



УНИВЕРСИТЕТ
ЛОБАЧЕВСКОГО

КВАНТОВЫЙ ХАОС: НЕЛИНЕЙНАЯ ЛИНЕЙНОСТЬ

М.В. Иванченко

ННГУ им. Н.И.Лобачевского

- Квантовые аттракторы
- Понятие квантовых бифуркаций, «хаотическая» квантовая динамика
- Квантовый ляпуновский показатель
- Экспериментальные критерии

New Journal of Physics

The open access journal at the forefront of physics

Deutsche Physikalische Gesellschaft  DPG
IOP Institute of Physics

Published in partnership
with: Deutsche Physikalische
Gesellschaft and the Institute
of Physics



PAPER

Asymptotic Floquet states of open quantum systems: the role of interaction

OPEN ACCESS

RECEIVED
17 March 2017

REVISED

M Hartmann¹, D Poletti², M Ivanchenko³, S Denisov^{1,3,4,7} and P Hänggi^{1,3,4,5,6}

¹ Institute of Physics, University of Augsburg, Universitätsstraße 1, D-86159 Augsburg, Germany

ORIGINAL PAPER

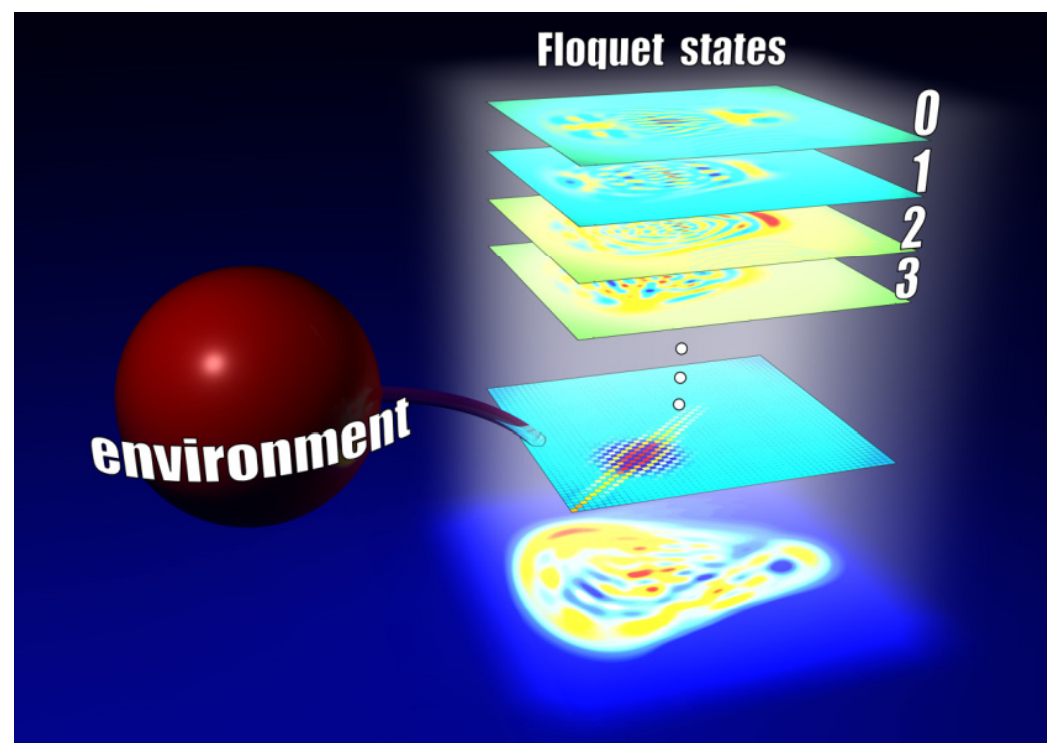
Open Quantum Systems

annalen
der **physik**
www.ann-phys.org

Classical Bifurcation Diagrams by Quantum Means

Mikhail V. Ivanchenko, Eugene A. Kozinov, Valentin D. Volokitin, Alexey V. Liniov,
Iosif B. Meyerov, and Sergey V. Denisov*

- **Консервативные системы:**
Собственные числа и состояния гамильтониана
- **Диссипативные системы:**
Нетривиальные устойчивые состояния квантовых систем, взаимодействующих с окружающей средой



- Уравнение Линдблада для матрицы плотности:

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}_t(\rho) = -i[H(t), \rho] + \mathcal{D}(\rho),$$

