

Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки

Физический институт
имени П.Н. Лебедева



Российской академии наук

К.П. Зыбин, А.С. Ильин,
А.В. Копьев, В.А. Сирота

ОТФ им. И.Е. Тамма

ФИАН им. П.Н. Лебедева

О влиянии флуктуаций магнитного поля на
турбулентные пульсации скорости

О влиянии флуктуаций магнитного поля на турбулентные пульсации скорости

- Проблема турбулентного мелкомасштабного магнитного динамо в сильно проводящей среде
- Кинематическое динамо в изотропном турбулентном потоке
- Классическая постановка задачи о развитии однородных возмущений
- Вырождение обратного воздействия магнитного поля на генерирующий его турбулентный поток
- Обсуждение

Система уравнений МГД

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} &= (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v} + \eta \Delta \mathbf{B} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p_B + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}_v \\ (\nabla \mathbf{v}) &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{8\pi} \frac{\partial \langle B^2 \rangle}{\partial t} &= -\frac{1}{4\pi} \langle \mathbf{v} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} \rangle - \frac{\eta}{4\pi} \langle (\nabla \mathbf{B})^2 \rangle \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \langle v^2 \rangle}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi} \langle \mathbf{v} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} \rangle - \nu \langle (\nabla \mathbf{v})^2 \rangle + \langle \mathbf{v} \mathbf{f}_v \rangle \end{aligned} \right.$$

 **Обмен энергией**

несжимаемая жидкость

$$\rho = 1$$

ν – кинематическая вязкость

$$\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \text{ – магнитная диффузия}$$

$$Pm = \frac{\nu}{\eta} \text{ – магнитное число Прандтля}$$

$$p_B = p + \frac{B^2}{8\pi} \text{ – магнитное давление}$$

\mathbf{f}_v – стационарный гауссов изотропный процесс

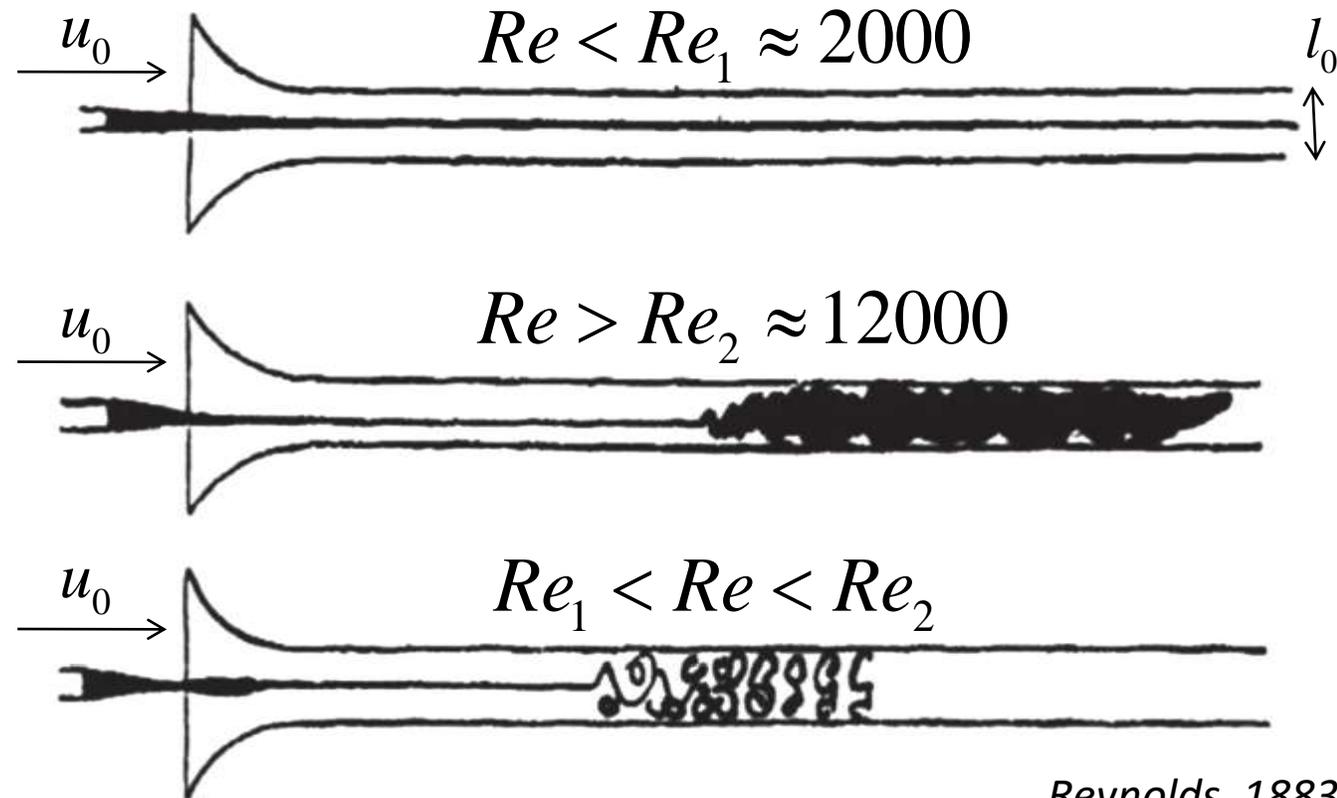
Уравнение Навье-Стокса при больших числах Рейнольдса

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} \\ (\nabla\mathbf{v}) = 0 \end{cases}$$

$$Re = \frac{u_0 l_0}{\nu} \text{ – число Рейнольдса}$$

$$|\partial_t \mathbf{v}| \approx \frac{u_0}{T} \approx \frac{u_0^2}{l_0} \quad |(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}| \approx \frac{u_0^2}{l_0}$$

$$|\nabla p| \approx \frac{u_0^2}{l_0} \quad |\nu\Delta\mathbf{v}| \approx \nu \frac{u_0^2}{l_0^2} \approx \frac{1}{Re} \frac{u_0^2}{l_0}$$

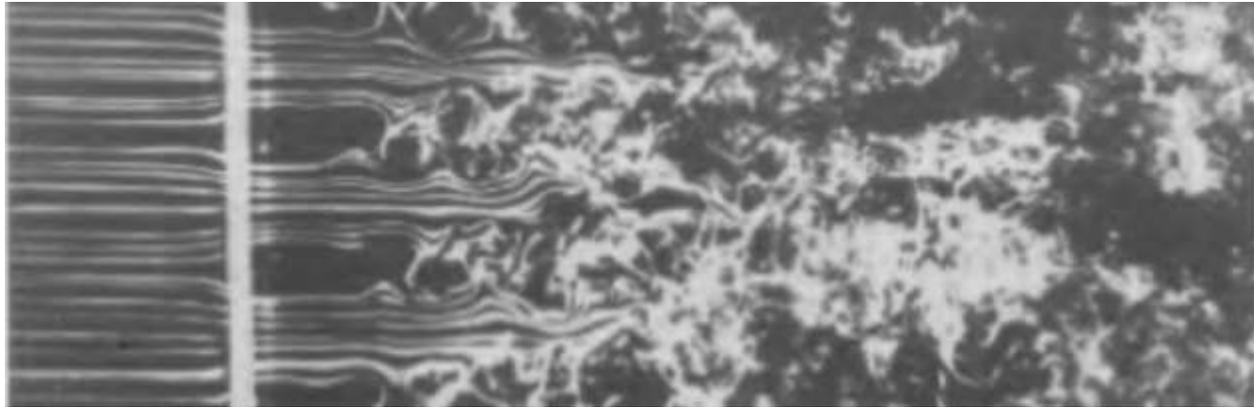


$$Re \ll 1$$

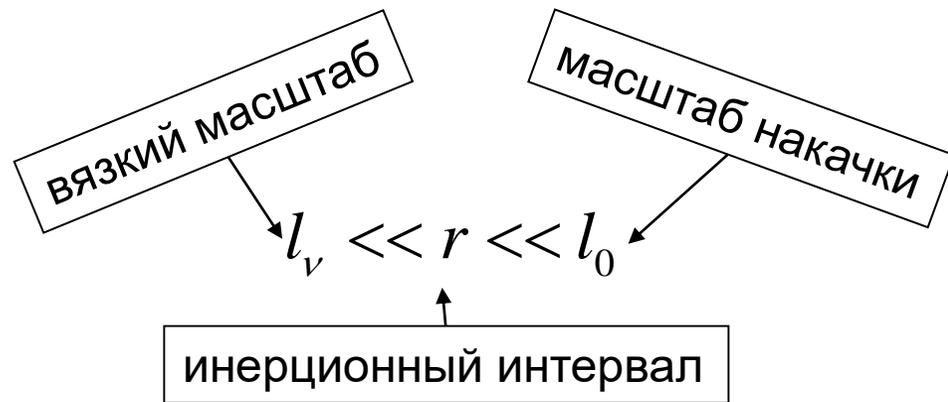
$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \nabla p = 0$$

$$\nabla\mathbf{v} = 0$$

Структура мелкомасштабной турбулентности



$$Re_r = \frac{u_r r}{\nu} = \left(\frac{r}{l_0}\right)^{4/3} Re$$



Richardson, 1922
Колмогоров, 1941
Обухов, 1941

Динамо в астрофизике

$$Re = \frac{u_0 \ell_0}{\nu} \quad \text{– число Рейнольдса}$$

$$Rm = \frac{u_0 \ell_0}{\eta} \quad \text{– магнитное число Рейнольдса}$$

$$Pm = \frac{\nu}{\eta} = \frac{Rm}{Re} \quad \text{– магнитное число Прандтля}$$

