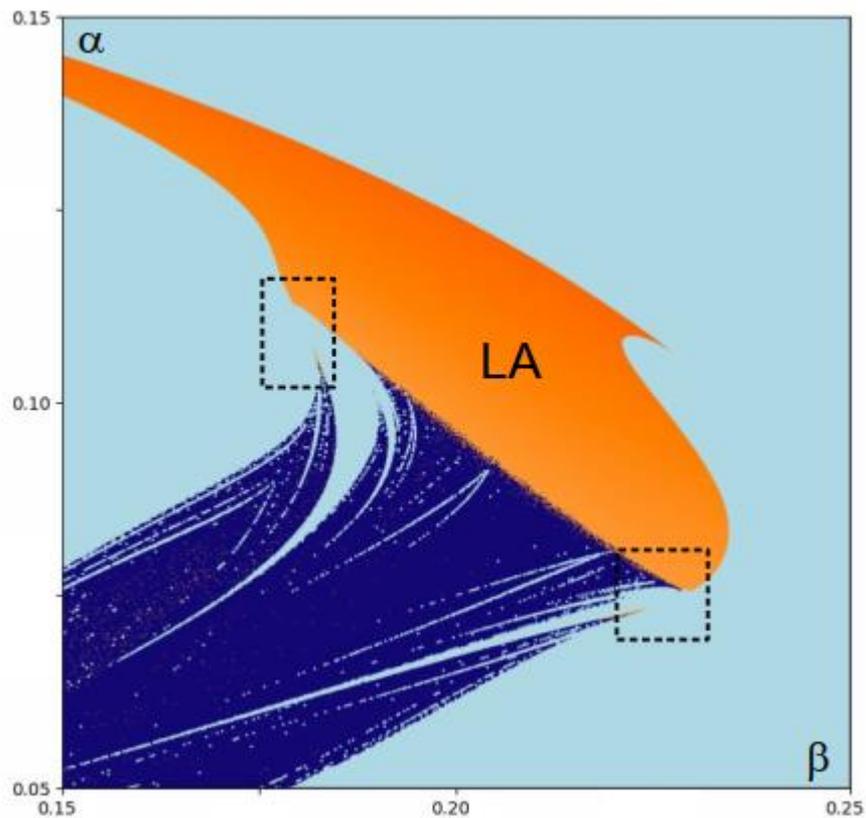
Пара аттракторов Лоренца в системе (*)



Четырехкрылый аттрактор Лоренца



Псевдогиперболичность аттракторов в системе (*)