диагональные элементы ρ_{nn} которой соответствуют вероятности найти систему в n -ом состоянии

- $H(t)$ – гамильтониан системы, отвечающий за унитарную эволюцию
- Диссипация:**

$$\mathcal{D}(\rho) = \sum_{k=1}^S \gamma_k(t) \left(V_k \rho V_k^\dagger - \frac{1}{2} \{V_k^\dagger V_k, \rho\} \right) \quad \{V_k\}_{1, \dots, S}$$

- Система линейных дифференциальных уравнений с N^2 фазовых переменных

$$N \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1N} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \dots & \rho_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{N1} & \rho_{N2} & \dots & \rho_{NN} \end{pmatrix} \right\} = \underbrace{(\rho_{11} \quad \rho_{12} \quad \dots \quad \rho_{1N} \quad \dots \quad \rho_{NN})}_{N^2}$$

[1] H. P. Breuer and F. Petruccione, The Theory of Open Quantum Systems (2002)
[2] R. Alicki and K. Lendi, Lecture Notes in Physics Vol. 286(Springer, Berlin, 1987).

Динамика в «привычном» фазовом пространстве

Преобразование уравнения Линдблада к матричной форме путем перехода в полный ортонормированный базис матриц $\{F_k\}$, $k=1, \dots, N^2-1$ для пространства эрмитовых матриц $N \times N$ (группа $SU(N)$, “обобщенные матрицы Гелл-Манна”, R. Alicki, K. Lendi, 1987)

$$F_0 = \mathbb{1} \quad \text{Tr}(F_k) = 0, \quad F_k = F_k^\dagger, \quad \text{Tr}(F_l F_k) = \delta_{lk}, \quad \forall l, k.$$

Разложение в базисе

$$\varrho = \sum_{k=0}^{N^2-1} v_k \cdot F_k, \quad \{v_n = \text{Tr}(\varrho \cdot F_k)\} \in \mathbb{R},$$

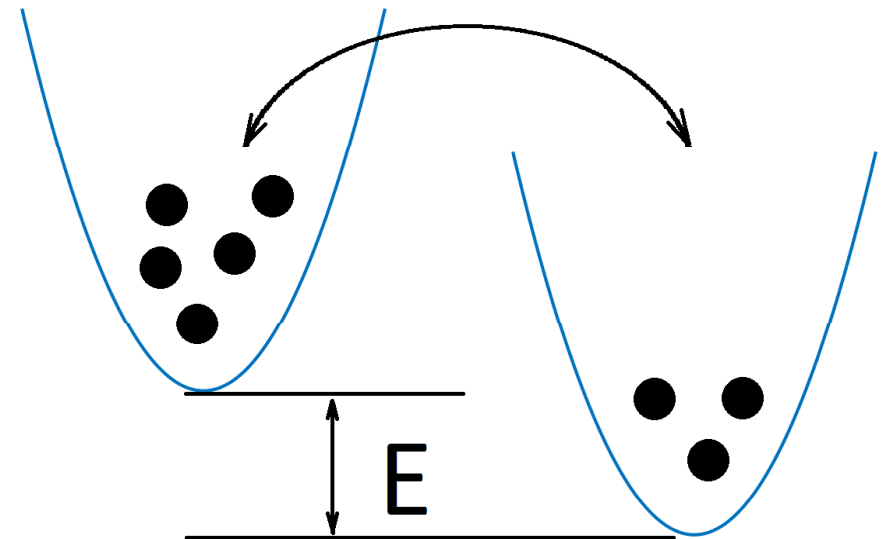
ОДУ для действительных фазовых переменных $\dot{v} = G(t)v + K$

- Единственное устойчивое состояние равновесия для автономной системы
- Единственная устойчивая периодическая траектория для периодически модулированной системы, $\varepsilon(t) = \varepsilon(t+T)$
- Тривиальная динамика?