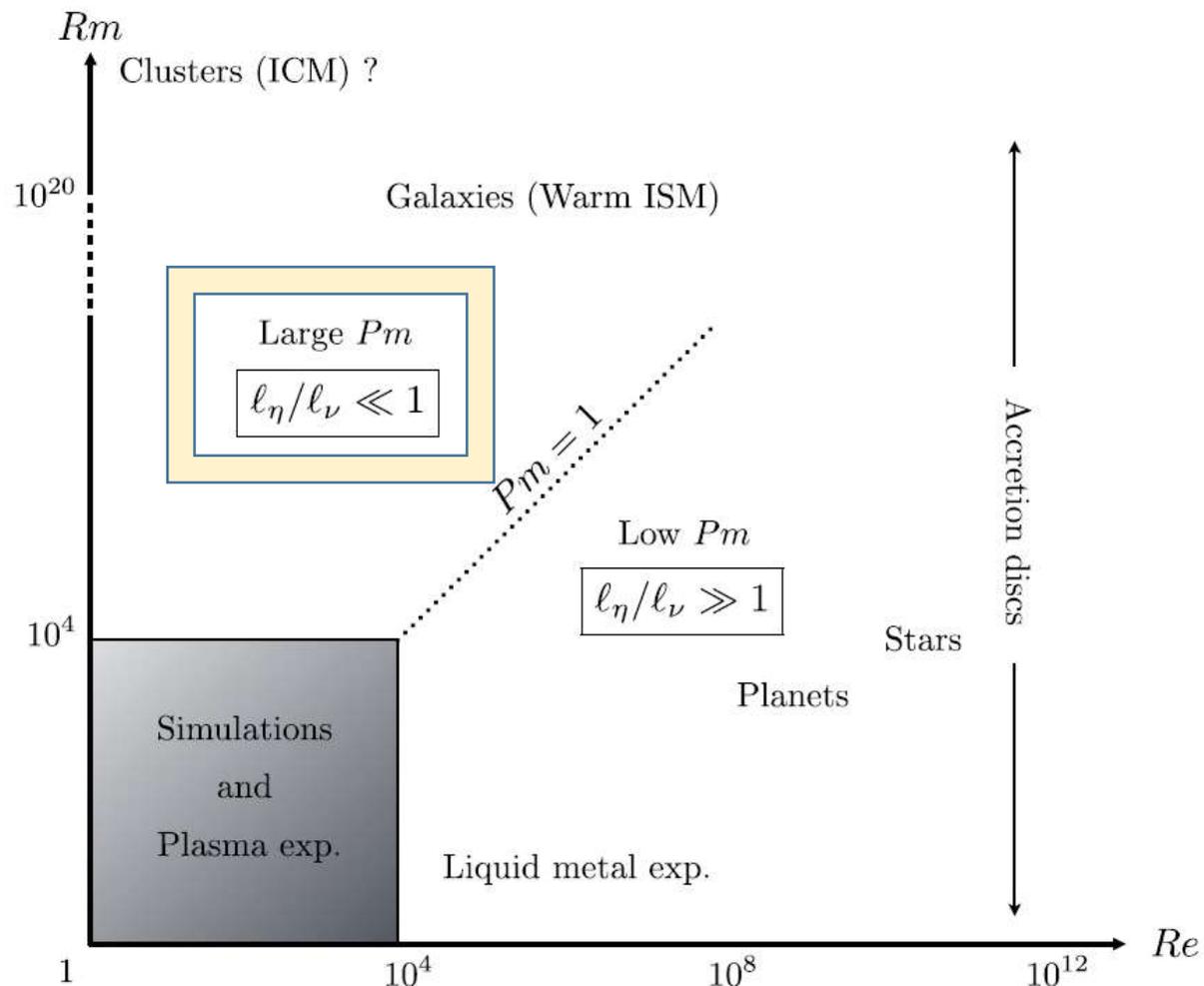
ν – кинематическая вязкость

$$\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \quad \text{– магнитная диффузия}$$

σ – проводимость жидкости (плазмы)

$$\ell_v \sim Re^{-3/4} \ell_0 \quad \text{– вязкий масштаб}$$

$$\ell_\eta \sim \begin{cases} Pm^{-1/2} \ell_v, & Pm \gg 1 \\ Pm^{-3/4} \ell_v, & Pm \ll 1 \end{cases} \quad \text{– масштаб магнитной диффузии}$$

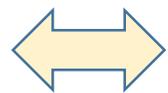


Динамо при $Pm \gg 1$

Основной механизм мелкомасштабного динамо: вмороженность магнитного поля

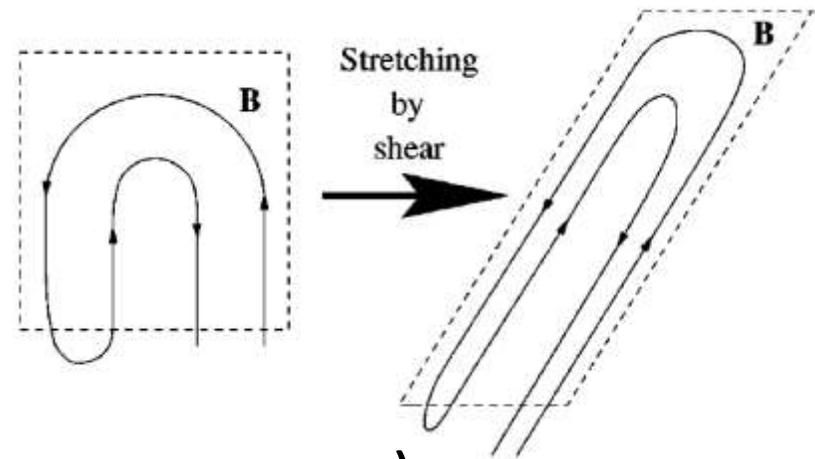
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v}$$

Транспорт магнитного поля в идеально проводящей среде



$$\frac{\partial \delta \mathbf{r}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \delta \mathbf{r} = (\delta \mathbf{r} \nabla) \mathbf{v}$$

Динамика инфинитезимальной жидкой частицы



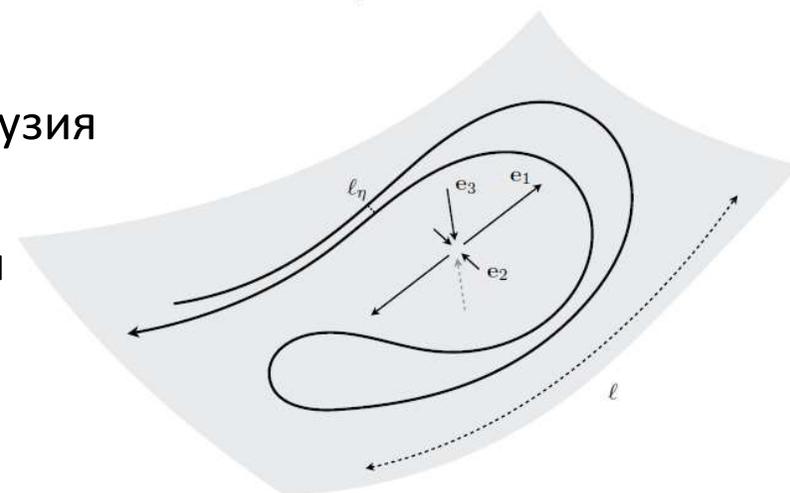
Наличие магнитной диффузии (конечность проводимости) замедляет рост

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v} + \eta \Delta \mathbf{B}$$

Вклад конечной проводимости выражается наличием диффузии

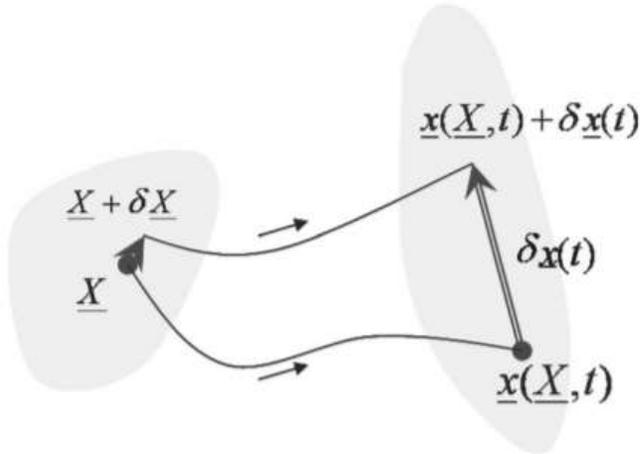
$$\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \quad \text{— магнитная диффузия}$$

σ — проводимость жидкости (плазмы)



Динамо при $Pr \gg 1$

Жидкая частица, находящаяся в **стохастическом линейном поле** (режим Бэтчелора) вращается и экспоненциально быстро вытягивается