Критерий рождения

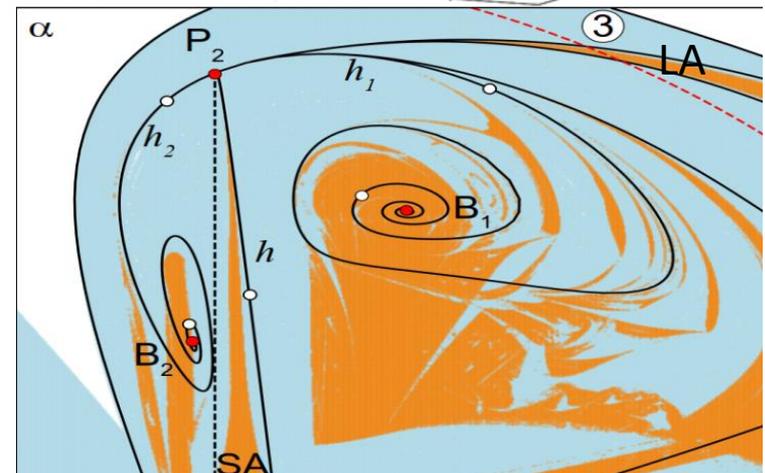
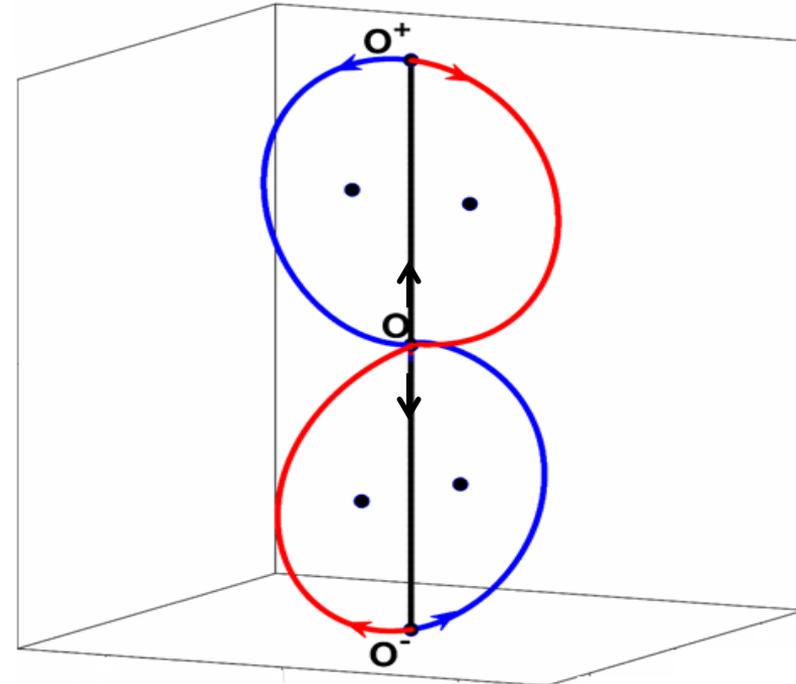
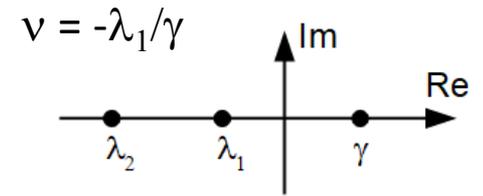
Consider Z_4 -symmetric system that satisfies the following conditions:

1. The system has a figure-8 heteroclinic connection as shown in Fig. The symmetric pair of equilibria O^+ and O^- are saddles of type $(2,1)$, while the central equilibrium O is a saddle of type $(1,2)$;
2. The restriction of the system to the stable manifold of the point O is a dicritical node ($\lambda_1(O) = \lambda_2(O)$).
3. The saddles indices $\nu(O^+)$, $\nu(O^-)$ and $\nu(O)$ satisfy the inequalities:

$$0 < \nu^{-1}(O) < \nu(O^+) < (1 + \nu^{-1}(O))/2 < 1,$$

Bifurcations of such a circle lead to the birth of the 2- and 4-winged pseudohyperbolic attractors [KKST24b]

[KKST24b] Karatetskaia, Kazakov, Safonov, Turaev
arXiv preprint arXiv:2408.06066. – 2024



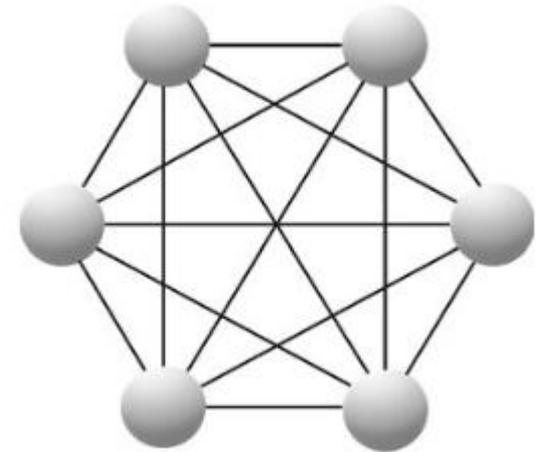
Приложение к моделям связанных осцилляторов