Гамильтониан:

$$H(t) = J(b_1^\dagger b_2 + b_2^\dagger b_1) + \frac{U}{2N} \sum_{j=1,2} n_j(n_j - 1) + (E + \varepsilon(t))(n_2 - n_1)$$

- $n_{1,2}$ – число частиц в каждой ячейке, $n_1 + n_2 = N = const$
- $b_{1,2}^\dagger$ и $b_{1,2}$ – операторы рождения и уничтожения частиц на каждом сайте
- J – коэффициент тунелирования
- U – сила взаимодействия между частицами
- E – разность энергий между потенциальными ямами
- $\varepsilon(t)$ – модуляция системы, зависящая от времени



$$\mathcal{D}(\rho) = \sum_{k=1}^S \gamma_k(t) \left(V_k \rho V_k^\dagger - \frac{1}{2} \{ V_k^\dagger V_k, \rho \} \right)$$

- Эрмитовы диссипаторы: $V_k = b_k b_k^\dagger$

Тривиальный вид асимптотической матрицы плотности: $\rho_\infty = \mathbb{1}/N$

- $V_k = (b_k^\dagger + b_{k+1}^\dagger)(b_k - b_{k+1})$

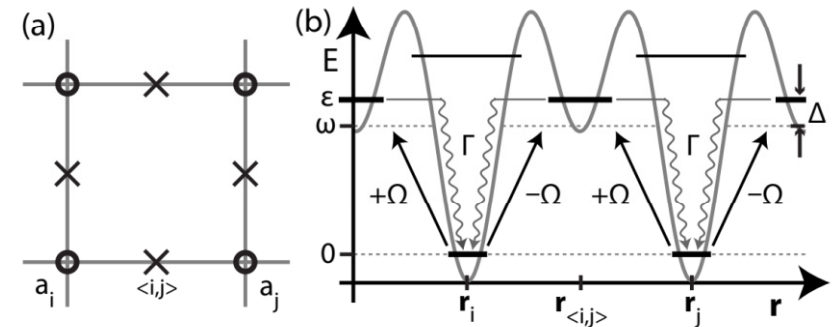
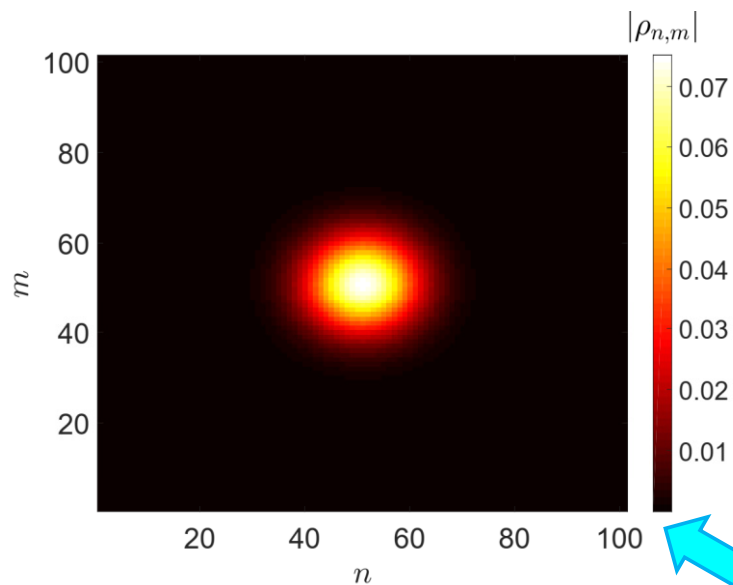