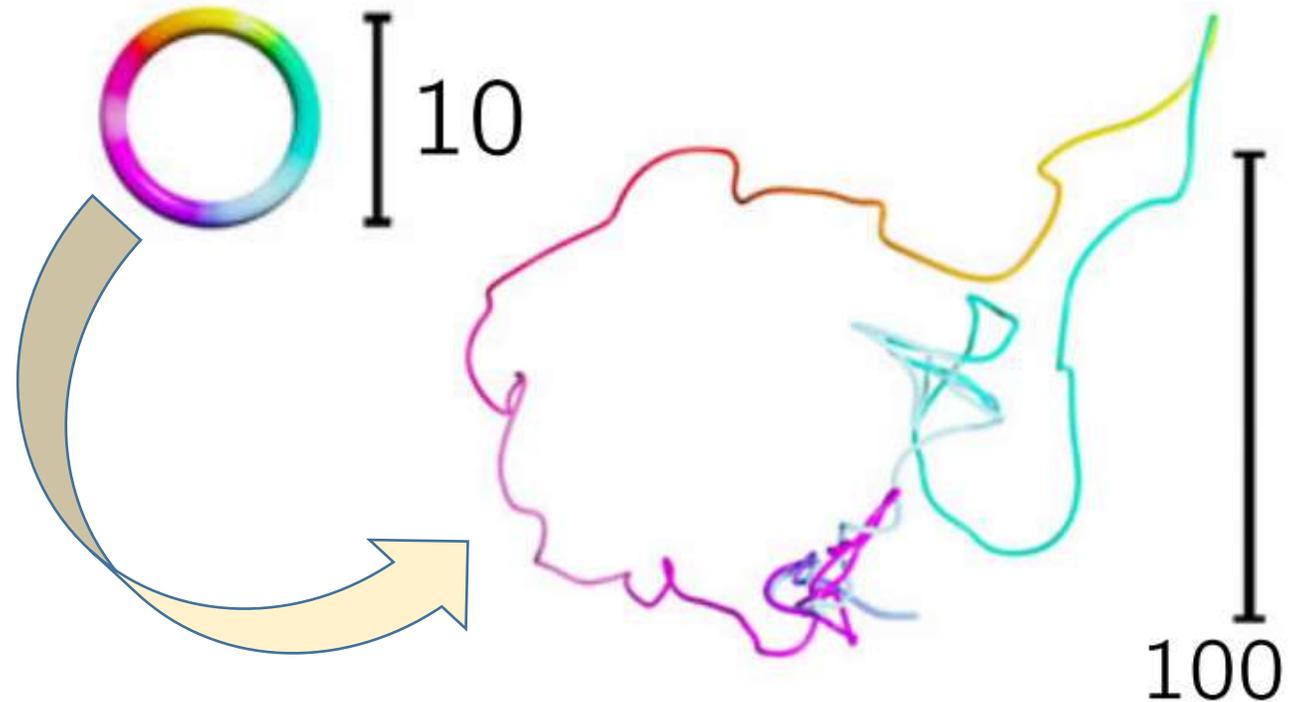


$$\langle \ln \delta x(t) \rangle \propto \lambda_1 t > 0$$

$$\langle \ln \delta S(t) \rangle \propto (\lambda_1 + \lambda_2) t > 0$$

$$\delta V(t) = Const \Rightarrow \lambda_3 = -\lambda_1 - \lambda_2$$

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ - ляпуновский спектр



Для гидродинамической турбулентности $\lambda_2 / \lambda_1 \cong 0.25$

Динамо при $Pm \gg 1$

Система МГД уравнений ($\rho = 1$):

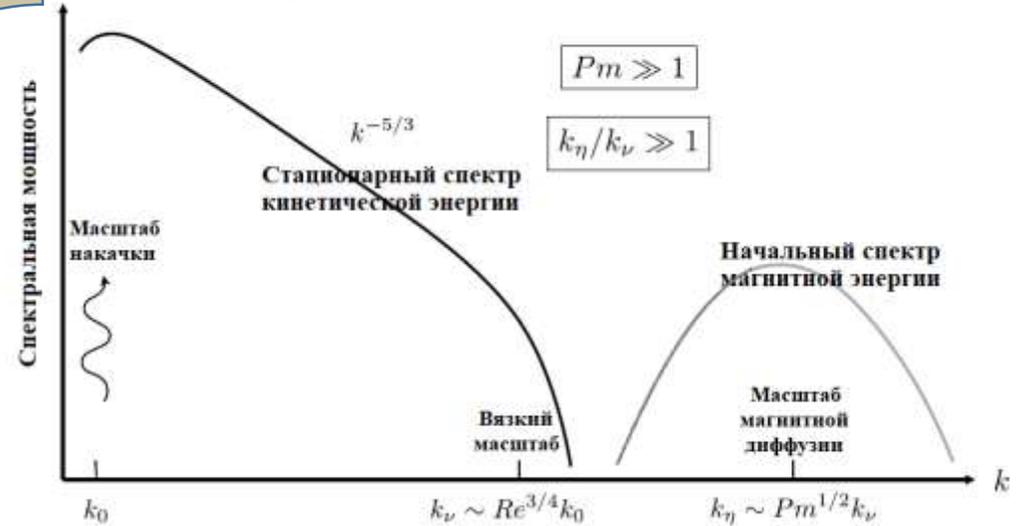
$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v} + \eta \Delta \mathbf{B} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p_B + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}_v \end{cases}$$

$$p_B = p + \frac{B^2}{8\pi} \quad \text{— магнитное давление}$$

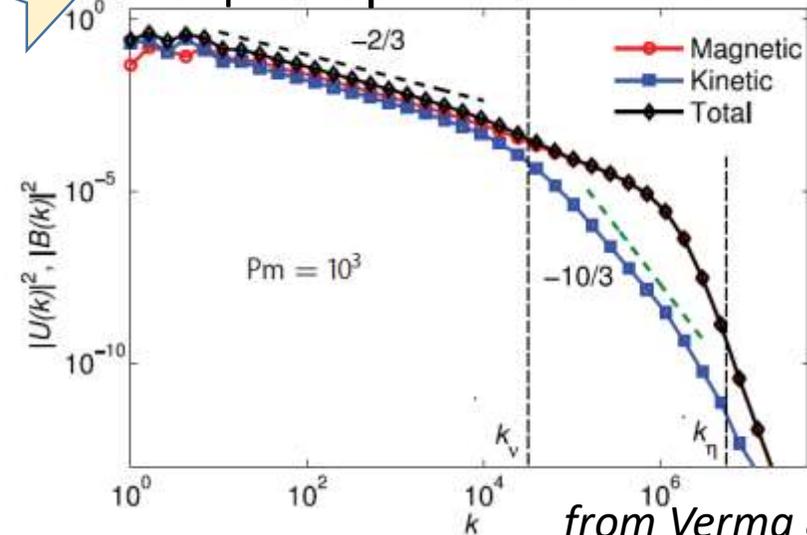
\mathbf{f}_v — стационарный гауссов изотропный процесс

$$Pm = \frac{\nu}{\eta} \gg 1 \quad \text{— высокая проводимость}$$

Колмогоровский начальный спектр



Стационарный нелинейный спектр



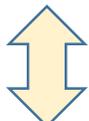
from Verma & Kumar, 2016

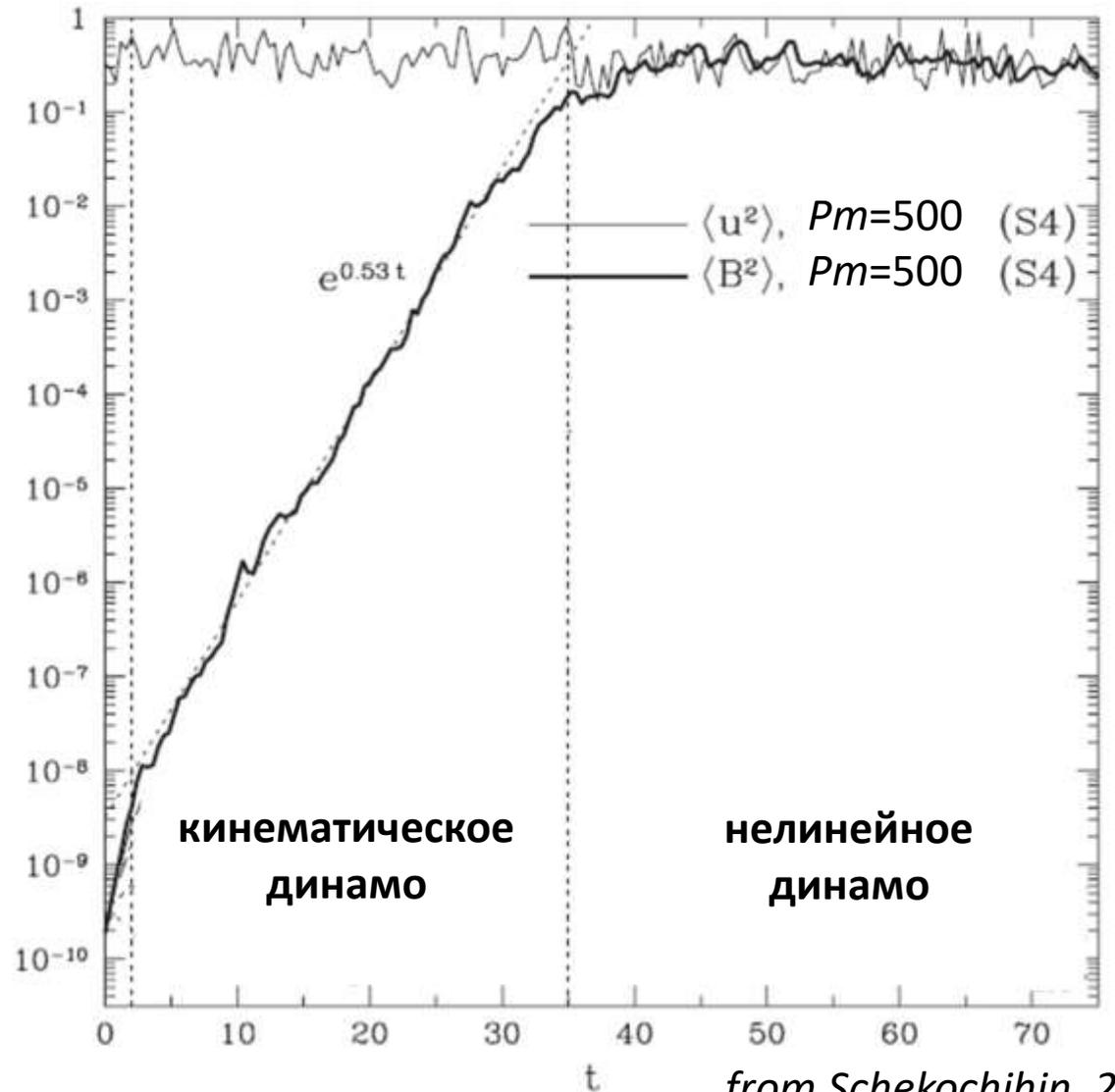
Динамо при $Pm \gg 1$

Система МГД уравнений ($\rho = 1$):

