



Графы, сети, кривизна и графодинамика: от Эйлера до наших дней

д.ф.-м.н. Николай Григорьевич Макаренко

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, С.-Петербург

Понятие графа и основы теории графов заложил швейцарский, прусский и российский математик Леонард Эйлер в 1736 году, решив знаменитую задачу о семи мостах Кёнигсберга. Но принято считать, что официально термин «граф» ввел венгерский математик Денеш Кёниг только в 1936 году в своей монографии по этой теме. Однако история началась раньше. В 1870 г. английский математик и преподаватель Джеймс Джозеф Сильвестр уже использовал этот термин в своей Теории Отростков (англ. ramification). Сильвестр считал ее теорией чистого обобщения. Для неё не существенны ни размеры, ни положение объекта; *«в ней используются геометрические линии, но они относятся к делу не больше, чем такие же линии в генеалогических таблицах помогают объяснять законы воспроизведения»*. Сильвестр называл себя «математический Адам», и мы действительно обязаны ему такими терминами, как матрица, дискриминант, якобиан и гессиан. Можно напомнить, что еще в 1847 году физик Густав Кирхгоф тоже фактически разработал теорию деревьев при решении системы уравнений для нахождения величины силы тока в каждом контуре электрической цепи, которая фактически являлась графом.

Графы послужили основой многих конструкций вычислительной геометрии: триангуляции Делоне, разбиения Вороного, альфа формы Эдельсбруннера и т.п. В топологии, для кодирования земной топографии и анализа форм поверхностей используют графы Рибо и комплексы Морса-Смейла.

Тимоти Гауэрс в своей знаменитой лекции «Две культуры в математике», в 1959 г., отметил, что нет ничего проще графов: достаточно познакомиться с определениями и можно решать задачи. Однако он отмечал, что для многих интересных задач не хватает математического интерфейса. Теперь такой инструмент появился. Марк Айзерман в 1977 г. предложил термин графодинамика для описания динамики распределенного объекта с помощью изменяющихся во времени графов. Хорошими примерами ее нечаянной реализаций является семафорная азбука, разработанная в 1895 г. адмиралом С.О. Макаровым, и язык танца пчел, обнаруженный нобелевским лауреатом Карлом фон Фришем.

Существуют разные способы получения графа из временных рядов и динамики случайных полей. Диапазон методов включает графики рекуррентности, символическую динамику, Scale Space и многие другие. Для количественного описания различных сценариев в графодинамике удобно использовать спектр

дискретного лапласиана (матрицы Кирхгофа-Лапласа) или оператора Ходжа-Лапласа.

Кроме спектров графа можно использовать дискретную кривизну Риччи. Известны два подхода для ее получения: с помощью техники Бохнера из римановой геометрии (кривизна Формана-Риччи) и посредством транспортных метрик и задачи Монжа-Канторовича (кривизна Оливье-Риччи). Физическая интерпретация дискретной кривизны основана на ее связи с больцмановской энтропией распределенной системы. Большой прикладной потенциал описанного дизайна начал пониматься и использоваться совсем недавно. Оказалось, что кривизна позволяет выделять критические режимы в динамике сложных систем, будь то финансовые рынки, рост раковых клеток в биологических тканях, когнитивные функции коры мозга или предвспышечные режимы в активных областях Солнца. В лекции будут приведены примеры использования этой техники в биофизике, хаотической динамике и астрономии.