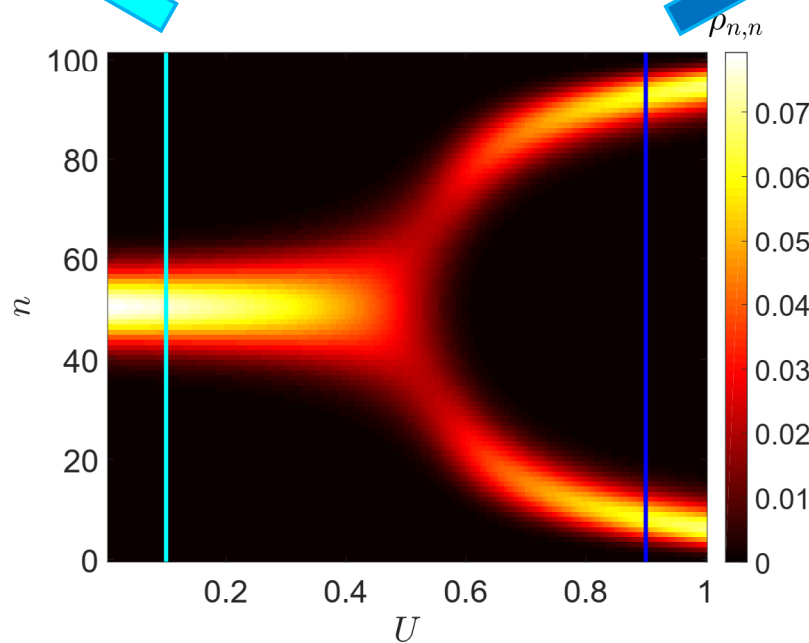
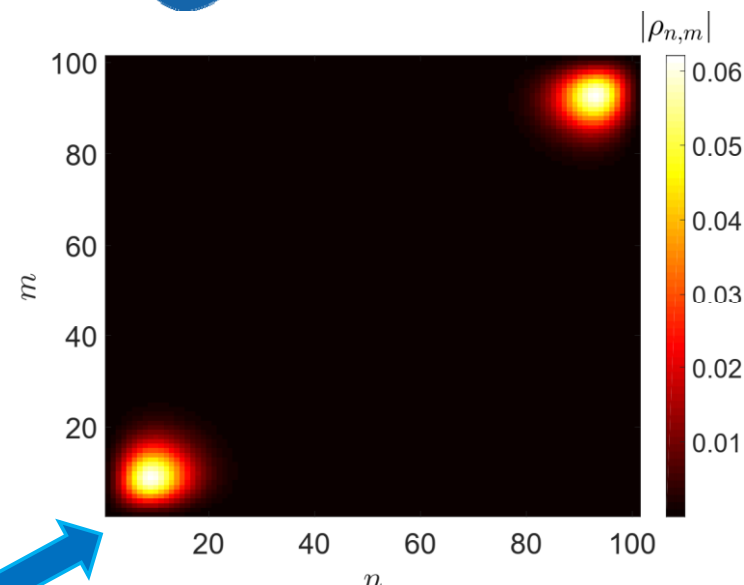
FIG. 1: Driven Dissipative Condensate: (a) A lattice gas a is immersed in a condensate b , which acts on the links $\langle i, j \rangle$ (crosses) of neighboring lattice sites i and j in the form a dissipative current. (b) Schematic realization of the effective dissipative process in an optical super-lattice, which provides for excited states gapped by ε and localized on the links of neighboring lattice sites $\langle ij \rangle$: A Raman laser couples the ground and excited bands with effective Rabi-frequency Ω and detuning $\Delta = \omega - \varepsilon$ from the inter-band transition. The spatial modulation of the Raman-laser yields in a position dependent coupling, which excites only the anti-symmetric component of atoms sitting on neighboring lattice sites i and j into the upper band. The inter-band decay with a rate Γ back to their lower band is obtain via the emission of phonons into the surrounding BEC.

[1] S. Diehl, et al., Nat. Phys. (2008);

Бифуркационная диаграмма



$N = 100$
 $\mathcal{J} = 1$
 $E = 0$
 $\varepsilon(t) = 0$
 $\gamma = 0.1$



«Спиновые» операторы

$$\mathcal{S}_x = \frac{1}{2N} (b_1^\dagger b_2 + b_2^\dagger b_1), \quad \mathcal{S}_y = -\frac{i}{2N} (b_1^\dagger b_2 - b_2^\dagger b_1), \quad \mathcal{S}_z = \frac{1}{2N} (n_1 - n_2)$$

Предел бесконечной системы и
переход от операторов к их
ожидаемым

$$[\mathcal{S}_x, \mathcal{S}_y] = i\mathcal{S}_z / N \stackrel{N \rightarrow \infty}{=} 0$$

$$\langle \mathcal{S}_k \rangle = \text{tr}[\rho \mathcal{S}_k]$$

Пренебрегаем слагаемыми $O(1/N)$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{S}_x}{dt} &= 2\varepsilon(t)\mathcal{S}_y - 2U\mathcal{S}_z\mathcal{S}_y + 8\gamma(\mathcal{S}_y^2 + \mathcal{S}_z^2), \\ \frac{d\mathcal{S}_y}{dt} &= -2\varepsilon(t)\mathcal{S}_x + 2U\mathcal{S}_x\mathcal{S}_z + 2J\mathcal{S}_z - 8\gamma\mathcal{S}_x\mathcal{S}_y, \\ \frac{d\mathcal{S}_z}{dt} &= -2J\mathcal{S}_y - 8\gamma\mathcal{S}_x\mathcal{S}_z, \end{aligned}$$

- Итоговая система:

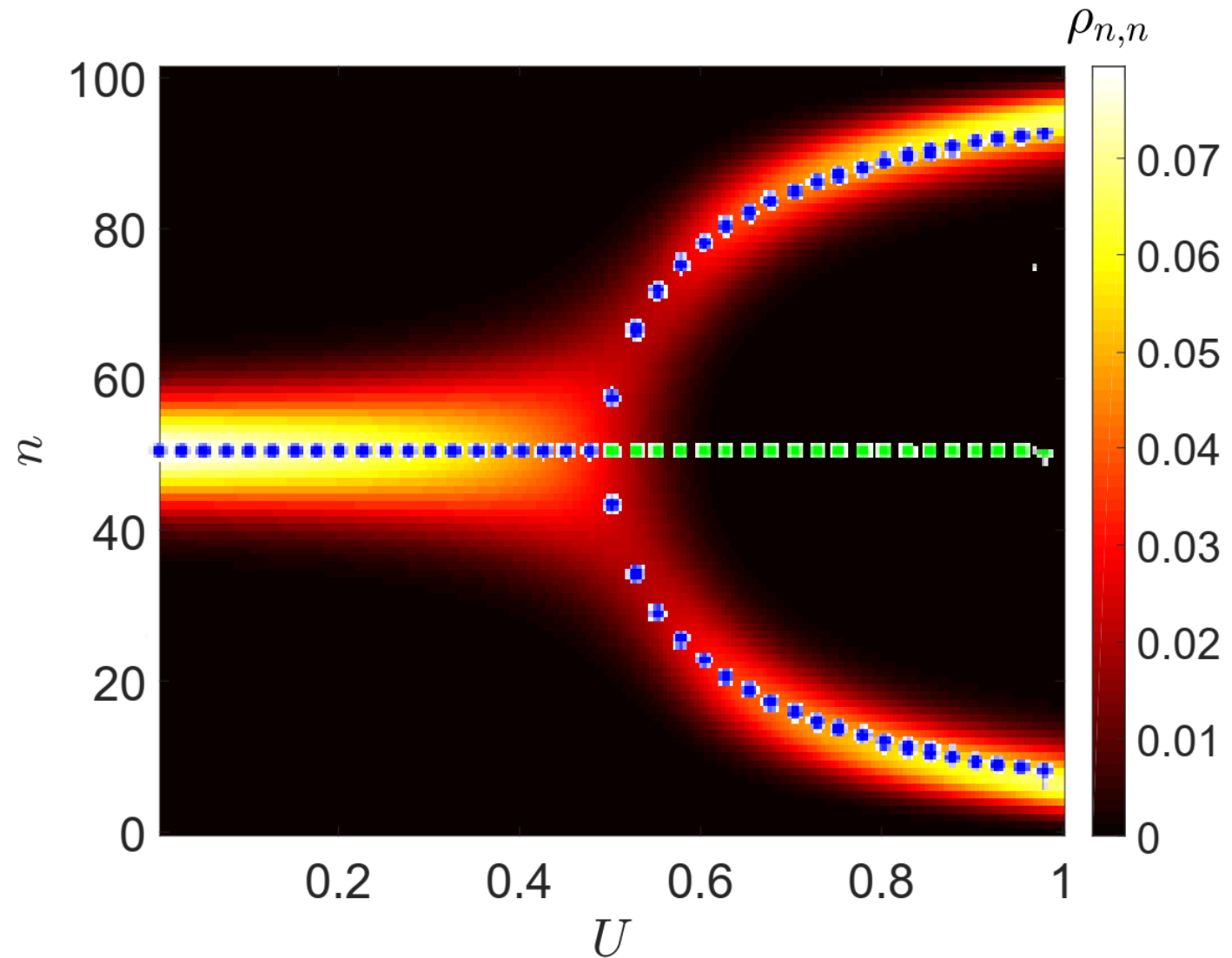
$$\dot{\vartheta} = 2J \sin(\varphi) + 4\gamma \cos(\varphi) \cos(\vartheta)$$

$$\dot{\varphi} = 2J \frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} \cos(\varphi) - 2(E + \varepsilon(t)) + U \cos(\vartheta) - 4\gamma \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\vartheta)}$$