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v} + \eta \Delta \mathbf{B} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p_B + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}_v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{8\pi} \frac{\partial \langle B^2 \rangle}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \langle \mathbf{v} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} \rangle - \frac{\eta}{4\pi} \langle (\nabla \mathbf{B})^2 \rangle \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \langle v^2 \rangle}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \langle \mathbf{v} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} \rangle - \nu \langle (\nabla \mathbf{v})^2 \rangle + \langle \mathbf{v} \mathbf{f}_v \rangle \end{cases}$$

 **Обмен энергией**



from Schekochihin, 2004

Кинематическое динамо при $Pm \gg 1$

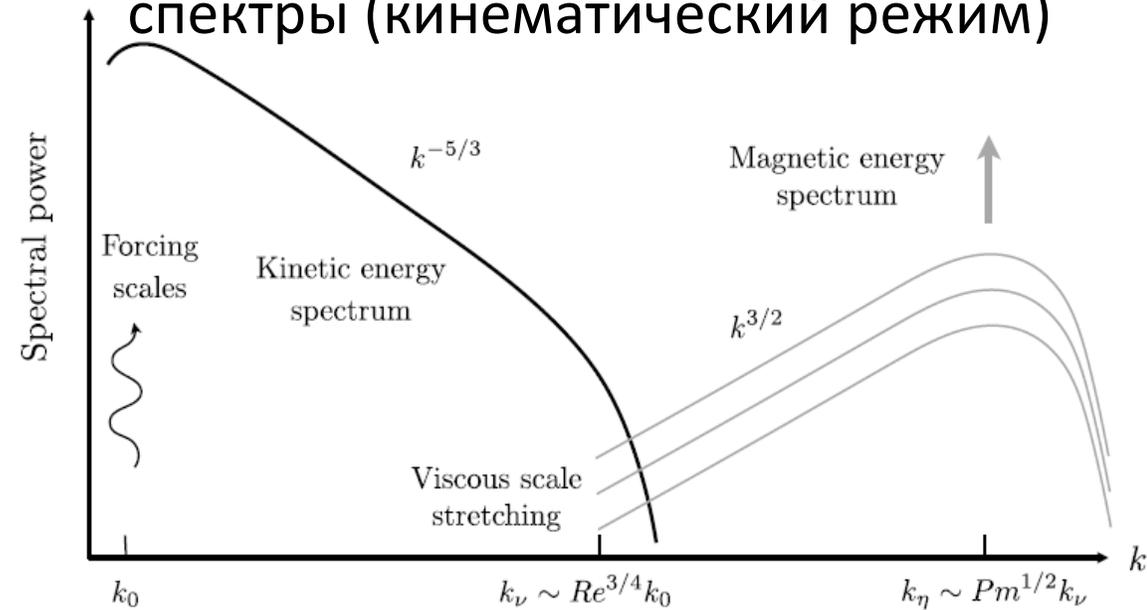
Система МГД уравнений ($\rho = 1$):

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \overbrace{(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B}}^{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}} = \overbrace{(\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v}}^{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}} + \eta \Delta \mathbf{B} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p_B + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}_v \end{cases}$$

$(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \gg (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B}$ – кинематический режим
(без обратного влияния)

$$v_i(\mathbf{r}, t) = v_i(\mathbf{0}, t) + \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial r_k}(t)}_{A_{ik}(t)} \cdot r_k \text{ – режим Бэтчелора}$$

Колмогоровский и казанцевский спектры (кинематический режим)



Главный результат: отброшенный член $\mathbf{f} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B}$ (сила Лоренца) остается мал даже когда градиенты магнитного поля становятся сравнимы с градиентами скорости. Он не оказывает обратного влияния на поле скорости.

Классическая постановка задачи о развитии однородных возмущений

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{A} \mathbf{r} \nabla) \mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{B} + \eta \Delta \mathbf{B}$$

$$A_{ik}(t) = \frac{\partial v_i}{\partial r_k}(t) \text{ – стационарный изотропный процесс, } A_{ii} = 0$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Q}} = -\mathbf{Q} \mathbf{A} \\ \mathbf{Q}(0) = \mathbf{E} \\ \det \mathbf{Q} = 1 \end{cases}$$

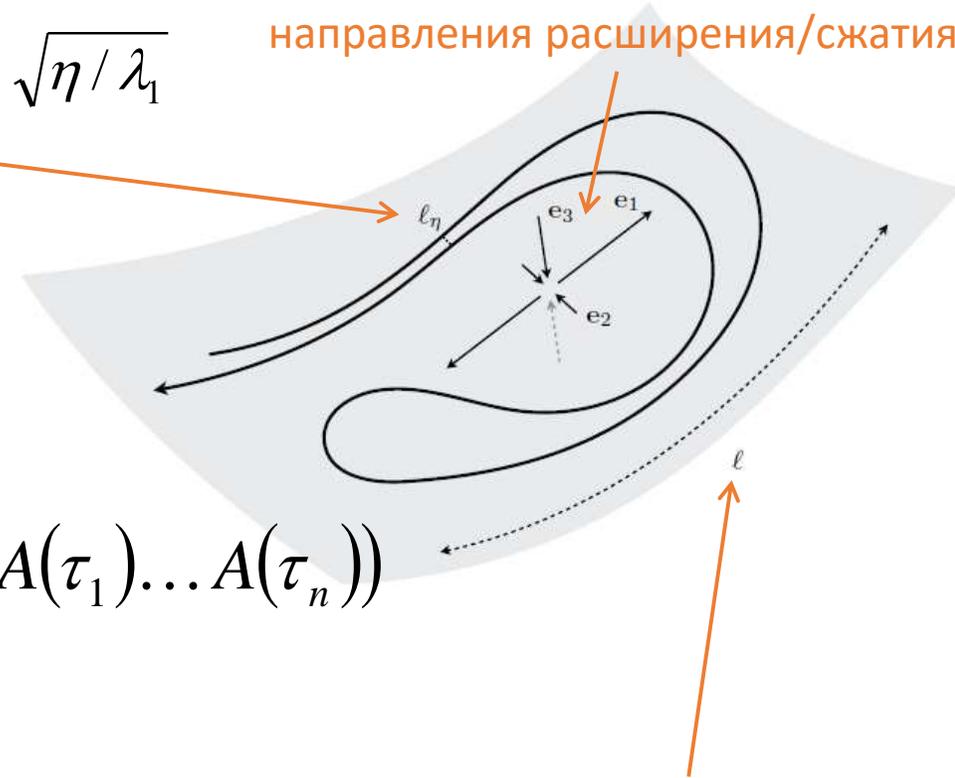
Формальное решение: Т-экспонента

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^+ e^{-\int \mathbf{A} d\tau} = \sum_n \frac{1}{n!} \int_0^t d\tau_1 \dots d\tau_n \mathbf{T}^+(A(\tau_1) \dots A(\tau_n))$$

Общее решение: $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{Q}^{-1} \int \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, 0) e^{i\mathbf{k} \mathbf{Q} \mathbf{r} - \eta \mathbf{k} \left(\int_0^t \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T d\tau \right) \mathbf{k}^T} d\mathbf{k}$

диффузионный масштаб $l_\eta = \sqrt{\eta / \lambda_1}$

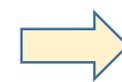
направления расширения/сжатия



корреляционная длина

$$\langle \tilde{B}_n(\mathbf{k}, 0) \tilde{B}_m(\mathbf{k}', 0) \rangle_{i.c.} = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') e^{-k^2 l^2} (k^2 \delta_{mn} - k_m k_n)$$

$\mathbf{A}(t)$ обладает заданным ляпуновским спектром $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$



$$\frac{1}{t} \langle \ln \mathbf{B}^2(t) \rangle = \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_2 < 0 \end{cases}$$

Zel'dovich et al., 1984

Классическая постановка задачи о развитии однородных возмущений

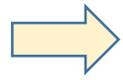
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{A} \mathbf{r} \nabla) \mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{B} + \eta \Delta \mathbf{B}$$

$$A_{ik}(t) = \frac{\partial v_i}{\partial r_k}(t) \text{ – стационарный изотропный процесс, } A_{ii} = 0$$

$$\dot{\mathbf{Q}} = -\mathbf{Q} \mathbf{A}$$

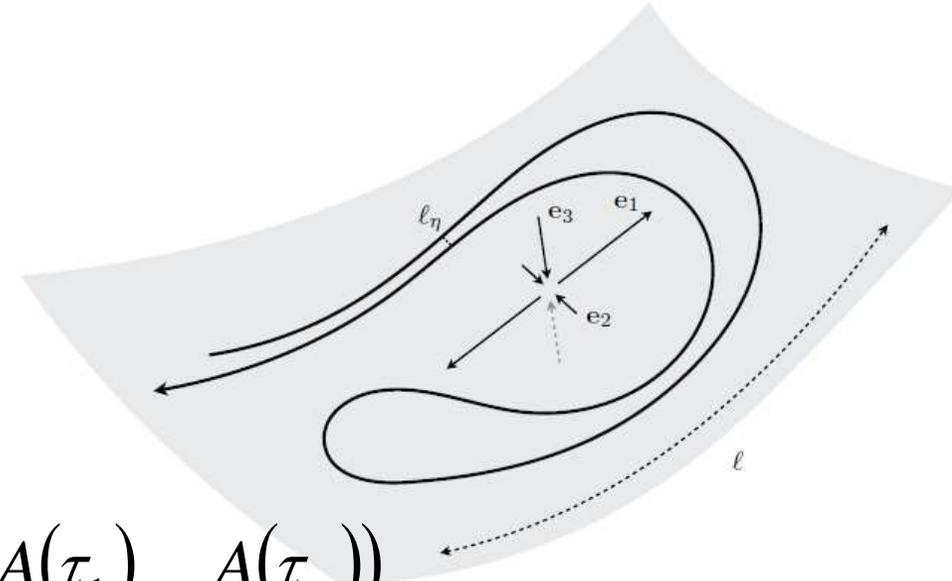
$$\mathbf{Q}(0) = \mathbf{E}$$

$$\det \mathbf{Q} = 1$$



Формальное решение: T-экспонента

$$\mathbf{Q} = T^+ e^{-\int A d\tau} = \sum_n \frac{1}{n!} \int_0^t d\tau_1 \dots d\tau_n T^+(A(\tau_1) \dots A(\tau_n))$$



$$\left\langle \tilde{B}_n(\mathbf{k}, 0) \tilde{B}_m(\mathbf{k}', 0) \right\rangle_{i.c.} = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') e^{-k^2 l^2} (k^2 \delta_{mn} - k_m k_n)$$

