

Автомодельный рост конических острий на поверхности проводящей жидкости в электрическом поле

Н.М. Зубарев

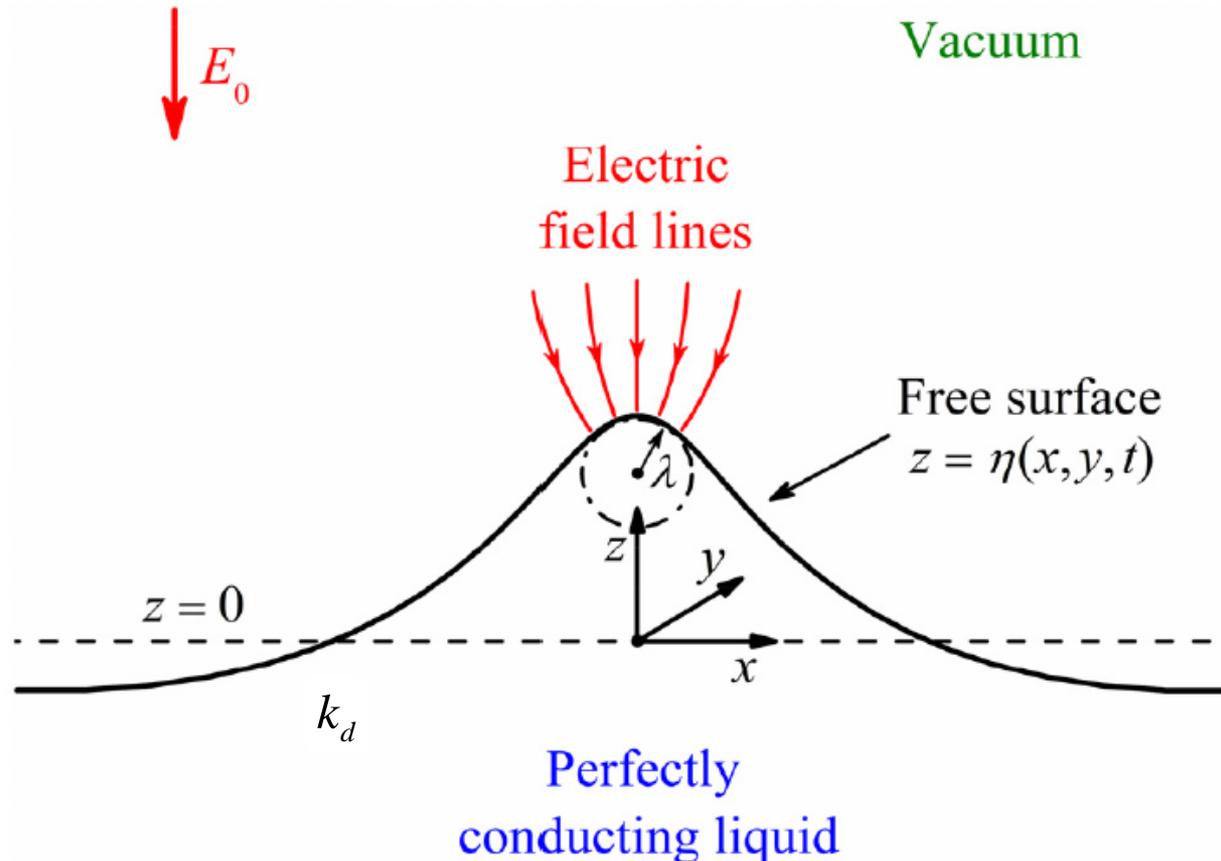
Институт электрофизики УрО РАН, Россия, Екатеринбург
Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Россия, Москва



XXI НАУЧНАЯ ШКОЛА
“**Нелинейные волны -2024**”

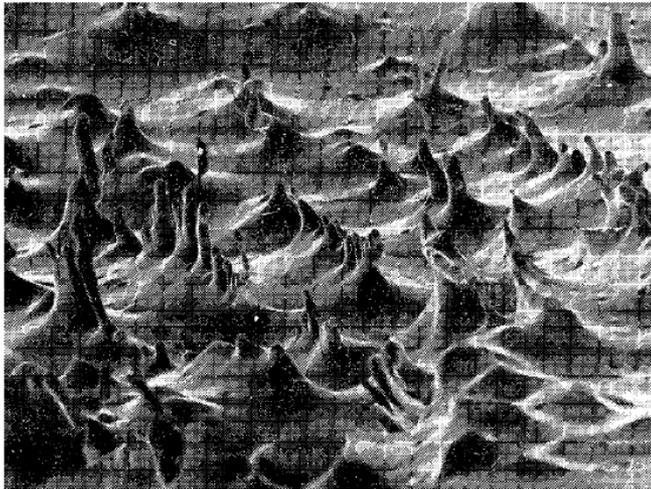
Нижний Новгород, 5 - 11 ноября

Неустойчивость Тонкса-Френкеля свободной поверхности идеально проводящей жидкости

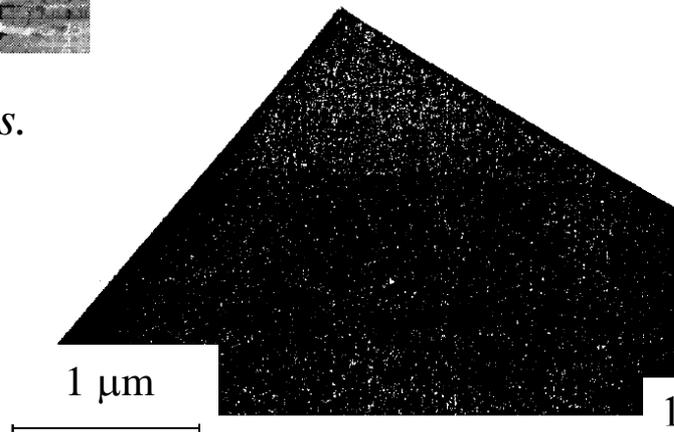


- L. Tonks, A theory of liquid surface rupture by a uniform electric field, *Phys. Rev.*, **48** (6), 562 (1935).
- I.Y. Frenkel, On the Tonks theory of the rupture of a liquid surface by an uniform electric field in vacuum, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **6** (4), 347 (1936).

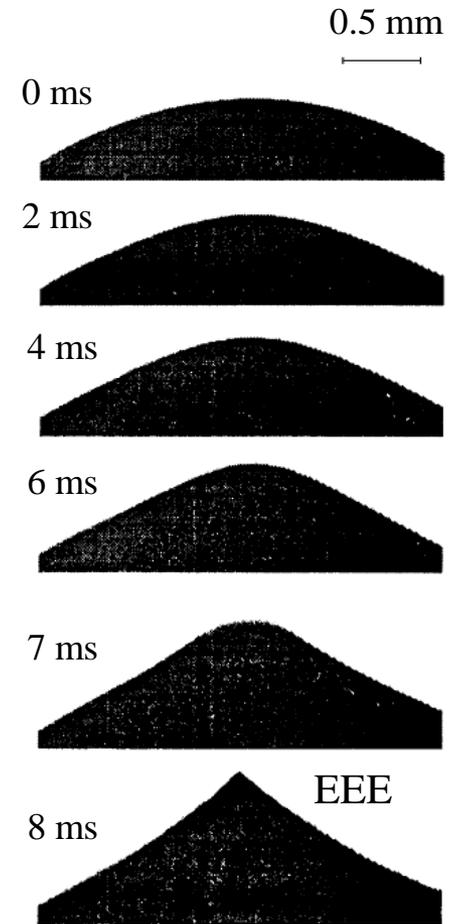
Неустойчивость Тонкса-Френкеля свободной поверхности идеально проводящей жидкости



M.D. Gabovich, *Sov. Phys. Usp.* **26**, 447 (1983)



W. Driesel, et al. *J. Vac. Sci. Technol. B*, **14**, 3367 (1996)



L.M. Baskin, et al. *IEEE Trans. Dielec. Electr. Insul.* **2**, 231 (1995)

Распределение электрического поля вокруг идеального проводящего конуса

Потенциал электрического поля удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0,$$

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan(r / z),$$

которое должно решаться совместно с условиями

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = 0, \quad \Phi \Big|_{\theta=\pm\pi\mp\alpha} = 0.$$

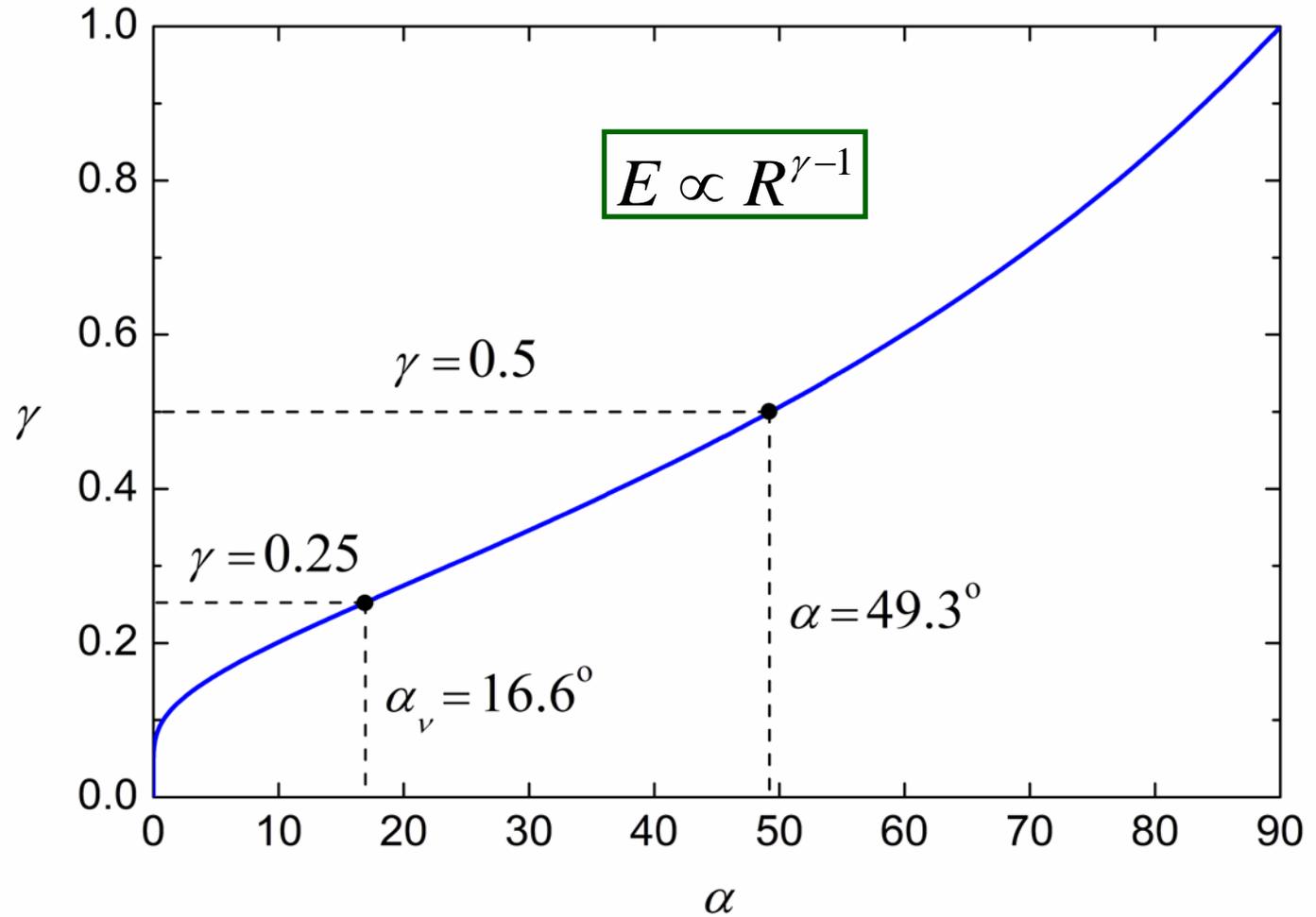
Самоподобное распределение потенциала электрического поля выражается через функцию Лежандра:

$$\Phi(R, \theta) \propto R^\gamma P_\gamma(\cos \theta).$$

Связь между параметром γ , определяющим степень неоднородности распределения поля, и полууглом раствора конуса α задается выражением:

$$P_\gamma(-\cos \alpha) = 0$$

$$0 \leq \gamma \leq 1$$



$$0 \leq \alpha \leq 90^\circ$$

$$\gamma = 1/2, \quad \alpha_T = 49.3^\circ$$

$$\gamma = 1/4, \quad \alpha_v = 16.6^\circ$$

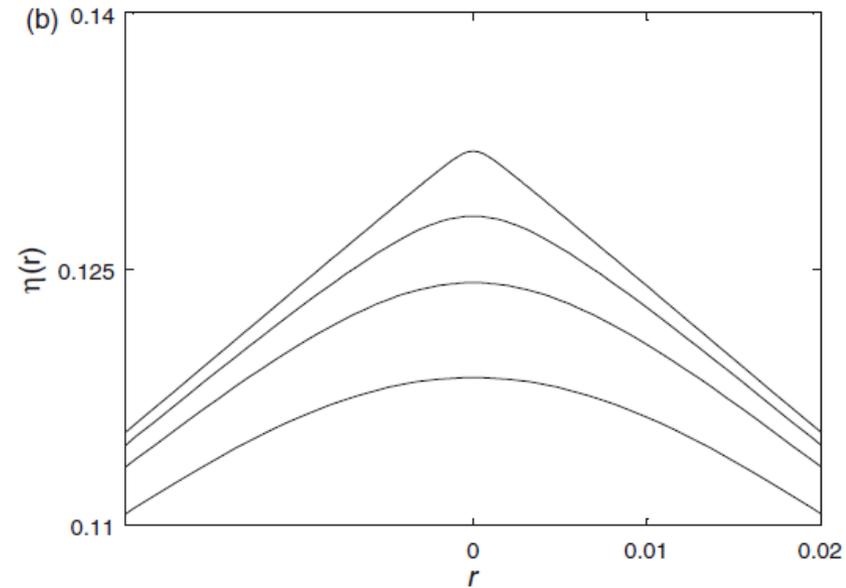
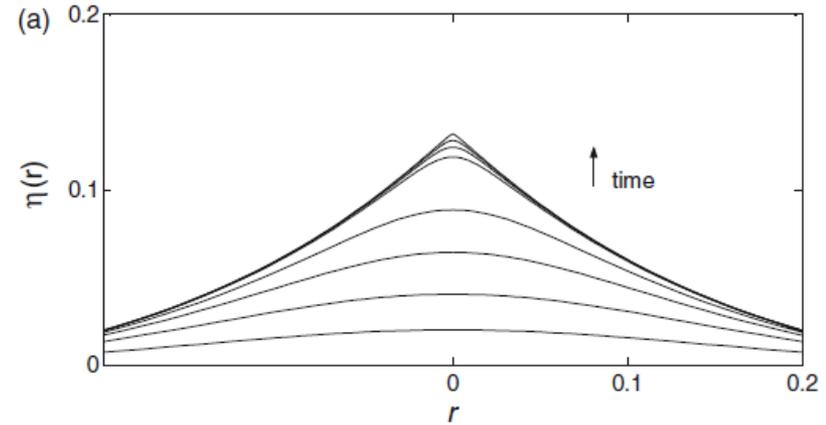
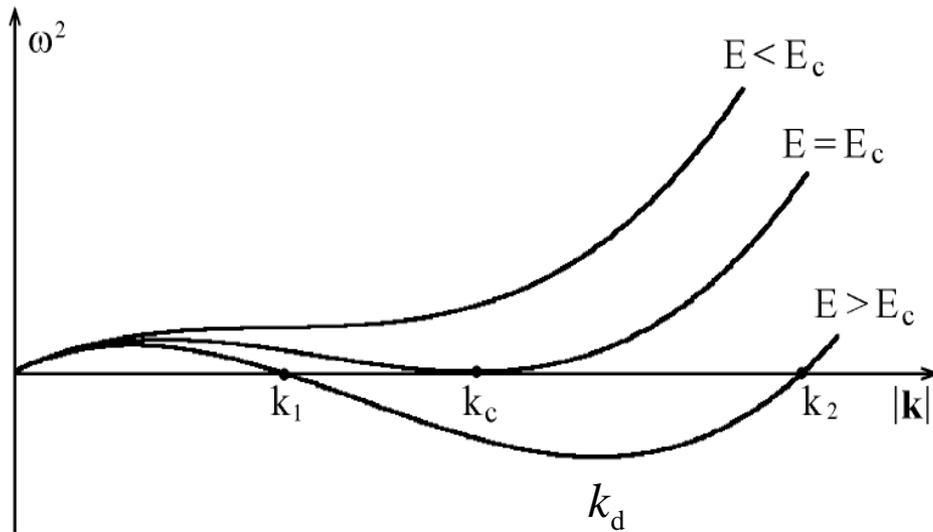
Дисперсионное соотношение (идеальная жидкость):

$$\eta \propto \exp(ik_x x + ik_y y - i\omega t)$$

$$\omega^2 = gk - \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{\rho} k^2 + \frac{\alpha}{\rho} k^3, \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}.$$

$$E_c = (4\varepsilon_0^{-2} \rho g \alpha)^{1/4}$$

$$k_c = (\rho g / \alpha)^{1/2}$$



Автомодельное течение идеальной жидкости: исходные уравнения

$$\Phi_{rr} + r^{-1}\Phi_r + \Phi_{zz} = 0, \quad z < \eta(r, t),$$

$$\varphi_{rr} + r^{-1}\varphi_r + \varphi_{zz} = 0, \quad z > \eta(r, t),$$

$$\Phi_t + \frac{\Phi_r^2 + \Phi_z^2}{2} = \frac{\varphi_r^2 + \varphi_z^2}{2} + \frac{1}{\sqrt{1 + \eta_r^2}} \left(\frac{\eta_{rr}}{1 + \eta_r^2} + \frac{\eta_r}{r} \right), \quad z = \eta(r, t),$$

$$\eta_t = \Phi_z - \eta_r \Phi_r, \quad z = \eta(r, t),$$

$$\varphi = 0, \quad z = \eta(r, t),$$

$$\Phi_r^2 + \Phi_z^2 \rightarrow 0, \quad r^2 + z^2 \rightarrow \infty,$$

$$\varphi_r^2 + \varphi_z^2 \rightarrow 0, \quad r^2 + z^2 \rightarrow \infty,$$

$$\Phi_r = 0, \quad r = 0,$$

$$\varphi_r = 0, \quad r = 0,$$

$$\eta_r = 0, \quad r = 0.$$

Условие на
вершине выступа:

$$E \equiv |\nabla \varphi| \gg E_0$$

Автомодельная редукция

$$\Phi(x, y, z, t) = \tilde{\Phi}(\tilde{r}, \tilde{z})\tau^{1/3}, \quad r = \tilde{r}\tau^{2/3},$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \tilde{\varphi}(\tilde{r}, \tilde{z})\tau^{1/3}, \quad z = \tilde{z}\tau^{2/3},$$

$$\eta(x, y, t) = \tilde{\eta}(\tilde{r})\tau^{2/3}, \quad \tau = t_c - t$$

$$\lambda \propto (t_c - t)^{2/3}$$

$$\tilde{\Phi}_{\tilde{r}\tilde{r}} + \tilde{r}^{-1}\tilde{\Phi}_{\tilde{r}} + \tilde{\Phi}_{\tilde{z}\tilde{z}} = 0, \quad \tilde{z} < \tilde{\eta}(\tilde{r}),$$

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{r}\tilde{r}} + \tilde{r}^{-1}\tilde{\varphi}_{\tilde{r}} + \tilde{\varphi}_{\tilde{z}\tilde{z}} = 0, \quad \tilde{z} > \tilde{\eta}(\tilde{r}),$$

$$\frac{2\tilde{\Phi}_{\tilde{r}\tilde{r}}\tilde{r} + 2\tilde{\Phi}_{\tilde{z}\tilde{z}}\tilde{\eta} - \tilde{\Phi}}{3} + \frac{\tilde{\Phi}_{\tilde{r}}^2 + \tilde{\Phi}_{\tilde{z}}^2}{2} = \frac{\tilde{\varphi}_{\tilde{r}}^2 + \tilde{\varphi}_{\tilde{z}}^2}{2} + \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{\eta}_{\tilde{r}}^2}} \left(\frac{\tilde{\eta}_{\tilde{r}\tilde{r}}}{1 + \tilde{\eta}_{\tilde{r}}^2} + \frac{\tilde{\eta}_{\tilde{r}}}{\tilde{r}} \right), \quad \tilde{z} = \tilde{\eta}(\tilde{r}),$$

$$2\tilde{\eta}_{\tilde{r}}\tilde{r} - 2\tilde{\eta} = 3\tilde{\Phi}_{\tilde{z}} - 3\tilde{\eta}_{\tilde{r}}\tilde{\Phi}_{\tilde{r}}, \quad \tilde{z} = \tilde{\eta}(\tilde{r}),$$

$$\tilde{\varphi} = 0, \quad \tilde{z} = \tilde{\eta}(\tilde{r}),$$

$$\tilde{\Phi}_{\tilde{r}}^2 + \tilde{\Phi}_{\tilde{z}}^2 \rightarrow 0, \quad \tilde{r}^2 + \tilde{z}^2 \rightarrow \infty,$$