- Число частиц:

$$n_1 = \frac{(\cos(\vartheta) + 1)}{2} \cdot N \quad n_2 = N - n_1$$

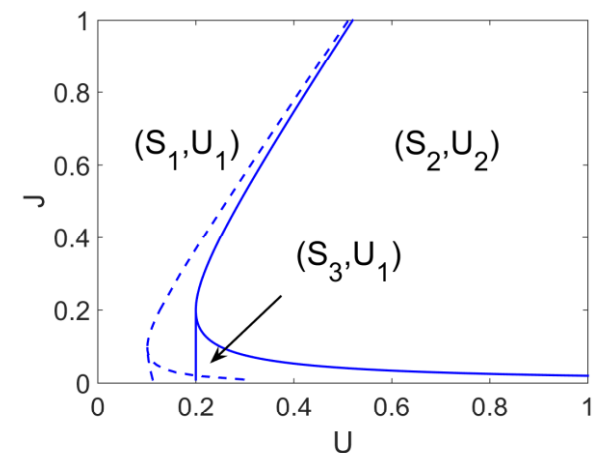
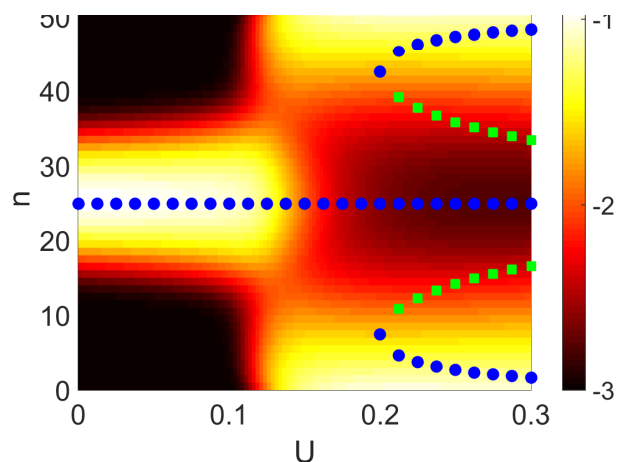
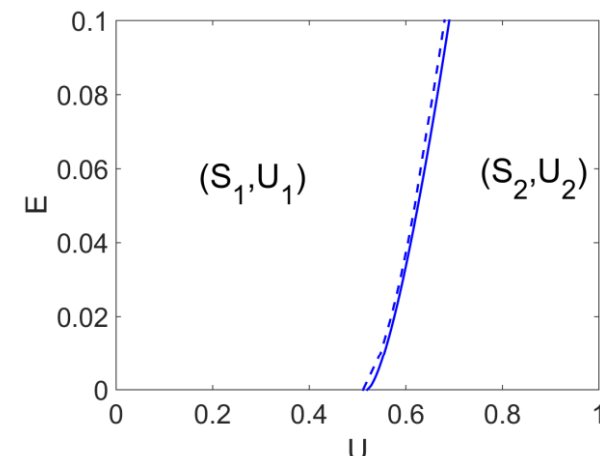
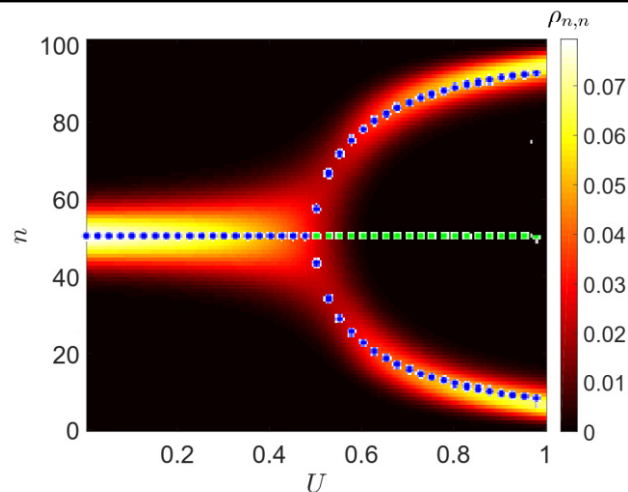
$N = 100$
 $J = 1$
 $E = 0$
 $\varepsilon(t) = 0$
 $\gamma = 0.1$