$\mathbf{A}(t)$ обладает заданным ляпуновским спектром $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$

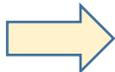
Классическая постановка задачи о развитии однородных возмущений

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{A} \mathbf{r} \nabla) \mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{B} + \eta \Delta \mathbf{B}$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B}$$

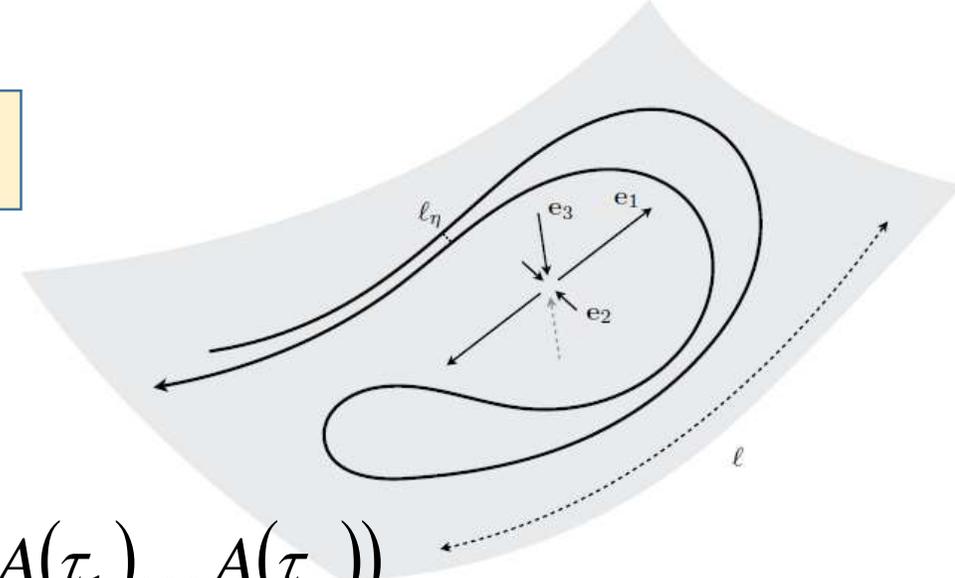
$$A_{ik}(t) = \frac{\partial v_i}{\partial r_k}(t) \text{ – стационарный изотропный процесс, } A_{ii} = 0$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Q}} = -\mathbf{Q} \mathbf{A} \\ \mathbf{Q}(0) = \mathbf{E} \\ \det \mathbf{Q} = 1 \end{cases}$$



Формальное решение: T-экспонента

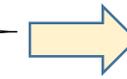
$$\mathbf{Q} = T^+ e^{-\int \mathbf{A} d\tau} = \sum_n \frac{1}{n!} \int_0^t d\tau_1 \dots d\tau_n T^+(A(\tau_1) \dots A(\tau_n))$$



$$\tilde{f}_m(\mathbf{r}, t) = \int \tilde{B}_n(\mathbf{k}, 0) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{Q} \mathbf{r} - \eta \mathbf{k} \left(\int_0^t \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T d\tau \right) \mathbf{k}^T} d\mathbf{k} Q_{ml}^{-1} \int i k'_n \tilde{B}_l(\mathbf{k}', 0) e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{Q} \mathbf{r} - \eta \mathbf{k}' \left(\int_0^t \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T d\tau \right) \mathbf{k}'^T} d\mathbf{k}'$$

$$\langle \tilde{B}_n(\mathbf{k}, 0) \tilde{B}_m(\mathbf{k}', 0) \rangle_{i.c.} = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') e^{-k^2 l^2} (k^2 \delta_{mn} - k_m k_n)$$

$\mathbf{A}(t)$ обладает заданным ляпуновским спектром $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$



$$\frac{1}{t} \langle \ln \tilde{\mathbf{f}}^2(t) \rangle = \begin{cases} -2\lambda_2 & \lambda_2 \geq 0 \\ 4\lambda_2 & \lambda_2 < 0 \end{cases}$$

Динамика матрицы эволюции

- Разложение Ивасавы $\mathbf{Q} = \mathbf{z}\mathbf{d}\mathbf{R}$

\mathbf{d} – диагональная матрица $\det \mathbf{d} = d_1 d_2 d_3 = 1$

\mathbf{z} – верхнетреугольная матрица с единицами на диагонали

\mathbf{R} – матрица вращения

$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{z}\mathbf{d}^2\mathbf{z}^T$ – матрица вращения не входит

- Существует предел $\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln d_i(t)}{t} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \zeta_i(t)$

λ_i – спектр Ляпунова $\Rightarrow d_i \equiv e^{\zeta_i t} \propto e^{\lambda_i t}$

- Стабилизация верхнетреугольной матрицы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}(t) = \mathbf{z}_\infty$$

Oseledets., 1968

Вырождение обратного воздействия магнитного поля

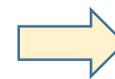
$$\langle \tilde{\mathbf{f}}^2(t) \rangle_{i.c.} = \sum_n \left[\sum_{a \neq n} J_a \cdot \sum_k \left(e^{2\zeta_k t} \sum_{b \neq k} K_{nb} \right) \right]$$

$$D_m = l^2 + \frac{\eta}{\lambda_m} e^{-2\zeta_m t} \quad \lambda_i \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \zeta_i(t)$$

$$J_m = \frac{\pi^{3/2}}{2D_m \sqrt{D_1 D_2 D_3}} \quad K_{mn} = \frac{\pi^{3/2}}{2D_m D_n \sqrt{D_1 D_2 D_3}} (1 + 2\delta_{mn})$$

Стадия идеальной проводимости $t \ll |\lambda_3^{-1}| \ln l / l_\eta$. Рост:

$$D_1 = D_2 = D_3 = l^2$$



$$\langle \tilde{\mathbf{f}}^2(t) \rangle_{i.c.} \propto e^{2\zeta_1 t}$$

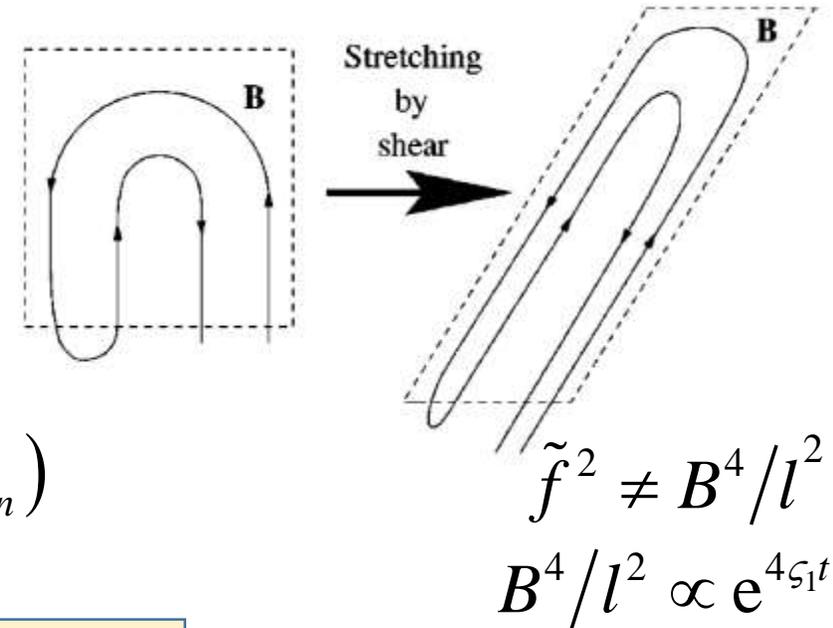
$$\frac{1}{t} \langle \ln \tilde{\mathbf{f}}^2(t) \rangle = 2\lambda_1 > 0$$

Вырождение обратного воздействия магнитного поля

$$\langle \tilde{\mathbf{f}}^2(t) \rangle_{i.c.} = \sum_n \left[\sum_{a \neq n} J_a \cdot \sum_k \left(e^{2\zeta_k t} \sum_{b \neq k} K_{nb} \right) \right]$$

$$D_m = l^2 + \frac{\eta}{\lambda_m} e^{-2\zeta_m t} \quad \lambda_i \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \zeta_i(t)$$

$$J_m = \frac{\pi^{3/2}}{2D_m \sqrt{D_1 D_2 D_3}} \quad K_{mn} = \frac{\pi^{3/2}}{2D_m D_n \sqrt{D_1 D_2 D_3}} (1 + 2\delta_{mn})$$