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{r}}^2 + \tilde{\varphi}_{\tilde{z}}^2 \rightarrow 0, \quad \tilde{r}^2 + \tilde{z}^2 \rightarrow \infty,$$

$$\tilde{\Phi}_{\tilde{r}} = 0, \quad \tilde{r} = 0,$$

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{r}} = 0, \quad \tilde{r} = 0,$$

$$\tilde{\eta}_{\tilde{r}} = 0, \quad \tilde{r} = 0.$$

Автомодельное решение в пределе $R \rightarrow \infty$

$$\tilde{\varphi}(\tilde{r}, \tilde{z}) = \tilde{\varphi}_0(\tilde{r}, \tilde{z}) = p^{-1} [2R(s_0 - s)]^{1/2} P_{1/2}(\cos \theta),$$

$$\tilde{\Phi}(\tilde{r}, \tilde{z}) = \tilde{\Phi}_0(\tilde{r}, \tilde{z}) = sR^{-1},$$

$$\tilde{\eta}(\tilde{r}) = \tilde{\eta}_0(\tilde{r}) = -s_0\tilde{r},$$

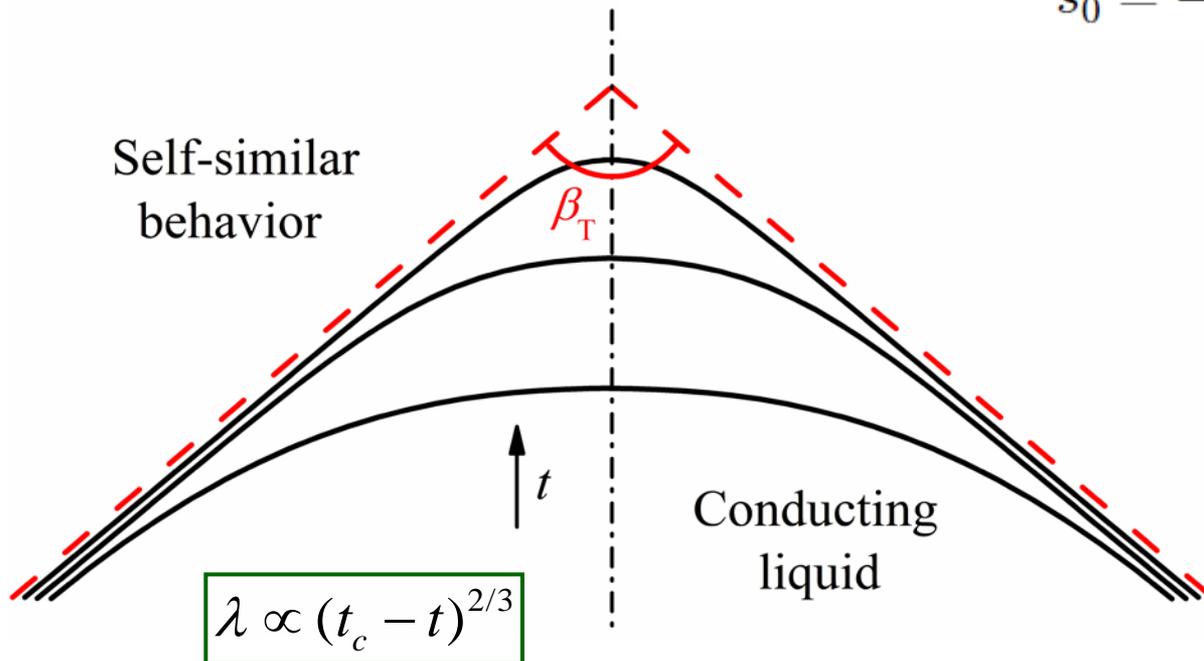
$$P_{1/2}(\cos \theta_0) = 0,$$

$$p = -\sin \theta_0 P'_{1/2}(\cos \theta_0),$$

$$s_0 = -\text{ctg } \theta_0,$$

$$R = \sqrt{\tilde{r}^2 + \tilde{z}^2}$$

$$\theta = \text{arctg}(\tilde{r}/\tilde{z})$$



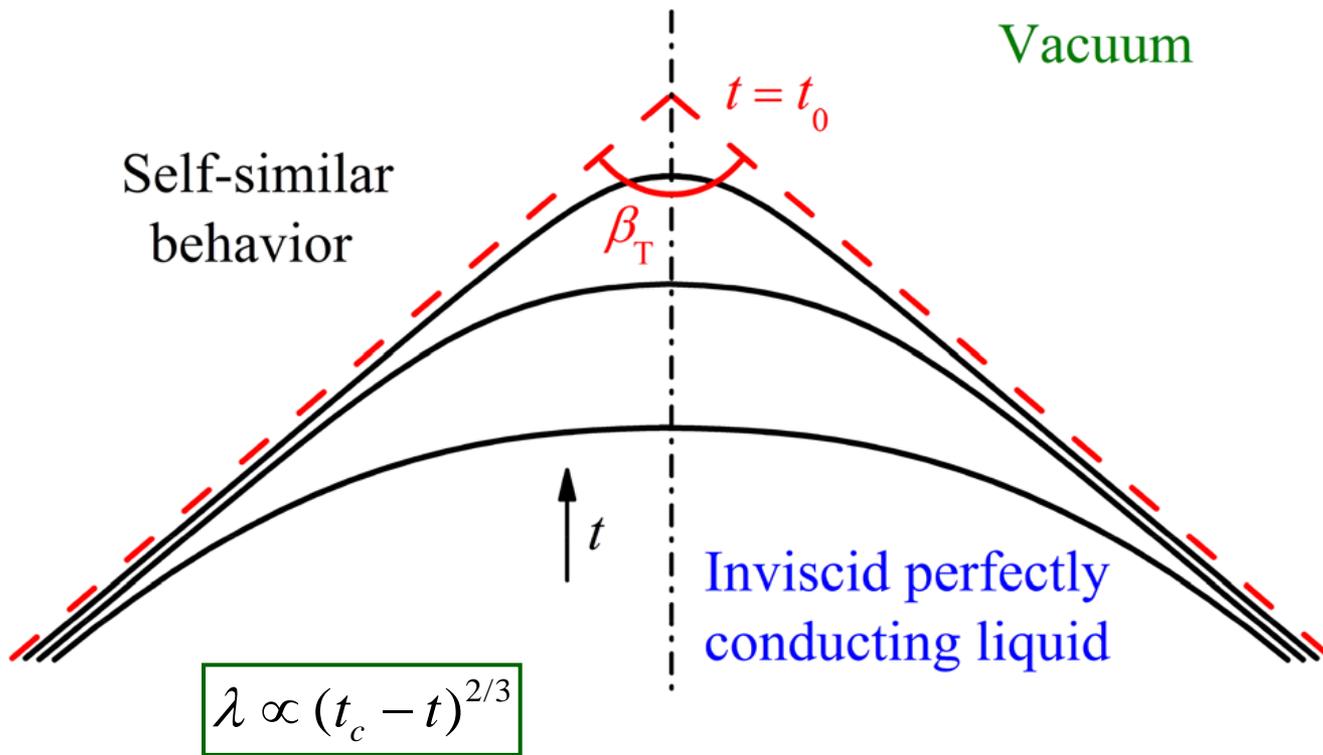
Угол Тейлора:

$$\beta_T \approx 98.6^\circ$$

$$\alpha_T = \beta_T / 2 \approx 49.3^\circ$$

Динамический конус Тейлора

Не следует путать **стационарные** конические образования на поверхности жидкости в электрическом поле (обычные статические конусы Тейлора) и **динамические** конусы, возникающие в процессе развития неустойчивости Тонкса-Френкеля.



Vacuum

Угол Тейлора:

$$\beta_T \approx 98.6^\circ$$

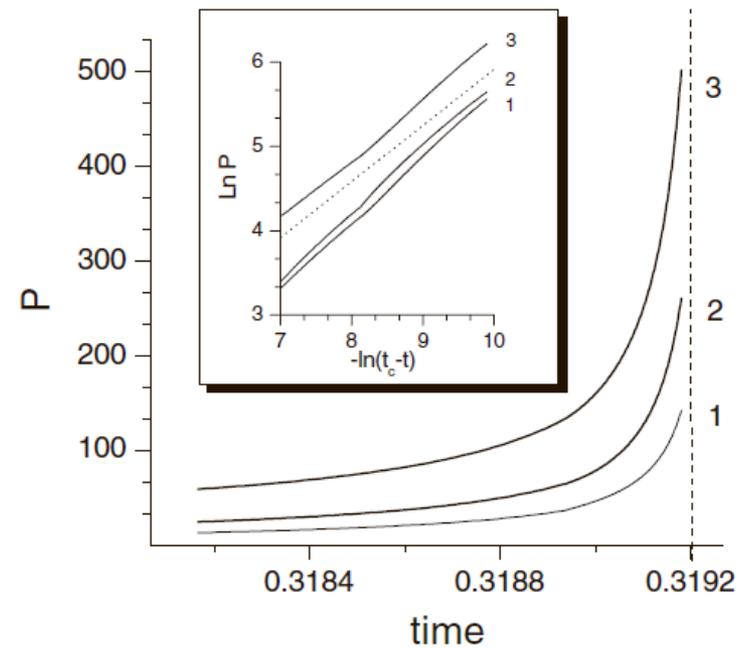
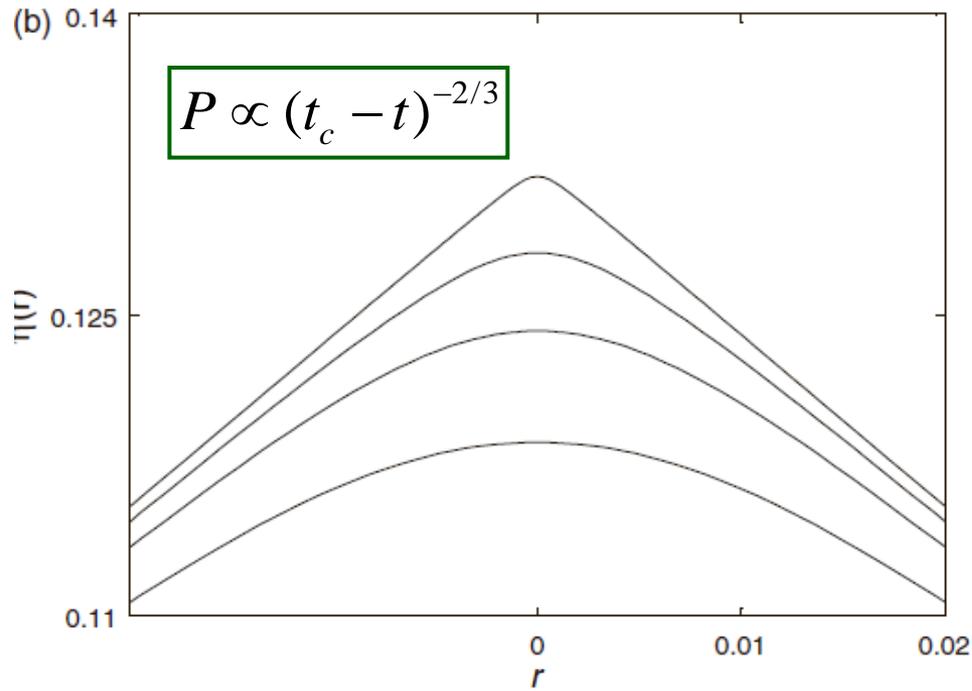
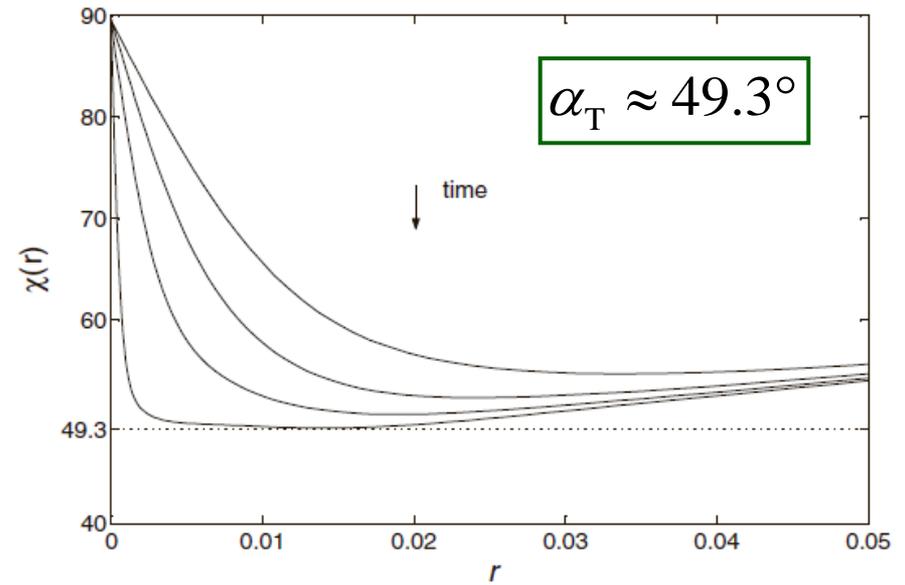
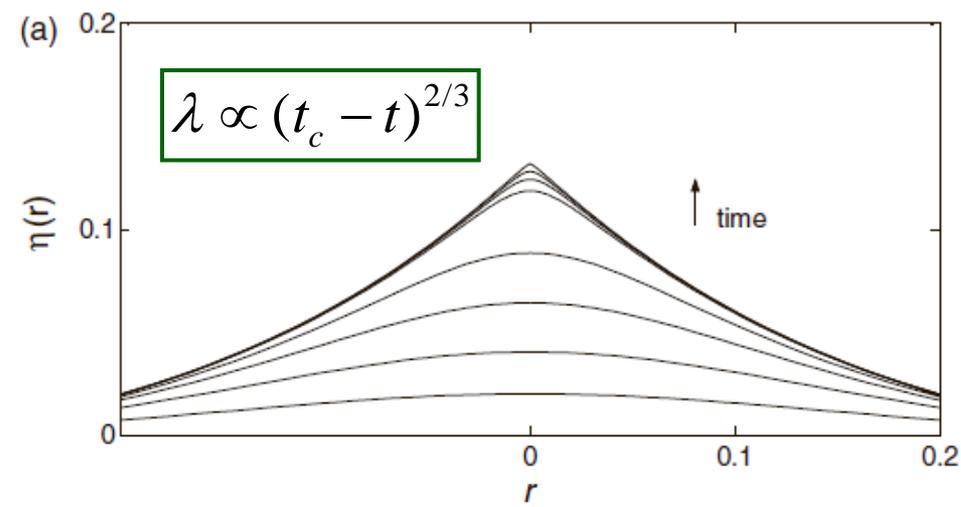
Статический конус Тейлора:

$$P_E \propto P_\alpha$$

$$P_\alpha \propto 1/R$$

$$P_E \propto E^2 \propto 1/R$$

$$E \propto 1/\sqrt{R}$$



V.G. Suvorov, N.M. Zubarev. Formation of the Taylor cone on the surface of liquid metal in the presence of an electric field. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **37** (2), 289 (2004).

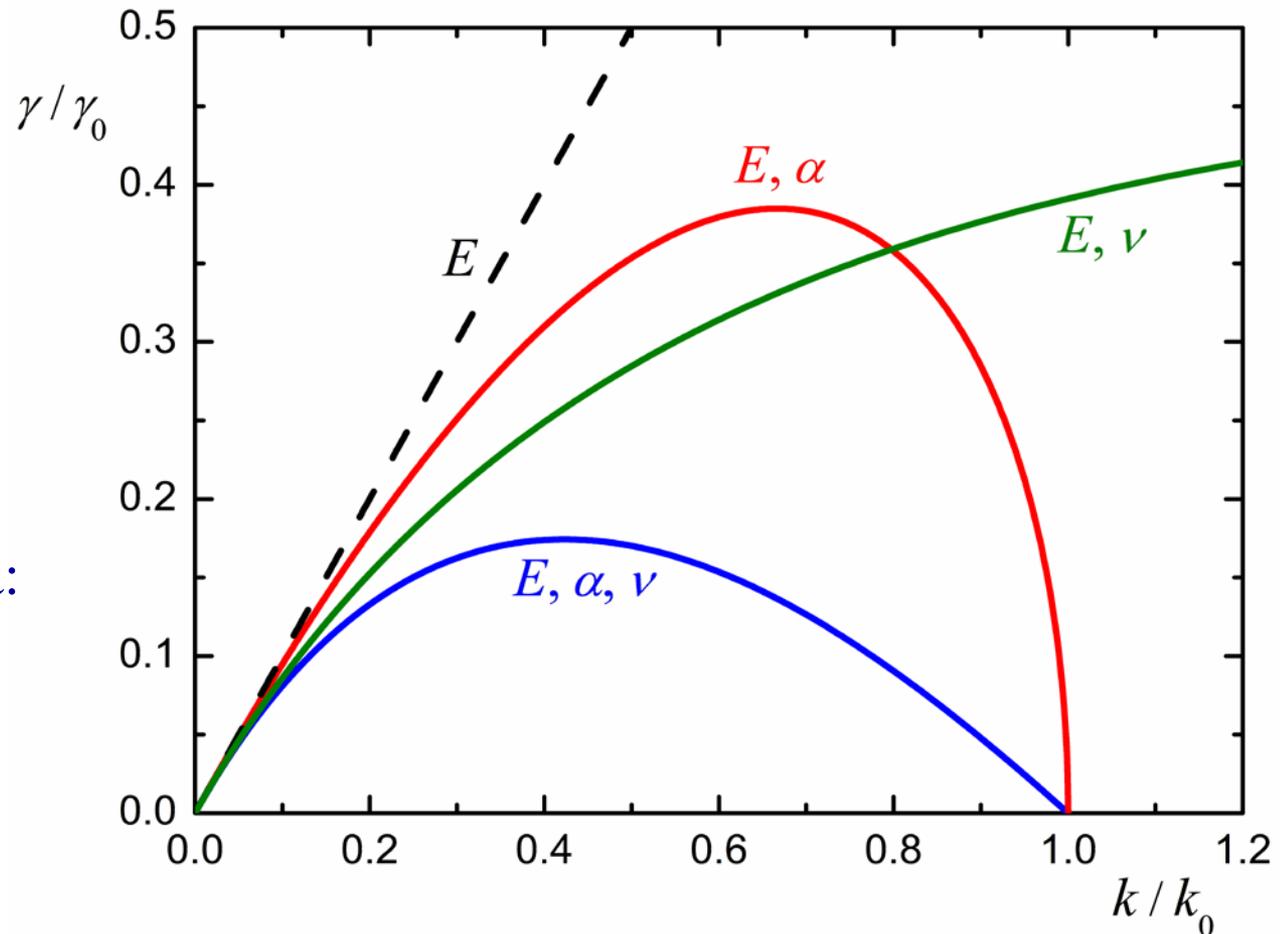
Доминантная мода неустойчивости Тонкса-Френкеля

Закон дисперсии для случая $E_0 \gg E_c$.

Инкремент неустойчивости: $\gamma = \text{Im } \omega$.