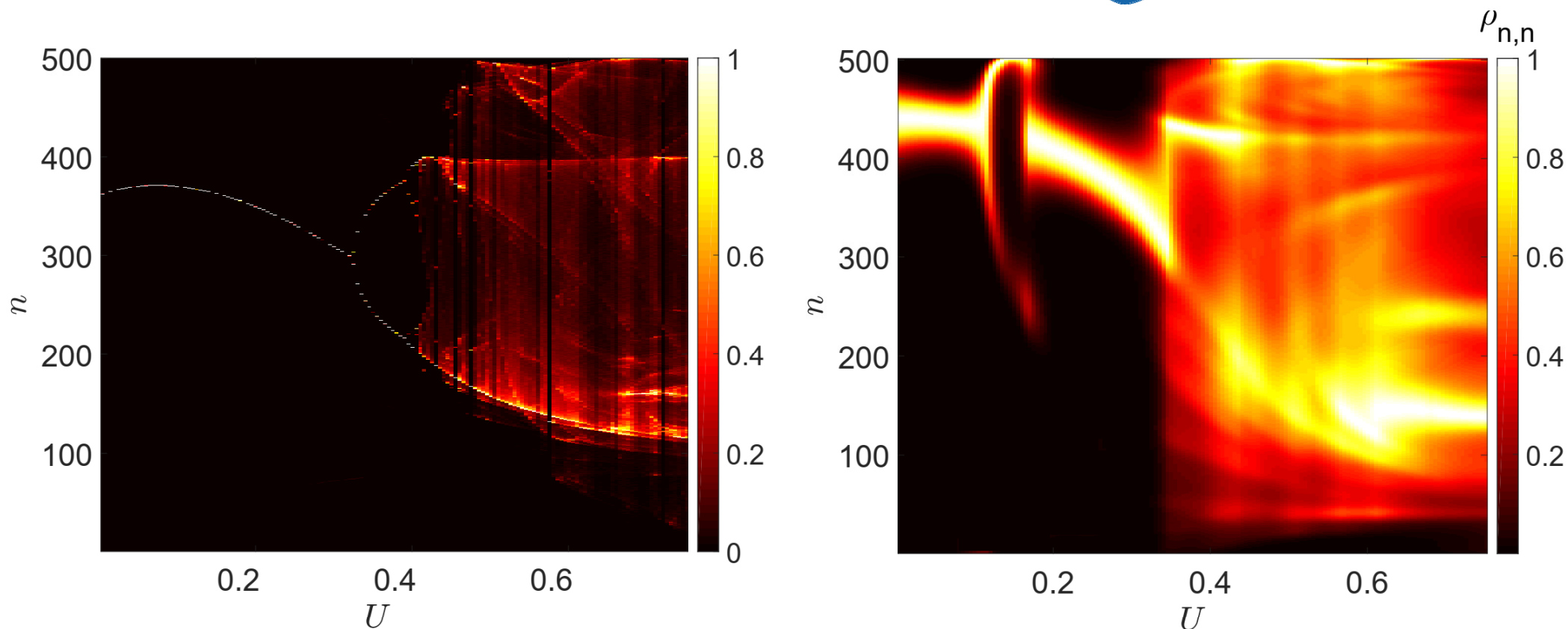


Бифуркационные условия:

$$\varrho_{n-1,n-1} = \varrho_{n,n} = \varrho_{n+1,n+1}$$

$$\partial_n \varrho = \partial_{nn} \varrho = 0, \text{ while } \varrho_{n,n} \neq 0$$





$$N = 500$$

$$J = 1$$

$$E = 1$$

$\varepsilon(t)$ -кусочно-постоянный

$$\gamma = 0.1$$

[1] Hartmann Michael, et al. "Asymptotic Floquet states of open quantum systems: the role of interaction." *New Journal of Physics* 19.8 (2017): 083011.

[2] Ivanchenko Mikhail V., et al. "Classical Bifurcation Diagrams by Quantum Means." *Annalen der Physik* 529.8 (2017).

Quantum Lyapunov exponents beyond continuous measurements

Cite as: Chaos 29, 063130 (2019); doi: [10.1063/1.5094324](https://doi.org/10.1063/1.5094324)

Submitted: 28 February 2019 · Accepted: 10 June 2019 ·

Published Online: 28 June 2019



View Online



Export Citation



CrossMark

I. I. Yusipov,¹ O. S. Vershinina,¹ S. Denisov,² S. P. Kuznetsov,³ and M. V. Ivanchenko¹

AFFILIATIONS

¹Department of Applied Mathematics, Lobachevsky University, Nizhny Novgorod 603950, Russia

²Department of Computer Science, Oslo Metropolitan University, Oslo N-0130, Norway

³Kotelnikovs Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov 410019, Russia

ABSTRACT

Quantum systems, when interacting with their environments, may exhibit nonequilibrium states that are tempting to be interpreted as quantum analogs of chaotic attractors. However, different from the Hamiltonian case, the toolbox for quantifying dissipative quantum chaos remains limited. In particular, quantum generalizations of Lyapunov exponents, the main quantifiers of classical chaos, are established only within the framework of continuous measurements. We propose an alternative generalization based on the unraveling of quantum master equation into an ensemble of “quantum trajectories,” by using the so-called Monte Carlo wave-function method. We illustrate the idea with a periodically modulated open quantum dimer and demonstrate that the transition to quantum chaos matches the period-doubling route to chaos in the corresponding mean-field system.