Стадия идеальной проводимости $t \ll |\lambda_3^{-1}| \ln l/l_\eta$. Рост:

$$D_1 = D_2 = D_3 = l^2$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathbf{f}}^2(t) \rangle_{i.c.} &\propto e^{2\zeta_1 t} \\ \frac{1}{t} \langle \ln \tilde{\mathbf{f}}^2(t) \rangle &= 2\lambda_1 > 0 \end{aligned}$$

Вырождение обратного воздействия магнитного поля

$$\langle \tilde{\mathbf{f}}^2(t) \rangle_{i.c.} = \sum_n \left[\sum_{a \neq n} J_a \cdot \sum_k \left(e^{2\zeta_k t} \sum_{b \neq k} K_{nb} \right) \right]$$

$$D_m = l^2 + \frac{\eta}{\lambda_m} e^{-2\zeta_m t} \quad \lambda_i \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \zeta_i(t)$$

$$J_m = \frac{\pi^{3/2}}{2D_m \sqrt{D_1 D_2 D_3}} \quad K_{mn} = \frac{\pi^{3/2}}{2D_m D_n \sqrt{D_1 D_2 D_3}} (1 + 2\delta_{mn})$$

Дальняя асимптотика режима Бэтчелора:

$$D_1 = l^2 \quad D_2 = \begin{cases} l^2 & \zeta_2 \geq 0 \\ \frac{\eta}{\lambda_2} e^{-2\zeta_2 t} & \zeta_2 < 0 \end{cases} \quad D_3 = \frac{\eta}{\lambda_3} e^{-2\zeta_3 t}$$

$$\langle \tilde{\mathbf{f}}^2(t) \rangle_{i.c.} \propto \begin{cases} e^{-2\zeta_2 t} & \zeta_2 \geq 0 \\ e^{4\zeta_2 t} & \zeta_2 < 0 \end{cases}$$

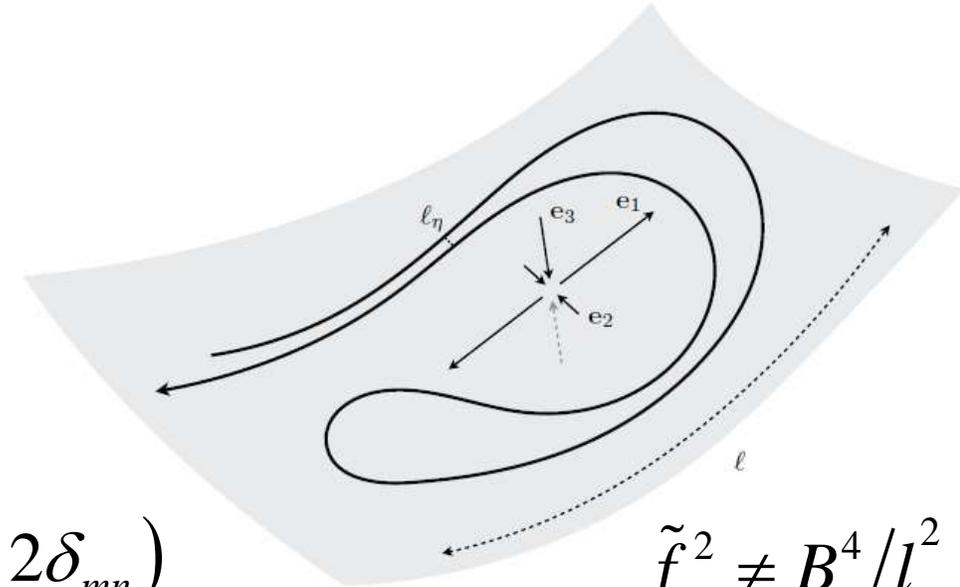
$$\frac{1}{t} \langle \ln \tilde{\mathbf{f}}^2(t) \rangle = \begin{cases} -2\lambda_2 & \lambda_2 \geq 0 \\ 4\lambda_2 & \lambda_2 < 0 \end{cases}$$

Вырождение обратного воздействия магнитного поля

$$\langle \tilde{\mathbf{f}}^2(t) \rangle_{i.c.} = \sum_n \left[\sum_{a \neq n} J_a \cdot \sum_k \left(e^{2\zeta_k t} \sum_{b \neq k} K_{nb} \right) \right]$$

$$D_m = l^2 + \frac{\eta}{\lambda_m} e^{-2\zeta_m t} \quad \lambda_i \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \zeta_i(t)$$

$$J_m = \frac{\pi^{3/2}}{2D_m \sqrt{D_1 D_2 D_3}} \quad K_{mn} = \frac{\pi^{3/2}}{2D_m D_n \sqrt{D_1 D_2 D_3}} (1 + 2\delta_{mn})$$



$$\tilde{f}^2 \neq B^4/l^2$$

$$B^4/l^2 \propto e^{-2\zeta_3 t}$$

Дальняя асимптотика режима Бэтчелора:

$$D_1 = l^2$$

$$D_3 = \frac{\eta}{\lambda_3} e^{-2\zeta_3 t}$$

$$D_2 = \begin{cases} l^2 & \zeta_2 \geq 0 \\ \frac{\eta}{\lambda_2} e^{-2\zeta_2 t} & \zeta_2 < 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\langle \tilde{\mathbf{f}}^2(t) \rangle_{i.c.} \propto \begin{cases} e^{-2\zeta_2 t} & \zeta_2 \geq 0 \\ e^{4\zeta_2 t} & \zeta_2 < 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{t} \langle \ln \tilde{\mathbf{f}}^2(t) \rangle = \begin{cases} -2\lambda_2 & \lambda_2 \geq 0 \\ 4\lambda_2 & \lambda_2 < 0 \end{cases}$$

Затухание всех моментов

$$\langle \tilde{\mathbf{f}}^2(t) \rangle_{i.c.} \propto e^{2\alpha\zeta_2 t} \quad \alpha = \begin{cases} -1 & \zeta_2 \geq 0 \\ 2 & \zeta_2 < 0 \end{cases}$$

Гауссово распределение ($\lambda_2 = 0$)

$$\mathcal{P}(\zeta_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} e^{-\zeta_2^2/2Dt}$$

$$\langle \tilde{f}^n(t) \rangle \propto \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} d\zeta_2 e^{-\zeta_2^2/2Dt} (e^{-2n\zeta_2} + e^{-n\zeta_2}) \propto \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Затухание всех моментов

$$\langle \tilde{\mathbf{f}}^2(t) \rangle_{i.c.} \propto e^{2\alpha\zeta_2 t} \quad \alpha = \begin{cases} -1 & \zeta_2 \geq 0 \\ 2 & \zeta_2 < 0 \end{cases}$$

Произвольная статистика с $\lambda_2 \neq 0$

$$\mathcal{P}(\zeta_2) = e^{-t S(\zeta_2 - \lambda_2)} \quad S(y) \text{ – функция Крамера: } S(0) = S'(0) = 0; \quad S''(y) > 0$$

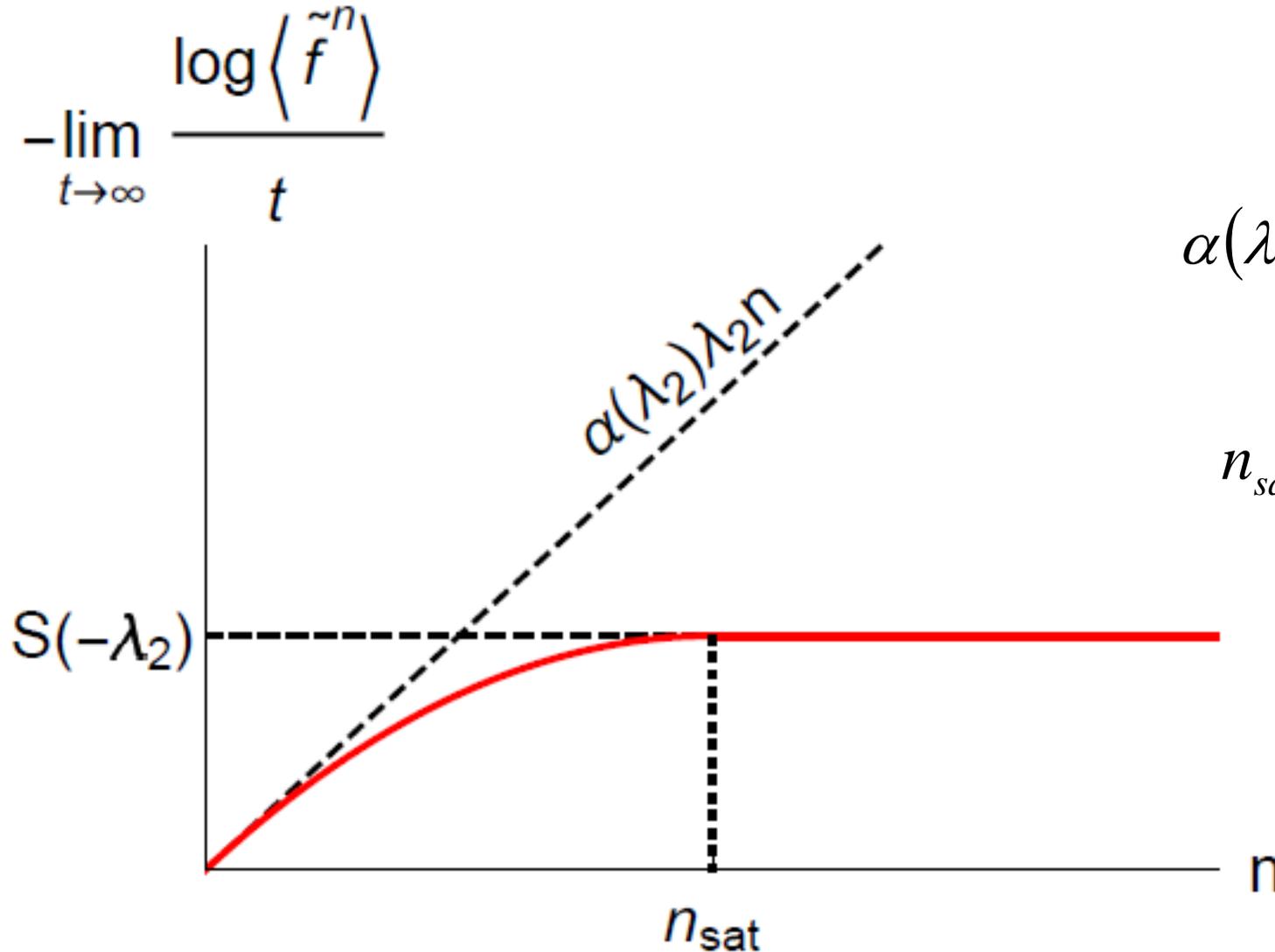
$$\langle \tilde{\mathbf{f}}^n(t) \rangle = \int d\zeta_2 e^{t G(\zeta_2)} \quad G = n\alpha\zeta_2 - S(\zeta_2 - \lambda_2)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{f}}^n(t) \rangle = e^{t G(\zeta_2^*)} \quad \zeta_2^* \text{ – точка перевала: } n\alpha - S'(\zeta_2^* - \lambda_2) = 0$$