Доминантная мода
 k_d определяется из
условия экстремума:

$$\partial \gamma / \partial k = 0$$



Автомодельное течение идеальной жидкости: качественное рассмотрение на основе закона дисперсии

$$\rho\gamma^2 = \varepsilon_0 E_0^2 k^2 - \alpha k^3$$

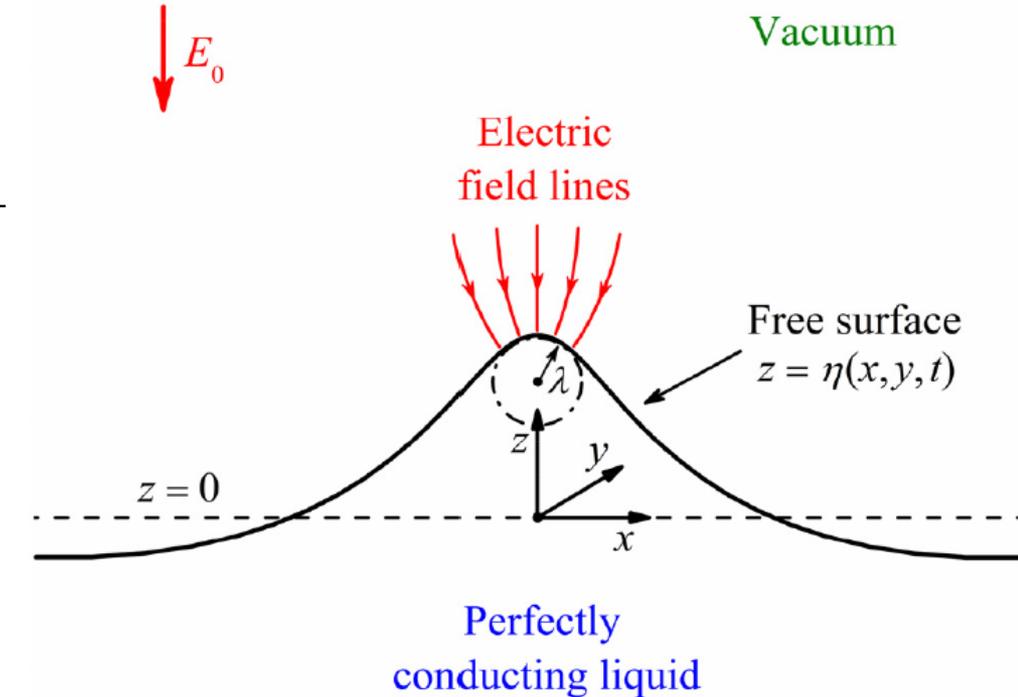
$$\partial\gamma / \partial k = 0$$

$$\lambda_{\text{lin}} = \frac{2\pi}{k_d} = \frac{3\pi\alpha}{\varepsilon_0 E_0^2} \quad \tau_{\text{lin}} = \frac{1}{\gamma_d} = \frac{3^{3/2} \alpha \rho^{1/2}}{2\varepsilon_0^{3/2} E_0^3}$$

Учтем влияние нелинейности,
заменяя в законе дисперсии
внешнее поле на локальное:

$$E_0 \rightarrow E$$

$$\lambda_{\text{nl}} = \frac{3\pi\alpha}{\varepsilon_0 E^2} \quad \tau_{\text{nl}} = \frac{3^{3/2} \alpha \rho^{1/2}}{2\varepsilon_0^{3/2} E^3}$$



$$\lambda \propto \tau^{2/3}$$

$$E \propto \lambda^{-1/2}$$

$$\alpha = \alpha_T$$

Дисперсионное соотношение для вязкой жидкости

При уменьшении характерного пространственного масштаба задачи возникает необходимость учета конечности вязкости жидкости.

Закон дисперсии электрокапиллярных поверхностных волн на свободной поверхности идеальной жидкости в вертикальном электрическом поле напряженностью E_0 :

$$\rho\omega^2 = -\varepsilon_0 E_0^2 k^2 + \alpha k^3.$$

Закон дисперсии гравитационных волн на свободной поверхности вязкой жидкости [L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, NY, 1959]:

$$\rho(2\nu k^2 - i\omega)^2 + \rho g k = 4\rho\nu^{3/2} k^3 \sqrt{\nu k^2 - i\omega}.$$

Закон дисперсии поверхностных волн на границе вязкой жидкости в вертикальном электрическом поле строится заменой $\rho g k \rightarrow -\varepsilon_0 E_0^2 k^2 + \alpha k^3$.

Находим:

$$\rho(2\nu k^2 - i\omega)^2 - \varepsilon_0 E_0^2 k^2 + \alpha k^3 = 4\rho\nu^{3/2} k^3 \sqrt{\nu k^2 - i\omega}$$

$$\rho(\gamma + 2\nu k^2)^2 - \varepsilon_0 E_0^2 k^2 + \alpha k^3 = 4\rho\nu^{3/2} k^3 \sqrt{\gamma + \nu k^2}, \quad \omega = i\gamma.$$

Дисперсионное соотношение для вязкой жидкости

Снова учтем влияние нелинейности, заменив в законе дисперсии внешнее поле на локальное: $E_0 \rightarrow E$.

$$\rho(\gamma + 2\nu k^2)^2 - \varepsilon_0 E^2 k^2 + \alpha k^3 = 4\rho\nu^{3/2} k^3 \sqrt{\gamma + \nu k^2}$$

Доминантная мода неустойчивости определяется условием $\partial\gamma / \partial k = 0$, т.е.

$$8\rho\nu k(\gamma + 2\nu k^2) - 2\varepsilon_0 E^2 k + 3\alpha k^2 = 12\rho\nu^{3/2} k^2 \sqrt{\gamma + \nu k^2} + 4\rho\nu^{5/2} k^4 / \sqrt{\gamma + \nu k^2}.$$

Исключая E , находим связь между пространственным и временным масштабами задачи:

$$2\rho k_d^{-1} (4\nu^2 k_d^4 - \gamma_d^2) + \alpha k_d^2 = 4\rho\nu^{3/2} k_d^2 \sqrt{\gamma + \nu k_d^2} + 4\rho\nu^{5/2} k_d^4 / \sqrt{\gamma_d + \nu k_d^2},$$

$$\gamma_d(k_d) = k_d^{3/2} F(k_d).$$

Здесь F – слабая функция, меняющаяся в узком диапазоне

$$0.6\sqrt{\alpha / \rho} < F(k_d) < 0.7\sqrt{\alpha / \rho}$$

при изменении волнового числа k_d от нуля до бесконечности.

Связь между масштабами задачи

$$\gamma_d \propto k_d^{3/2}$$

Для пределов малых (идеальная жидкость) и больших (вязкая жидкость) волновых чисел реализуются принципиально различные зависимости масштабов задачи от локальной напряженности электрического поля E :

$$k_d \approx \frac{2\varepsilon_0 E^2}{3\alpha}, \quad \gamma_d \approx \frac{2\varepsilon_0^{3/2} E^3}{3^{3/2} \alpha \rho^{1/2}}, \quad k_d \rightarrow 0$$

$$k_d \approx \frac{3^{1/3} \varepsilon_0^{2/3} E^{4/3}}{2^{2/3} \nu^{2/3} \alpha^{1/3} \rho^{1/3}}, \quad \gamma_d \approx \frac{\varepsilon_0 E^2}{2\nu\rho}, \quad k_d \rightarrow \infty$$

Это свидетельствует об изменении характера баланса сил в уравнениях движения. В первом случае основной баланс реализуется между динамическими, электростатическими и капиллярными силами*, а во втором – между электростатическими и вязкими силами**.

* N.M. Zubarev, JETP Lett. 73, 544 (2001)

** S.I. Betelú, M.A. Fontelos, U. Kindelán, O. Vantzós, *Phys. Fluids* **18**, 051706 (2006).

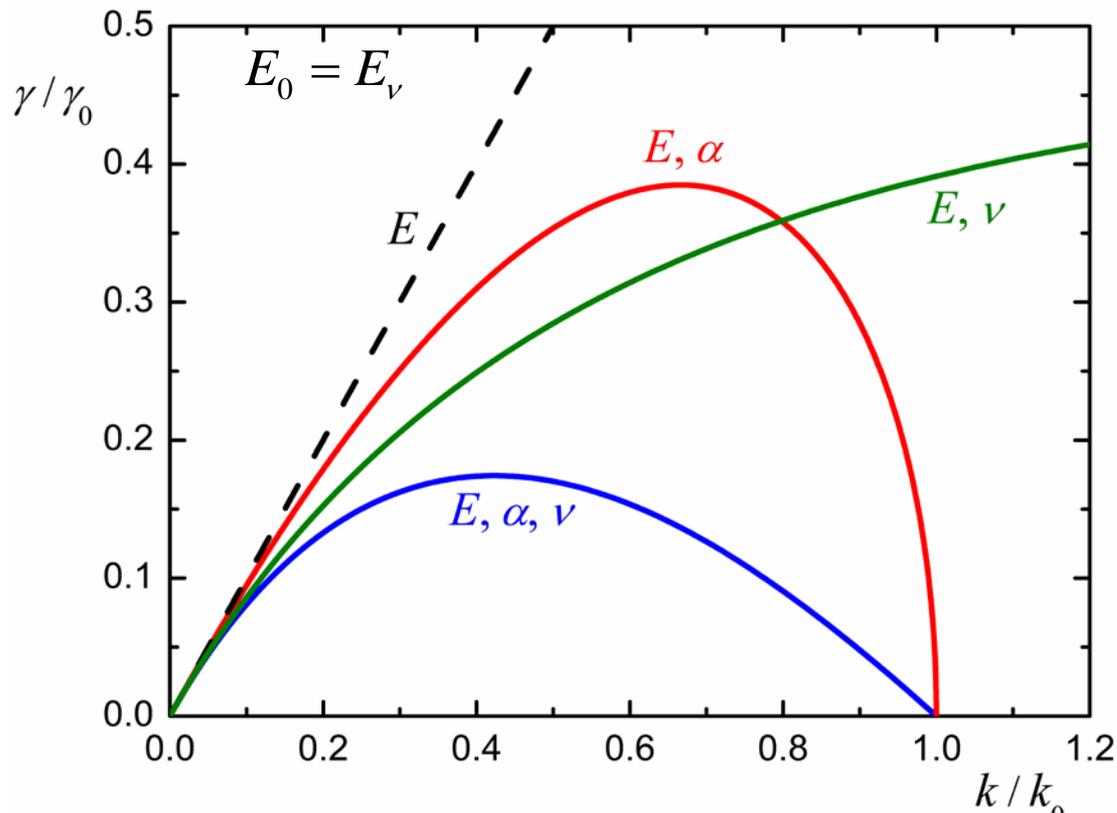
Граница между различными режимами течения

$$\rho(\gamma + 2\nu k^2)^2 - \varepsilon_0 E^2 k^2 + \alpha k^3 = 4\rho\nu^{3/2} k^3 \sqrt{\gamma + \nu k^2}$$