Осцилляторы идентичные, связаны каждый с каждым

$$\dot{\phi}_j = \omega + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(\phi_i - \phi_j), \quad j = 1, \dots, N,$$

$$g(\phi) = \sum_{k=1}^m A_k \sin(k\phi + \xi_k)$$

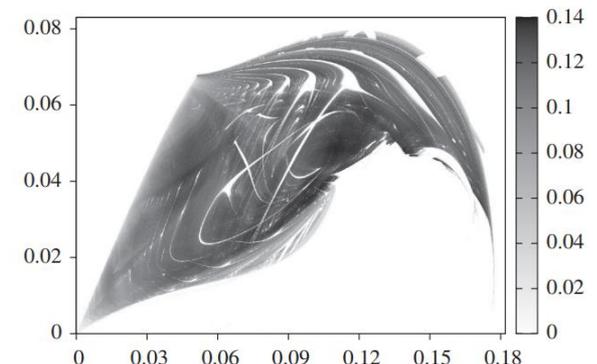
- $g(\phi) = A \sin(\phi + \xi)$ связь Курамото-Сакагучи
Динамика полностью интегрируема (когда $g(\phi) = A \cos(\phi)$) или же сводится к полной синхронизации
- Хаотическое поведение возможно, когда в функции связи больше одной гармоники ($m > 1$) [A07, B11, G23], при $N > 3$.
- **Во всех известных случаях хаос не робастный**



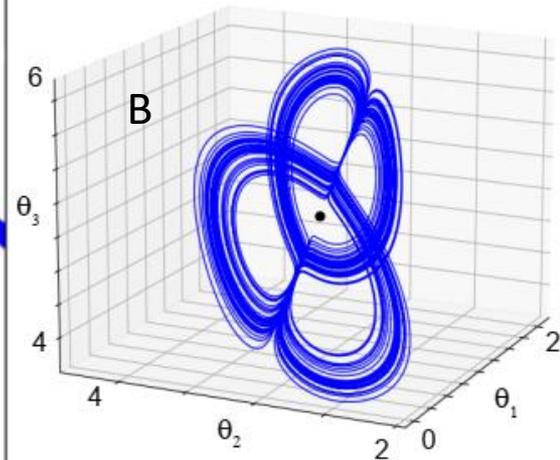
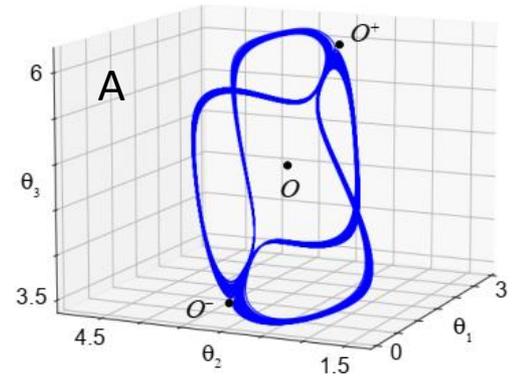
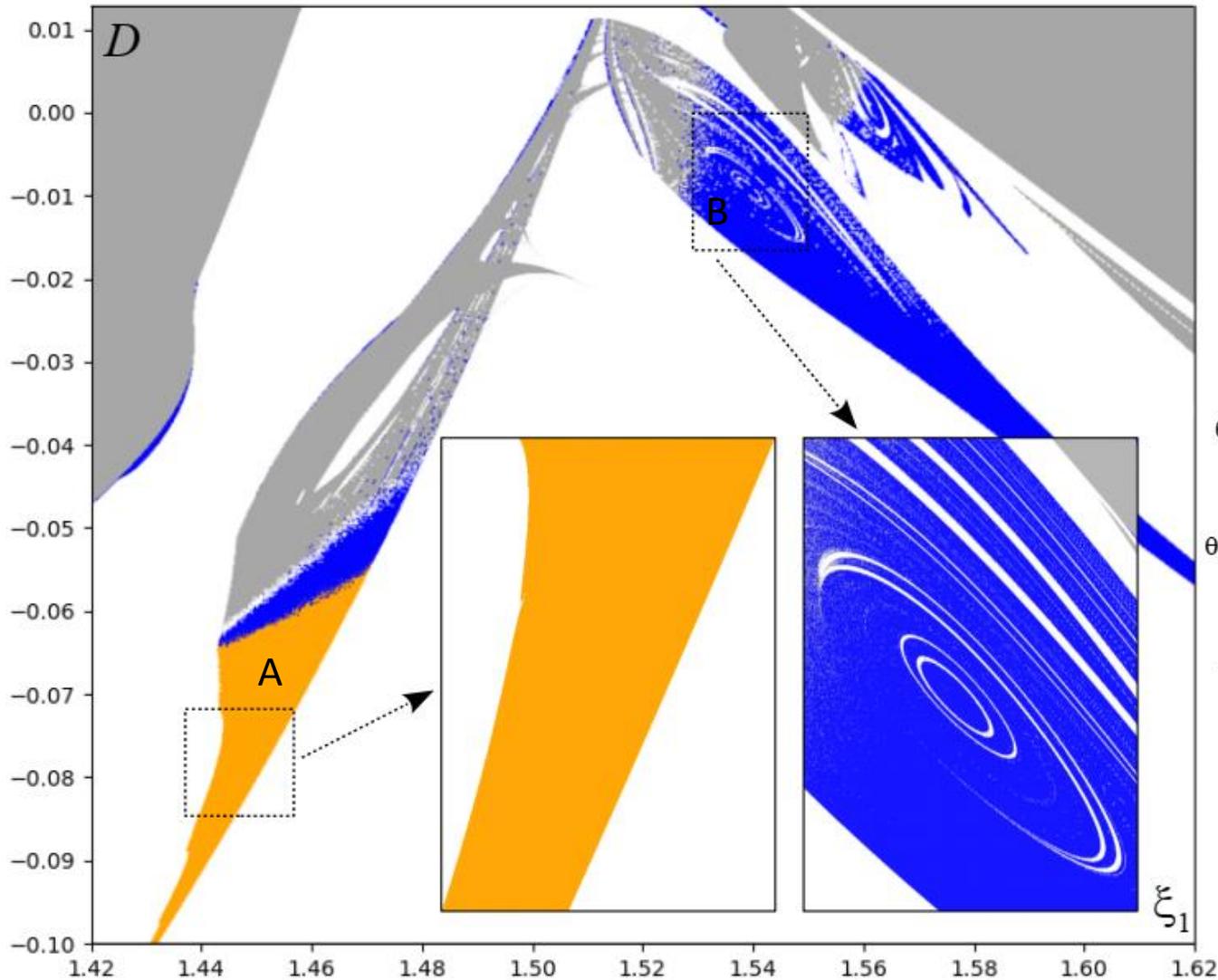
[A07] Ashwin et al // SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 2007

