



Асимптотическая теория солитонов для неинтегрируемых уравнений

д.ф.-м.н. Анатолий Михайлович Камчатнов

*Институт спектроскопии РАН, Москва, Троицк;
Сколковский институт науки и технологий, Москва*

Как известно, понятие полной интегрируемости нелинейных волновых уравнений играет чрезвычайно важную роль в теории солитонов. Однако появление солитонов в нелинейных волновых системах имеет общий характер и не ограничено узким классом интегрируемых уравнений. Поэтому представляется желательным развить теорию солитонов для более широкого класса неинтегрируемых уравнений, и настоящая лекция посвящена такому более общему подходу. По существу, он основан на двух классических идеях. Во-первых, на оптико-механической аналогии Гамильтона, согласно которой движение волновых пакетов по неоднородной и меняющейся со временем среде подчиняется уравнениям гамильтоновой механики. Во-вторых, мы используем замечание Стокса, указавшего, что хвосты солитонов описываются теми же самыми линеаризованными уравнениями, что и малоамплитудные волны, и поэтому скорость солитона может быть выражена через закон дисперсии линейных волн, если заменить в нем волновое число обратной полушириной солитона. Мы добавляем к этим двум общим утверждениям более частное требование, что динамика линейного пакета остается гамильтоновой при эволюции фона согласно гидродинамическим (бездисперсионным) уравнениям [1,2]. Это позволяет выразить волновое число несущей волны через переменные фона соотношением, справедливым в асимптотическом пределе больших волновых чисел даже в случае неинтегрируемых уравнений. Преобразование согласно Стоксу полученного соотношения в солитонную область дает основу для вывода уравнений Гамильтона, описывающих динамику солитона при его движении по переменному фону [3,4]. С другой стороны, развитая теория может быть применена к детальному описанию процесса эволюции изначально плавного интенсивного волнового импульса в асимптотическую последовательность солитонов через промежуточную стадию формирования дисперсионной ударной волны. С помощью замечания Гуревича-Питаевского [5], дающего скорость увеличения числа осцилляций в ударной волне, мы можем вычислить число солитонов в асимптотическом пределе большого времени эволюции. Обобщение этого подхода приводит к общему «правилу Бора-Зоммерфельда», с помощью которого мы находим скорость каждого из солитонов в их асимптотическом состоянии [6]. Теория иллюстрируется конкретными примерами и сравнением с точными численными решениями.

Исследования поддержаны проектом Российского научного фонда № 19-72-30028.

1. A.M. Kamchatnov, Asymptotic theory of not completely integrable soliton equations, *Chaos*, 33, 093105 (2023).

2. D.V. Shaykin, A.M. Kamchatnov, Propagation of wave packets along large-scale background waves, *Phys. Fluids*, 35, 062108 (2023).
3. A.M. Kamchatnov, D.V. Shaykin, Propagation of generalized Korteweg–de Vries solitons along large-scale waves, *Phys. Rev. E*, 108, 054205 (2023).
4. А.М. Камчатнов, Гамильтонова теория движения темных солитонов в теории нелинейного уравнения Шрёдингера, *ТМФ*, 219, 44-54 (2024).
5. А.В. Гуревич, Л.П. Питаевский, Усредненное описание волн в уравнении Кортевега-де Вриза-Бюргерса, *ЖЭТФ*, 93, (3) 871-880 (1987).
6. А.М. Камчатнов, Асимптотическая теория солитонов, порождаемых из интенсивного волнового импульса, *ЖЭТФ*, 164, 847-862 (2023).