$$E_\nu \approx \frac{\alpha}{\varepsilon_0^{1/2} \rho^{1/2} \nu}$$

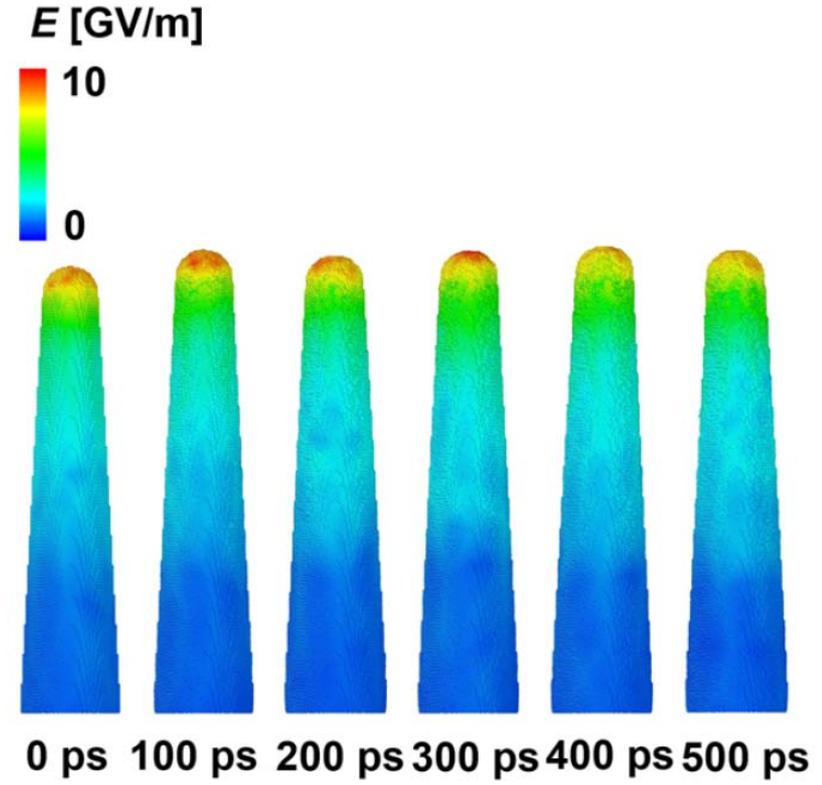
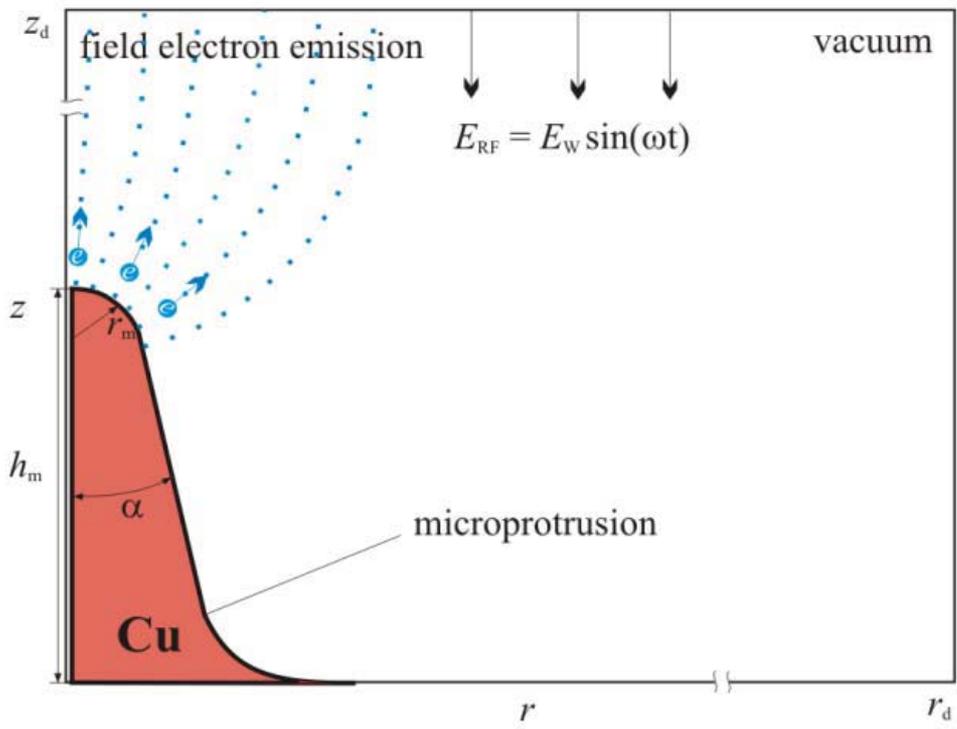
$$\lambda_c \approx 14.8 \frac{\nu^2 \rho}{\alpha}$$

$$\tau_c \approx 5.75 \frac{\rho^2 \nu^3}{\alpha^2}$$



	α (N/m)	ν (m ² /s)	ρ (kg/m ³)	E_c (V/m)	$2\pi/k_{\min}$ (m)	E_ν (V/m)	λ_c (m)	τ_c (s)
Cu	1.313	5.04×10^{-7}	8.00×10^3	8.51×10^6	2.57×10^{-2}	9.79×10^9	2.30×10^{-8}	2.73×10^{-11}
In	0.556	2.56×10^{-7}	7.03×10^3	6.65×10^6	1.78×10^{-2}	8.70×10^9	1.23×10^{-8}	1.54×10^{-11}
Ga	0.720	3.50×10^{-7}	6.09×10^3	6.84×10^6	2.18×10^{-2}	8.86×10^9	1.54×10^{-8}	1.76×10^{-11}

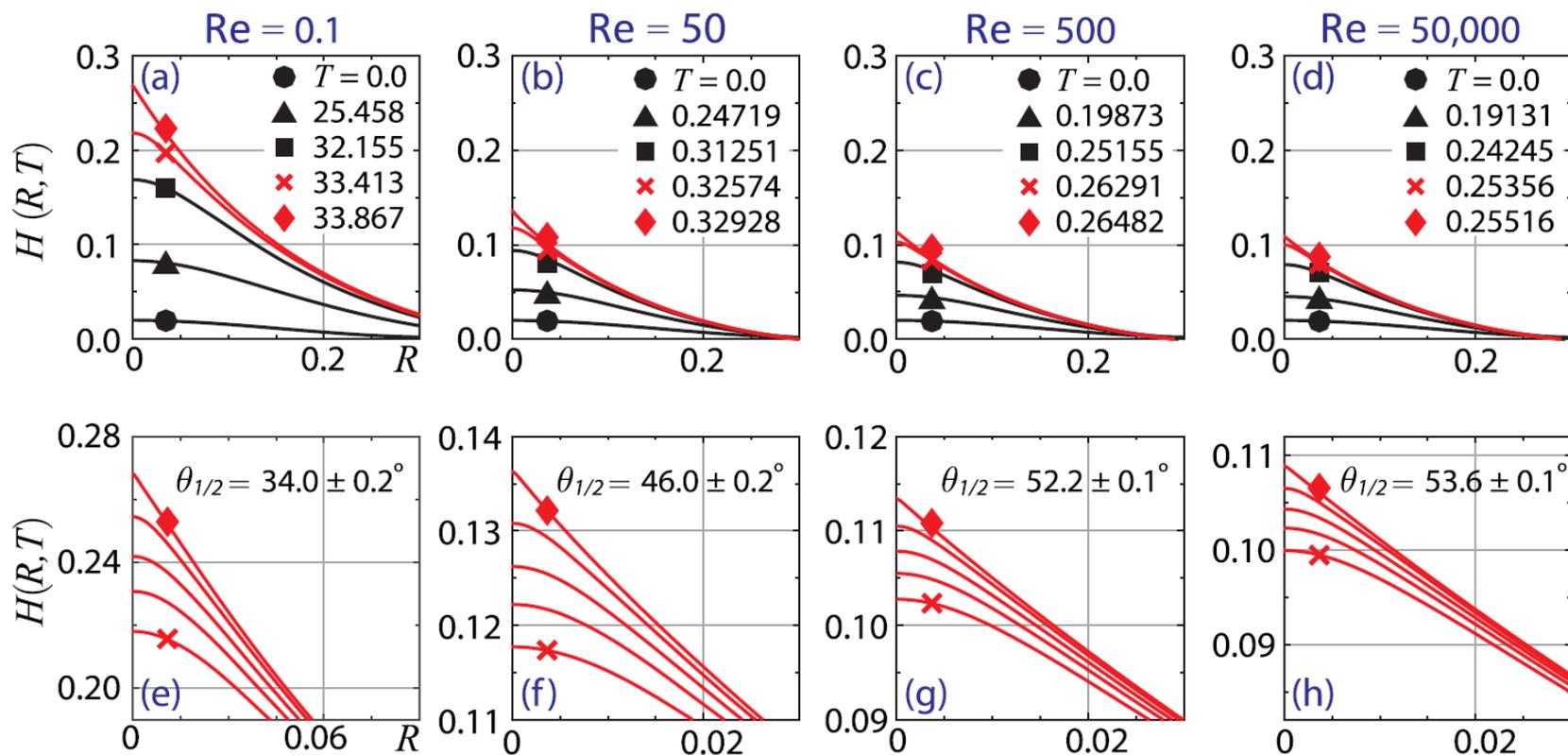
$$E_v \approx 10^{10} \text{ V/m}$$



- S.A. Barengolts, I.V. Uimanov, D.L. Shmelev, Prebreakdown Processes in a Metal Surface Microprotrusion Exposed to an RF Electromagnetic Field, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, **47** (8), 3400 (2019).
- X. Gao, A. Kyritsakis, M. Veske, W. Sun, B. Xiao, G. Meng, Y. Cheng, F. Djurabekova, Molecular dynamics simulations of thermal evaporation and critical electric field of copper nanotips, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **53** (36), 365202 (2020).