$$n \ll 1 \Rightarrow \zeta_2^* \cong \lambda_2 \Rightarrow \langle \tilde{f}^n(t) \rangle = e^{\alpha\lambda_2 n t}$$

$$n \gg 1 \Rightarrow \zeta_2^* = 0 \Rightarrow \langle \tilde{f}^n(t) \rangle = e^{-t S(-\lambda_2)}$$

Затухание всех моментов



Обсуждение

Гауссово статистически обратимое поле скорости ($\lambda_2 = 0$) $\langle \tilde{f}^n(t) \rangle \stackrel{t > \lambda_1^{-1} \ln l / l_\eta}{\propto} \frac{1}{\sqrt{t}}$

Произвольная необратимая статистика ($\lambda_2 \neq 0$) $\langle \tilde{f}^n(t) \rangle \stackrel{t > \lambda_1^{-1} \ln l / l_\eta}{\propto} e^{-2\lambda_2 t}$

Zybin, Il'yn, Kopyev, Sirota, EPL 2020

- Оказалось, что нарастание магнитного поля в рассмотренной постановке не приводит к обратному влиянию на поле скорости и это влияние даже уменьшается

$$\tilde{f} \equiv (B\nabla)B \neq B^2/l_\eta$$

- Одной из причин вырождения обратного влияния является вытягивание магнитного поля вдоль линии растяжения (кинематический эффект)
- Другая причина связана с конечной проводимостью потока. Так, в идеально проводящей среде ($\eta=0$) сила Лоренца экспоненциально нарастает. Однако наличие даже малой диффузии существенно уменьшает инкремент нарастания магнитного поля, что приводит к затуханию всех моментов силы Лоренца (динамический эффект)

Энергетический парадокс

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{8\pi} \frac{\partial \langle B^2 \rangle}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \langle \mathbf{v} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} \rangle - \frac{\eta}{4\pi} \langle (\nabla \mathbf{B})^2 \rangle \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \langle \mathbf{v}^2 \rangle}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \langle \mathbf{v} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} \rangle - \nu \langle (\nabla \mathbf{v})^2 \rangle + \langle \mathbf{v} \mathbf{f}_v \rangle \end{array} \right.$$



Обмен энергией

$$\left| \underbrace{\langle \mathbf{v} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} \rangle}_{\substack{\text{растет} \\ \text{экспоненциально}}} \right| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\underbrace{\langle \mathbf{v}^2 \rangle}_{\text{стационарно}}} \underbrace{\langle ((\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B})^2 \rangle}_{\text{затухает}}$$

Энергетический парадокс

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{8\pi} \frac{\partial \langle B^2 \rangle}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \langle \mathbf{v} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} \rangle - \frac{\eta}{4\pi} \langle (\nabla \mathbf{B})^2 \rangle \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \langle \mathbf{v}^2 \rangle}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \langle \mathbf{v} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} \rangle - \nu \langle (\nabla \mathbf{v})^2 \rangle + \langle \mathbf{v} \mathbf{f}_v \rangle \end{array} \right.$$



Обмен энергией

$$\left| \langle \mathbf{v} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} \rangle \right| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\langle \mathbf{v}^2 \rangle \langle ((\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B})^2 \rangle}$$

растет экспоненциально стационарно затухает

$\langle \mathbf{v}^2 \rangle$ – бесконечно в режиме Бэтчелора!

Энергетический парадокс

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{8\pi} \frac{\partial \langle B^2 \rangle}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \langle \mathbf{v} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} \rangle - \frac{\eta}{4\pi} \langle (\nabla \mathbf{B})^2 \rangle \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \langle \mathbf{v}^2 \rangle}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \langle \mathbf{v} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} \rangle - \nu \langle (\nabla \mathbf{v})^2 \rangle + \langle \mathbf{v} \mathbf{f}_v \rangle \end{array} \right.$$

 **Обмен энергией**

$$\left| \langle \mathbf{v} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} \rangle \right| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\langle \mathbf{v}^2 \rangle \langle ((\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B})^2 \rangle}$$

растет экспоненциально
стационарно затухает

$\langle \mathbf{v}^2 \rangle$ – бесконечно в режиме Бэтчелора!

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{A} \mathbf{r} \nabla) \mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{B} + \eta \Delta \mathbf{B}$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial t} + (\mathbf{A} \mathbf{r} \nabla) \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{f}} + \mathbf{G} + \eta \Delta (\dots)$$

$$\mathbf{G} = B_i B_j \partial_i \partial_j \mathbf{v} \propto B^2 !!!$$

Разрешение парадокса

$\mathbf{A}(t)$ обладает заданным ляпуновским спектром

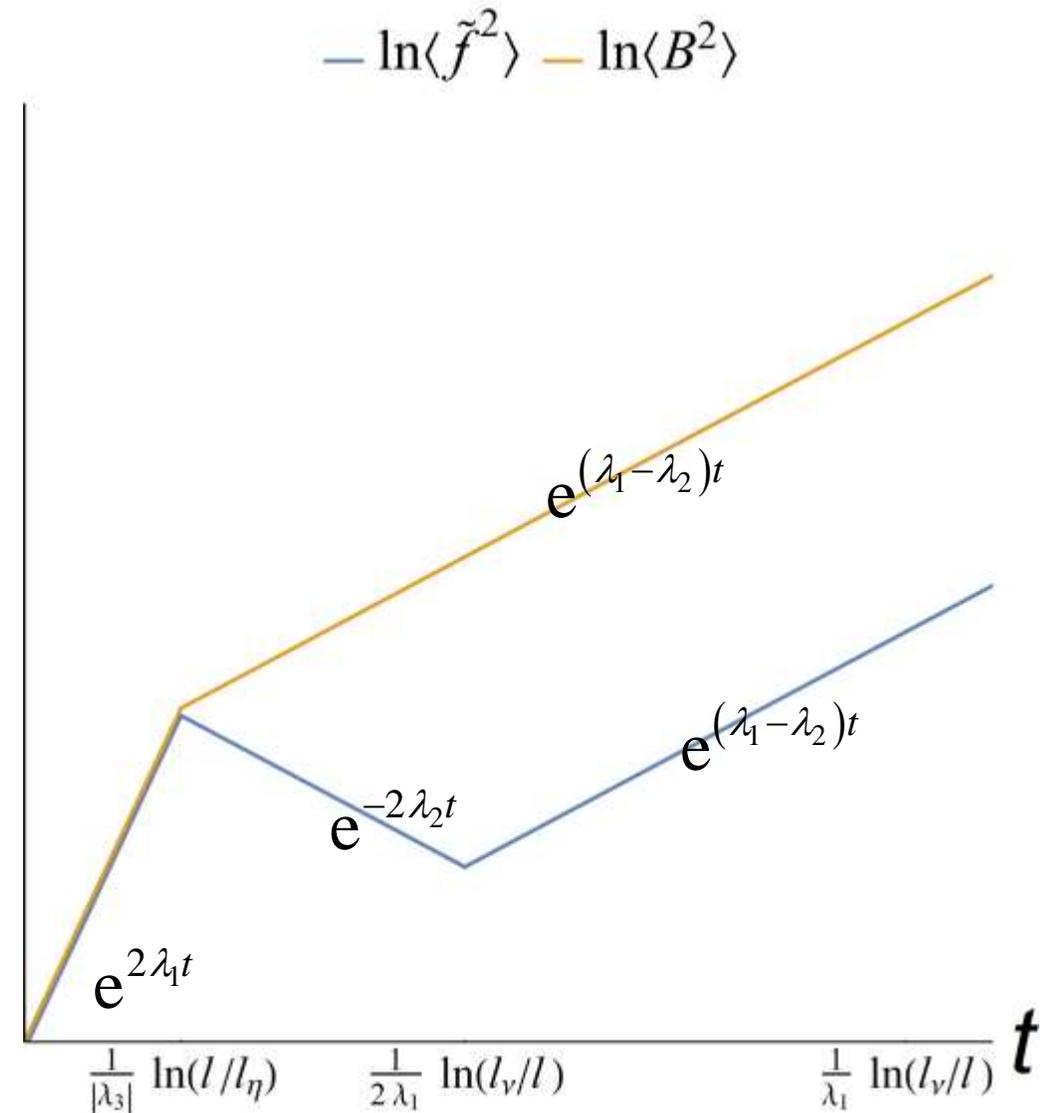
$$\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0 \geq \lambda_3$$

$$\langle \tilde{B}_n(\mathbf{k}, 0) \tilde{B}_m(\mathbf{k}', 0) \rangle_{i.c.} = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') e^{-k^2 l^2} (k^2 \delta_{mn} - k_m k_n)$$