[B11] Bick et al // PRL, 2011

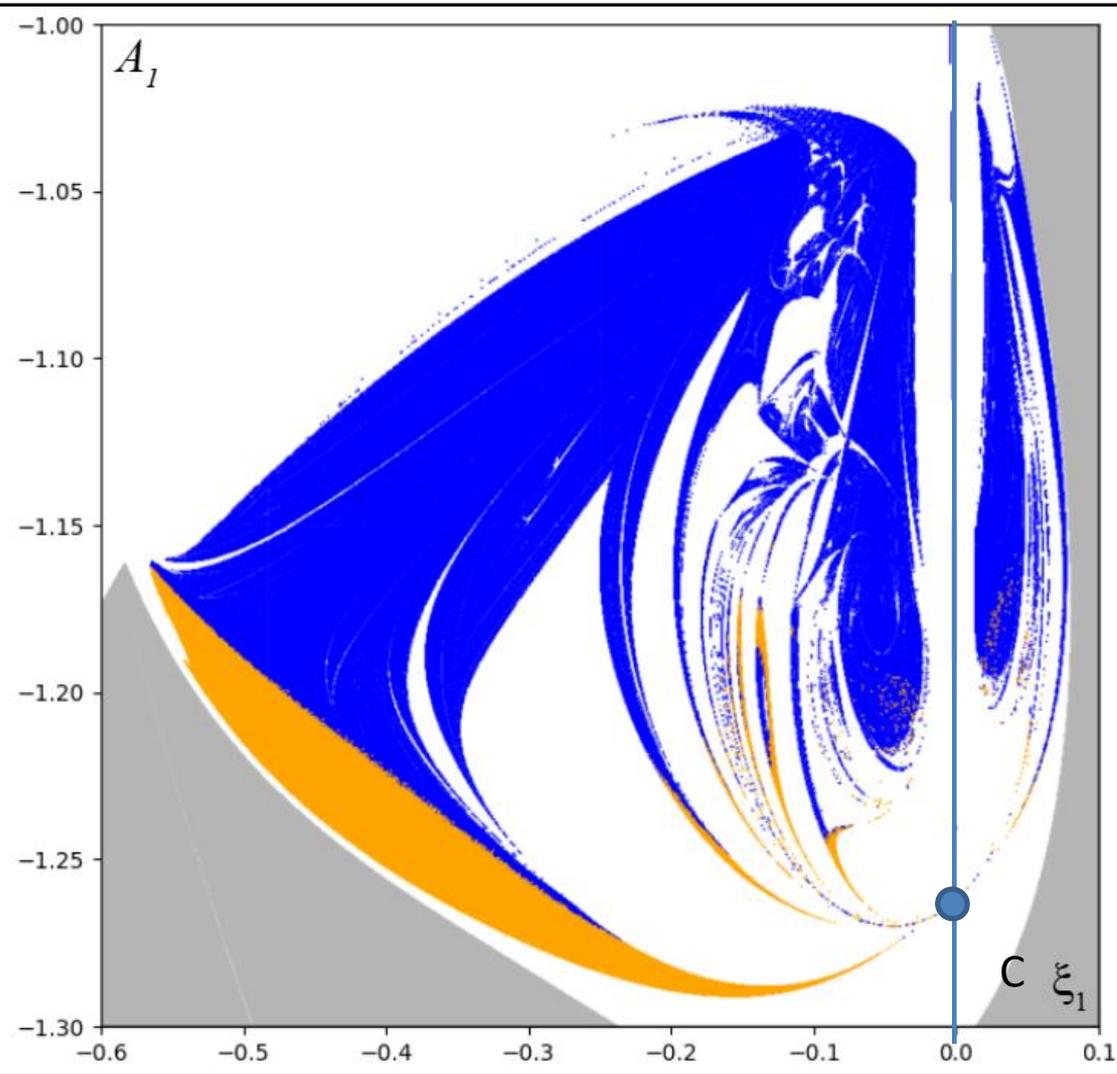
[G23] E. Grines et al // Chaos, 2023



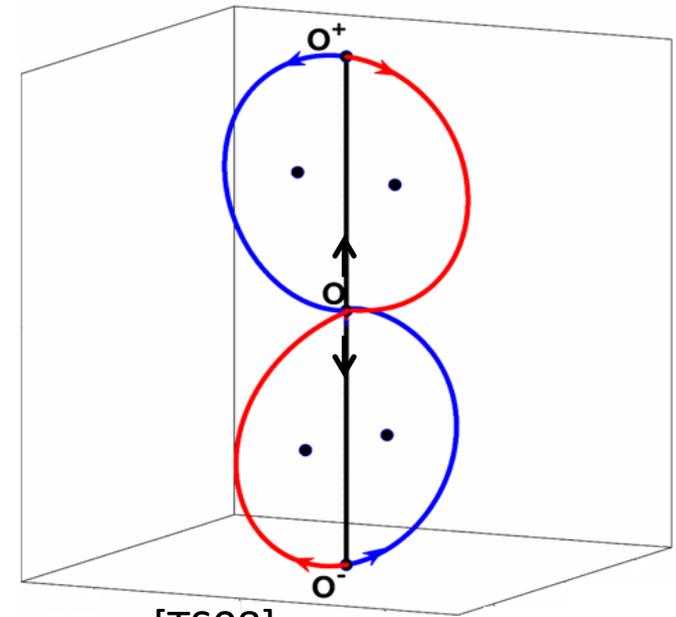
- Существование псевдогиперболических аттракторов установлено при $N=4$, $m=4$ [KKST24c]



- Даны условия на функцию связи, гарантирующие существования псевдогиперболических аттракторов



В точке С выполняются условия критерия рождения двух- и четырехкрылого аттрактора



Согласно [TS08], псевдогиперболическость сохраняется при слабой связи двух идентичных систем с псевдогиперболическим аттрактором

=> Псевдогиперболические аттракторы существуют в сетях связанных осцилляторов

Спасибо за внимание