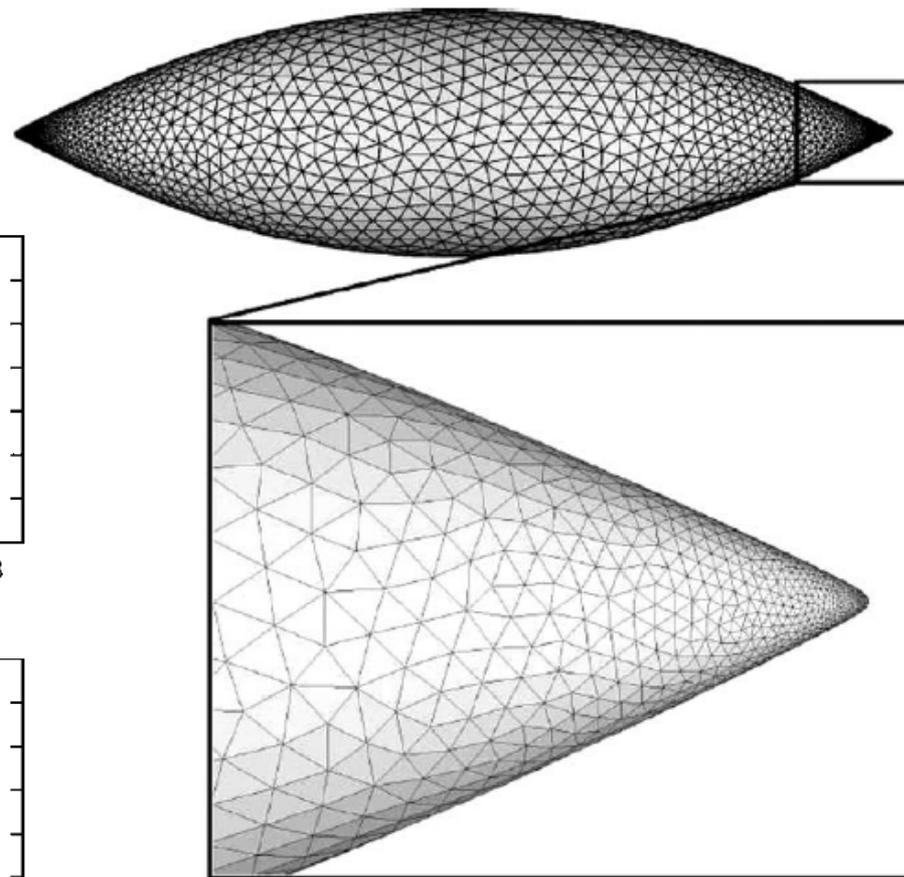
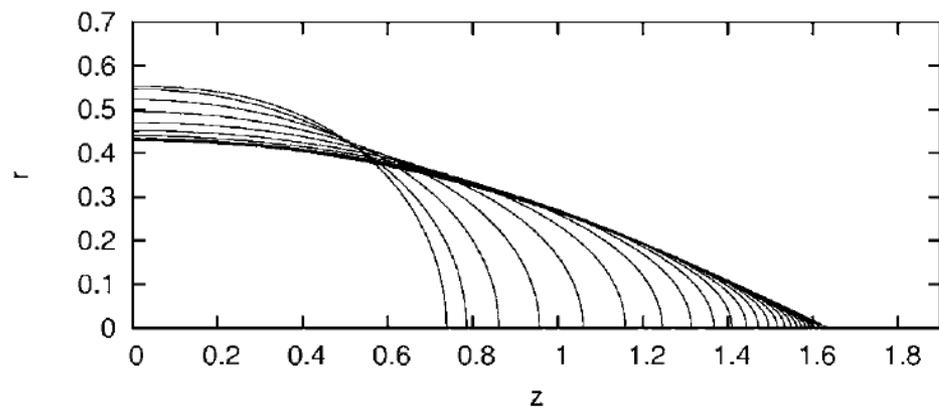
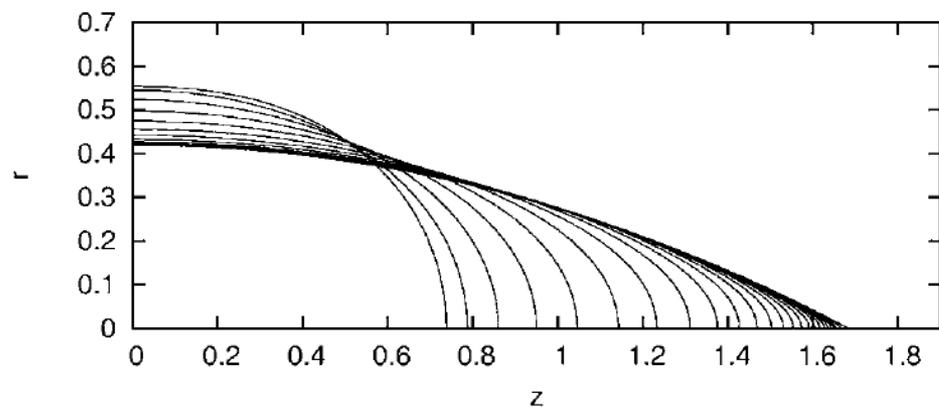
Численные расчеты динамики как слабовязкой (Re велико), так и сильновязкой (Re мало) идеально проводящей жидкости в электрическом поле показывают, что на свободной поверхности за конечное время образуются конические выступы.

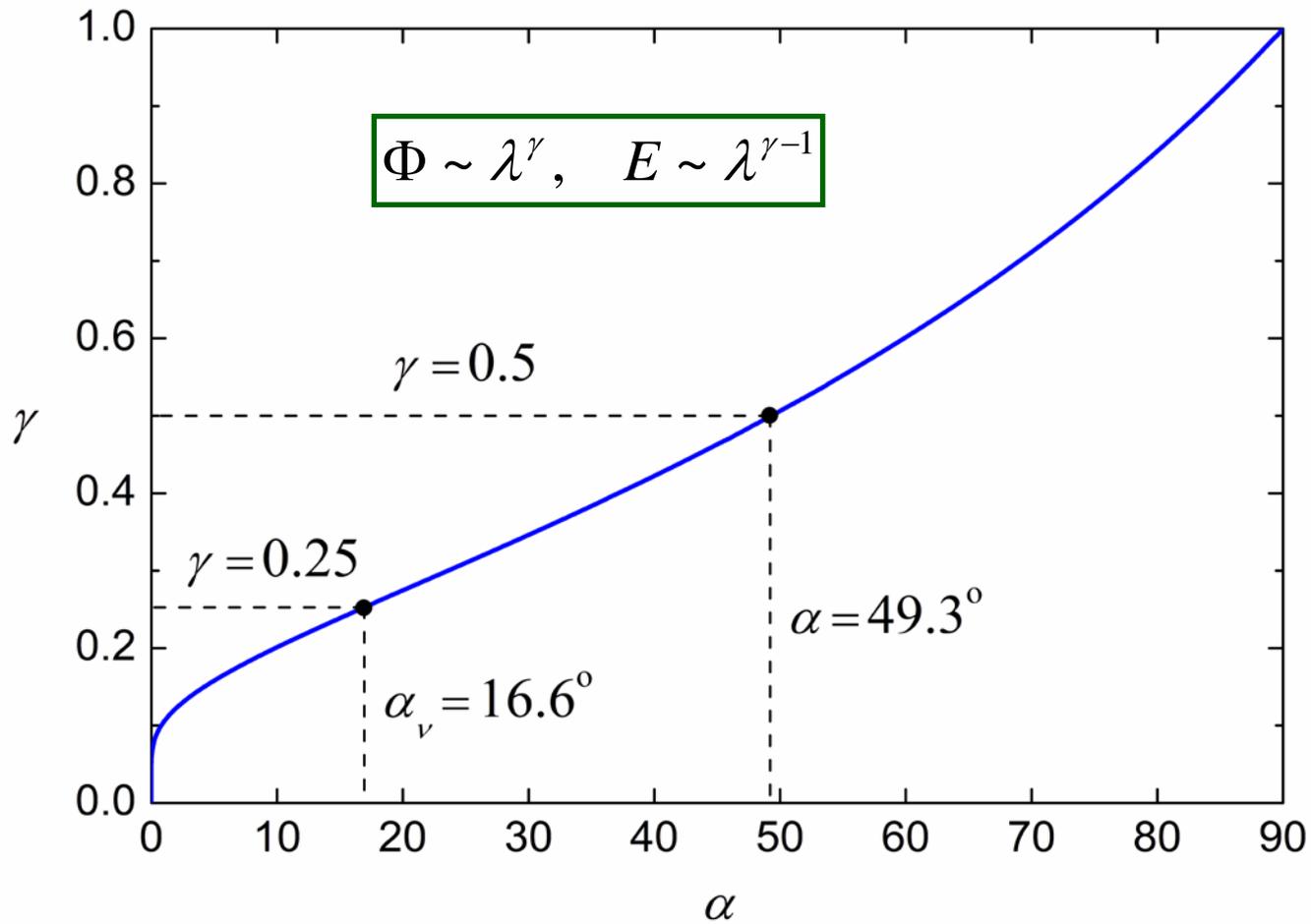
$$z = -r \cot \alpha, \quad r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}.$$



- G. Albertson and S. M. Troian, Electrified cone formation in perfectly conducting viscous liquids: Self-similar growth irrespective of Reynolds number, *Phys. Fluids* **31**, 102103 (2019).

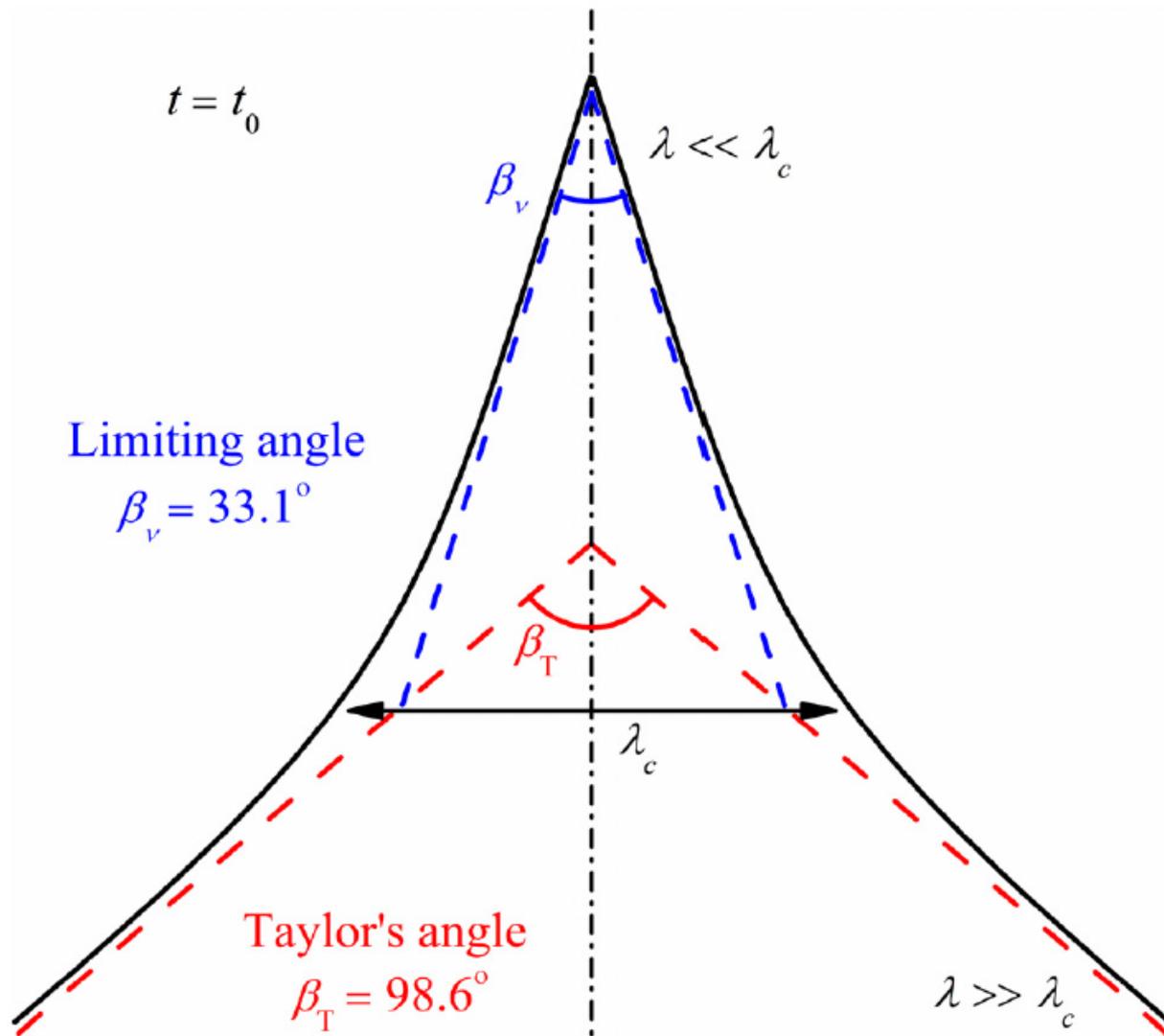
Результаты численных расчетов эволюции заряженных каплей проводящей вязкой жидкости в приближении Стокса:





$$E \sim \lambda^{-1/2}, \quad \gamma = 1/2, \quad \alpha_T = 49.3^\circ, \quad \beta_T = 2\alpha_T = 98.6^\circ \quad (\lambda \gg \lambda_c)$$

$$E \sim \lambda^{-3/4}, \quad \gamma = 1/4, \quad \alpha_v = 16.6^\circ, \quad \beta_v = 2\alpha_v = 33.1^\circ \quad (\lambda \ll \lambda_c)$$



Оценки для различных членов уравнения Навье-Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial z} \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{u}{\tau} + \frac{u^2}{2\lambda} \approx -\frac{p_\alpha}{\rho\lambda} + \frac{p_E}{\rho\lambda} + \frac{\nu u}{\lambda^2}$$

$$\text{Re} = \frac{\lambda u}{\nu} \approx \frac{\lambda^2}{\nu\tau} \propto (t_0 - t)^{1/3}$$

$$\text{Ca} = \frac{\nu\rho u}{\alpha} \approx \frac{\nu\rho\lambda}{\alpha\tau} \propto (t_0 - t)^{-1/3}$$

$$\text{We} = \text{Ca} \times \text{Re} = \frac{\rho\lambda u^2}{\alpha} \approx \frac{\rho\lambda^3}{\alpha\tau^2} \approx 10^2$$

Макроскопический масштаб $\lambda \gg \lambda_c$

$$\frac{u}{\tau} \propto \frac{u^2}{2\lambda} \propto \frac{p_\alpha}{\rho\lambda} \propto \frac{p_E}{\rho\lambda} \propto \frac{1}{(t_0 - t)^{4/3}}$$

$$\frac{\nu u}{\lambda^2} \propto \frac{1}{(t_0 - t)^{5/3}}$$

Микроскопический масштаб $\lambda < \lambda_c$

$$\frac{u}{\tau} \propto \frac{u^2}{2\lambda} \propto \frac{p_\alpha}{\rho\lambda} \propto \frac{1}{(t_0 - t)^{4/3}}$$

$$\frac{p_E}{\rho\lambda} \propto \frac{\nu u}{\lambda^2} \propto \frac{1}{(t_0 - t)^{5/3}}$$

Формирование особенностей на поверхности диэлектрической жидкости

Закон дисперсии:

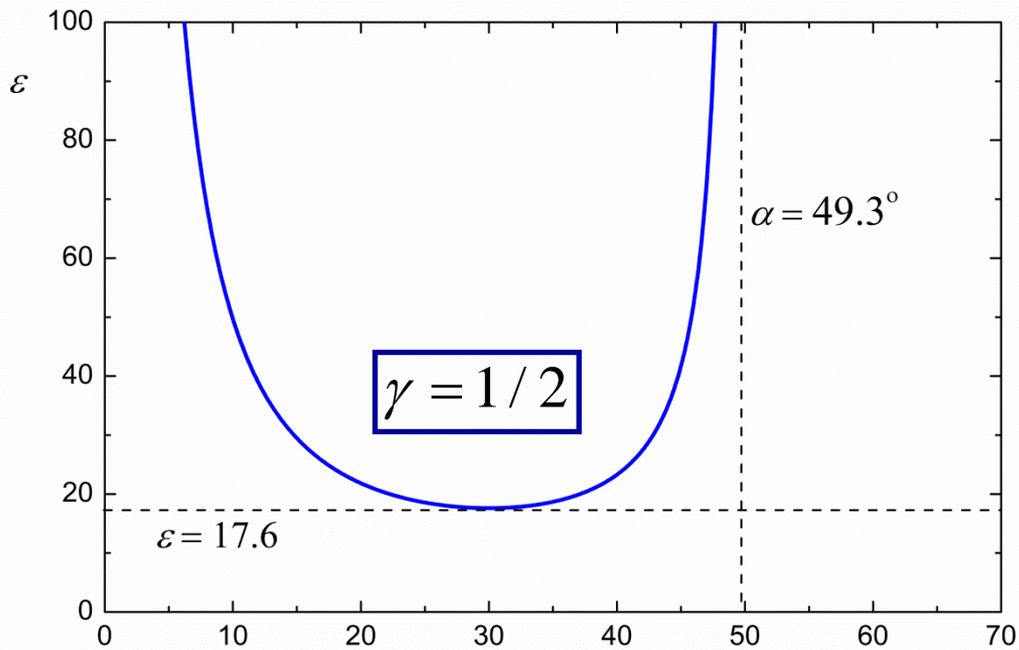
$$\rho(\gamma + 2\nu k^2)^2 - \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon(\varepsilon + 1)} E^2 k^2 + \alpha k^3 = 4\rho\nu^{3/2} k^3 \sqrt{\gamma + \nu k^2}$$

Распределение поля вокруг идеального диэлектрического конуса:

$$\Phi(R, \theta) = AR^\gamma P_\gamma(\cos \theta) \quad \tilde{\Phi}(R, \theta) = BR^\gamma P_\gamma(-\cos \theta)$$

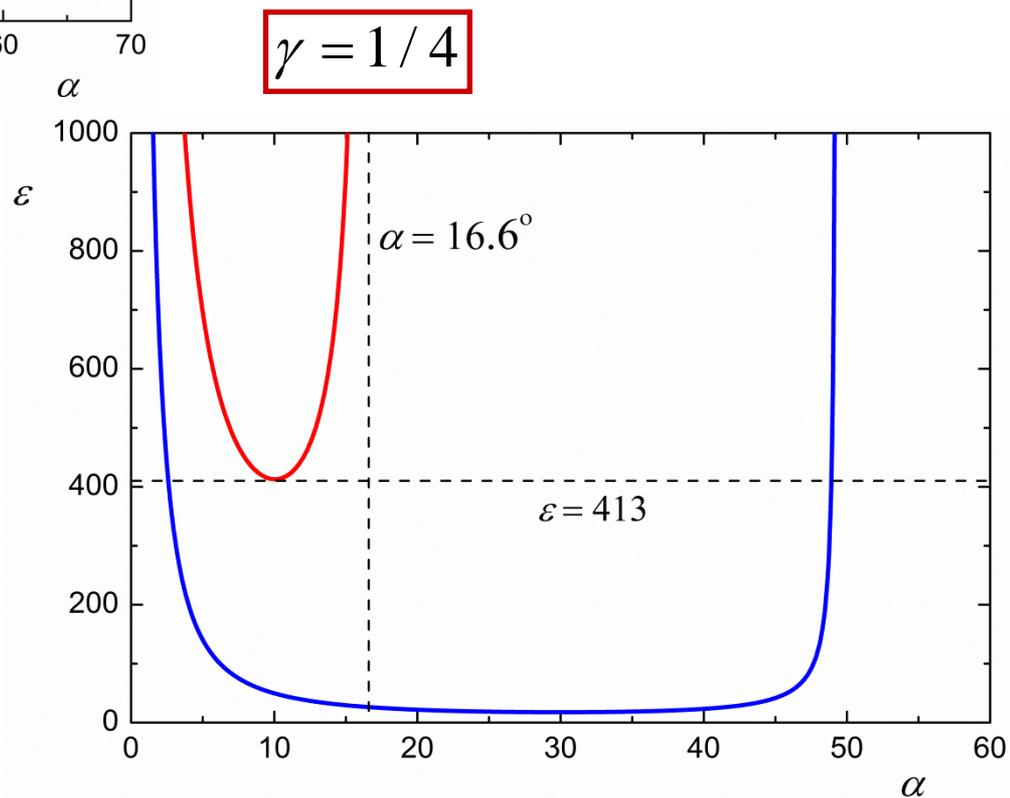
$$(\Phi - \tilde{\Phi})\Big|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \varepsilon \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \theta} \right)\Big|_{\theta=\theta_0} = 0,$$

$$\frac{P'_\gamma(\cos \theta_0) P_\gamma(-\cos \theta_0)}{P'_\gamma(-\cos \theta_0) P_\gamma(\cos \theta_0)} = -\varepsilon, \quad \theta_0 = \pi - \alpha$$



- A. Ramos, A. Castellanos, *Phys. Lett. A* **184**, 268 (1994).

- N.M. Zubarev, *Phys. Rev. E* **65**, 055301(R) (2002).



$$\varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} \approx 81$$

Заключение

Аналитически исследована динамика формирования конических острий на исходно гладкой поверхности идеально проводящей жидкости во внешнем электрическом поле. При формировании особенности кривизна вершины выступа, локальная напряженность поля и скорость жидкости обращаются в бесконечность за конечное время. Продемонстрировано, что в этом процессе можно выделить два масштаба с различным типом поведения жидкости. На макромасштабе применимо приближение идеальной жидкости; формируется конус с углом раствора 98.6° . На микромасштабе определяющую роль играют вязкие эффекты, и формируется конус с предельным углом 33.1° . В обоих случаях реализуются автомодельные режимы течения жидкости, для которых пространственный масштаб уменьшается со временем, следуя степенному закону $(t_0 - t)^{2/3}$, где t_0 – момент коллапса.

Спасибо за внимание!



XXI НАУЧНАЯ ШКОЛА
“**Нелинейные волны -2024**”

Нижний Новгород, 5 - 11 ноября