$l_\eta = \sqrt{\eta / \lambda_1}$ - масштаб магнитной диффузии

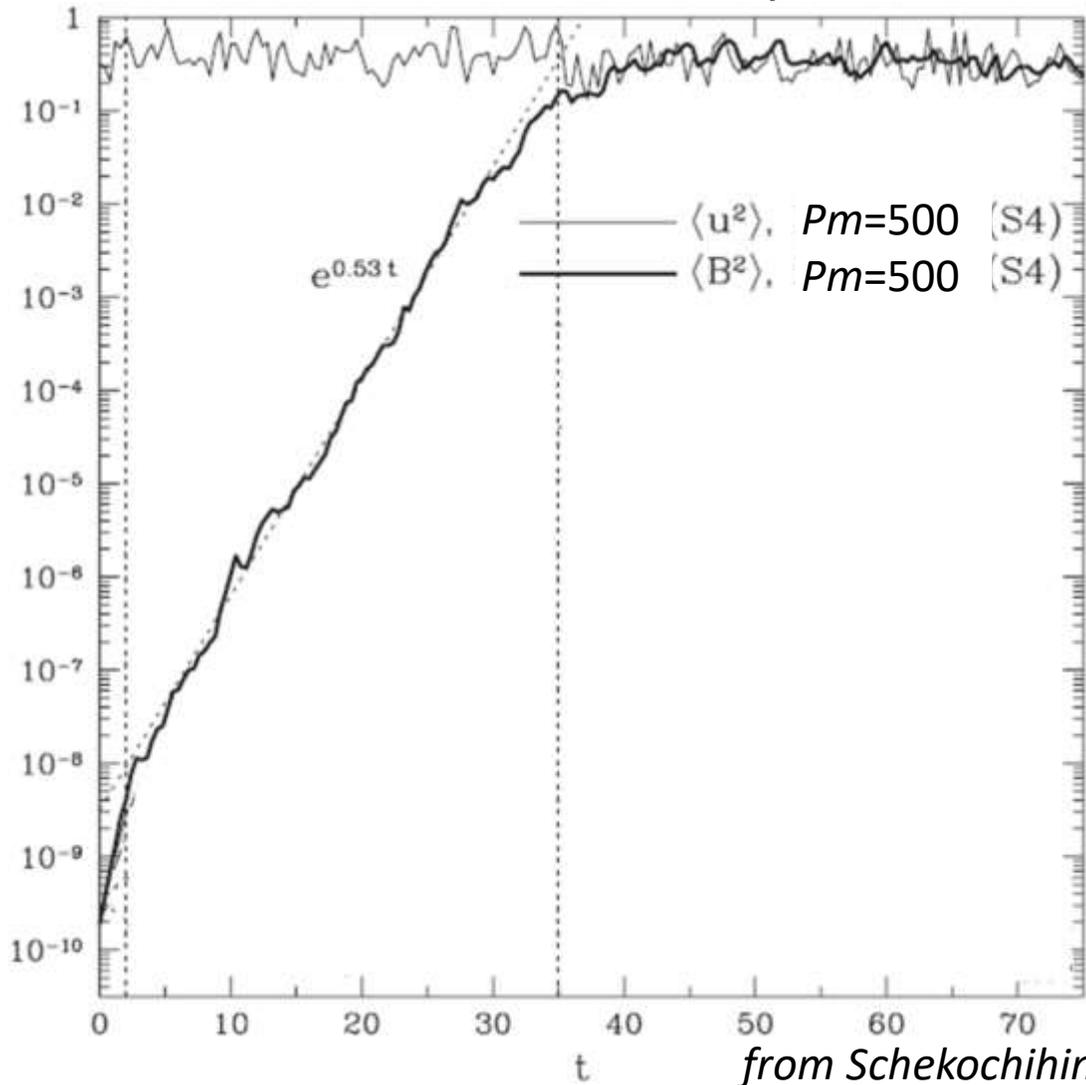
$l_\nu = \sqrt{\nu / \lambda_1}$ - колмогоровский масштаб турбулентности

$$\tilde{f} = (B \nabla) B$$

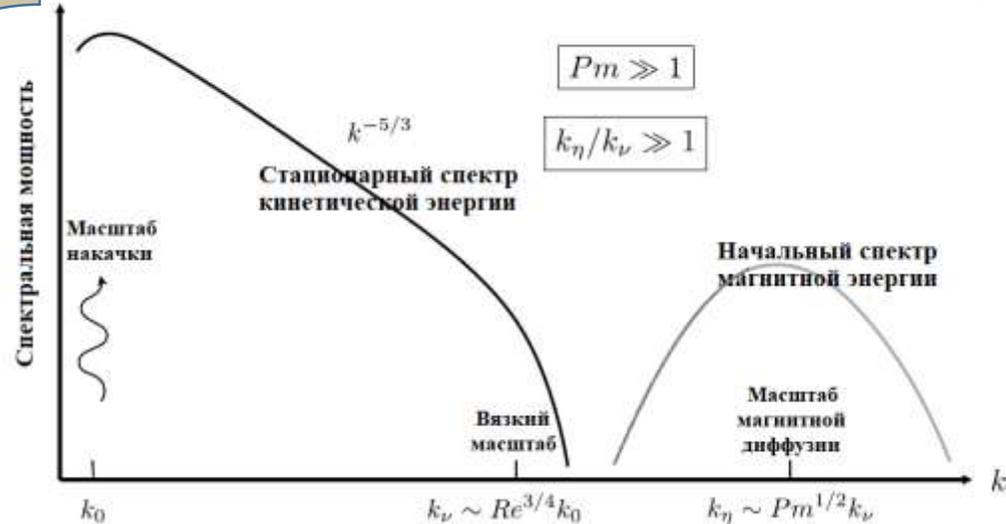


Вид нелинейного спектра

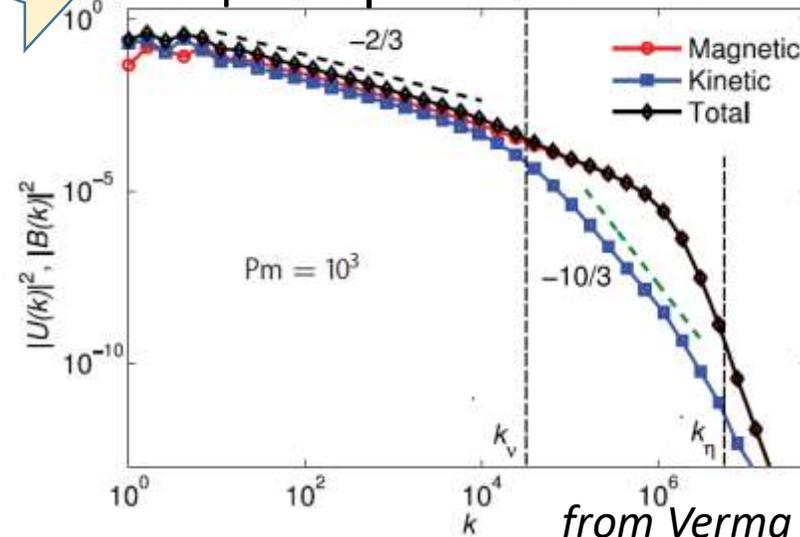
Рост магнитной энергии



Колмогоровский начальный спектр



Стационарный нелинейный спектр



Выводы

- Оказалось, что нарастание магнитного поля в рассмотренной постановке не приводит к обратному влиянию на поле скорости и это влияние даже уменьшается

$$\tilde{f} \equiv (B\nabla)B \neq B^2/l_\eta$$

- Одной из причин вырождения обратного влияния является вытягивание магнитного поля вдоль линии растяжения (кинематический эффект)
- Другая причина связана с конечной проводимостью потока. Так, в идеально проводящей среде ($\eta=0$) сила Лоренца экспоненциально нарастает. Однако наличие даже малой диффузии существенно уменьшает инкремент нарастания магнитного поля, что приводит к затуханию всех моментов силы Лоренца (динамический эффект)
- Затухание происходит на временах $t > \left| \lambda_3^{-1} \right| \ln l / l_\eta$. Таким образом, сила Лоренца остается малой в случае сколь угодно малой конечной диффузии, если начальные возмущения достаточно малы
- Вырождение обратного воздействия имеет место до тех пор, пока справедливо линейное разложение скорости: $t < \frac{1}{2} \lambda_1^{-1} \ln l_v / l$

- Оказалось, что нарастание магнитного поля в рассмотренной постановке не приводит к обратному влиянию на поле скорости и это влияние даже уменьшается

$$\tilde{f} \equiv (B\nabla)B \neq B^2/l_\eta$$

- Одной из причин вырождения обратного влияния является вытягивание магнитного поля вдоль линии растяжения (кинематический эффект)
- Другая причина связана с конечной проводимостью потока. Так, в идеально проводящей среде ($\eta=0$) сила Лоренца экспоненциально нарастает. Однако наличие даже малой диффузии существенно уменьшает инкремент нарастания магнитного поля, что приводит к затуханию всех моментов силы Лоренца (динамический эффект)
- Затухание происходит на временах $t > \left| \lambda_3^{-1} \right| \ln l / l_\eta$. Таким образом, сила Лоренца остается малой в случае сколь угодно малой конечной диффузии, если начальные возмущения достаточно малы
- Вырождение обратного воздействия имеет место до тех пор, пока справедливо линейное разложение скорости: $t < \frac{1}{2} \lambda_1^{-1} \ln l_v / l$