Published under license by AIP Publishing. <https://doi.org/10.1063/1.5094324>

Уравнение Линдблада

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}(\rho) = -i[H(t), \rho] + \sum_{k=1}^K \gamma_k(t) \cdot \mathcal{D}_k(\rho),$$

$$\mathcal{D}_k(\rho) = V_k \rho V_k^\dagger - \frac{1}{2} \{V_k^\dagger V_k, \rho\}.$$

- Численное интегрирование
- Отыскание нулевого супервектора

- [1] R. Dum, et al., Phys. Rev. A 46, 4382 (1992)
 [2] M. B. Plenio and P. L. Knight, Rev. Mod. Phys. 70, 101 (1998)
 [3] Benettin, et al, Phys. Rev. A 14:2338–2344 (1976)

Сэмплинг решений эффективного уравнения Шредингера

$$\tilde{H}(t) = H(t) - \frac{i}{2} \sum_{k=1}^K V_k^\dagger V_k,$$

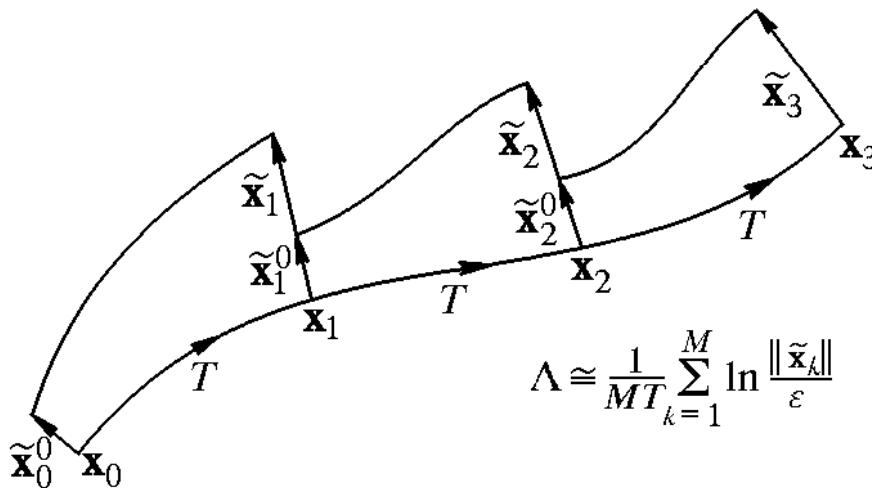
and then proceed along the following path of instructions [36]:

- (1) initiate the trajectory in a pure state $|\psi^{\text{init}}\rangle$;
- (2) draw a random number η which is uniformly distributed on the unit interval;
- (3) propagate the quantum state $|\psi(t)\rangle$ in time using the effective Hamiltonian $\tilde{H}(t)$;
- (4) the squared norm $\| |\psi(t)\rangle \|^2$ decays monotonically. When the equality $\eta = \| |\psi(t)\rangle \|^2$ is reached, stop the propagation and normalize the state vector, $|\psi(t)\rangle \rightarrow |\psi(t)\rangle / \| |\psi(t)\rangle \|$;
- (5) perform a quantum jump: select the jump operator D_k with probability $p_k = \gamma_k \| D_k |\psi(t)\rangle \|^2 / \sum_{k=1}^K \gamma_k \| D_k |\psi(t)\rangle \|^2$ and apply the transformation $|\psi(t)\rangle \rightarrow D_k |\psi(t)\rangle / \| D_k |\psi(t)\rangle \|$;
- (6) repeat steps 2–5 until the desired time t_p is reached.

$$\rho(t_p; M_r) = \frac{1}{M_r} \sum_{j=1}^{M_r} |\psi_j(t_p)\rangle \langle \psi_j(t_p)|$$

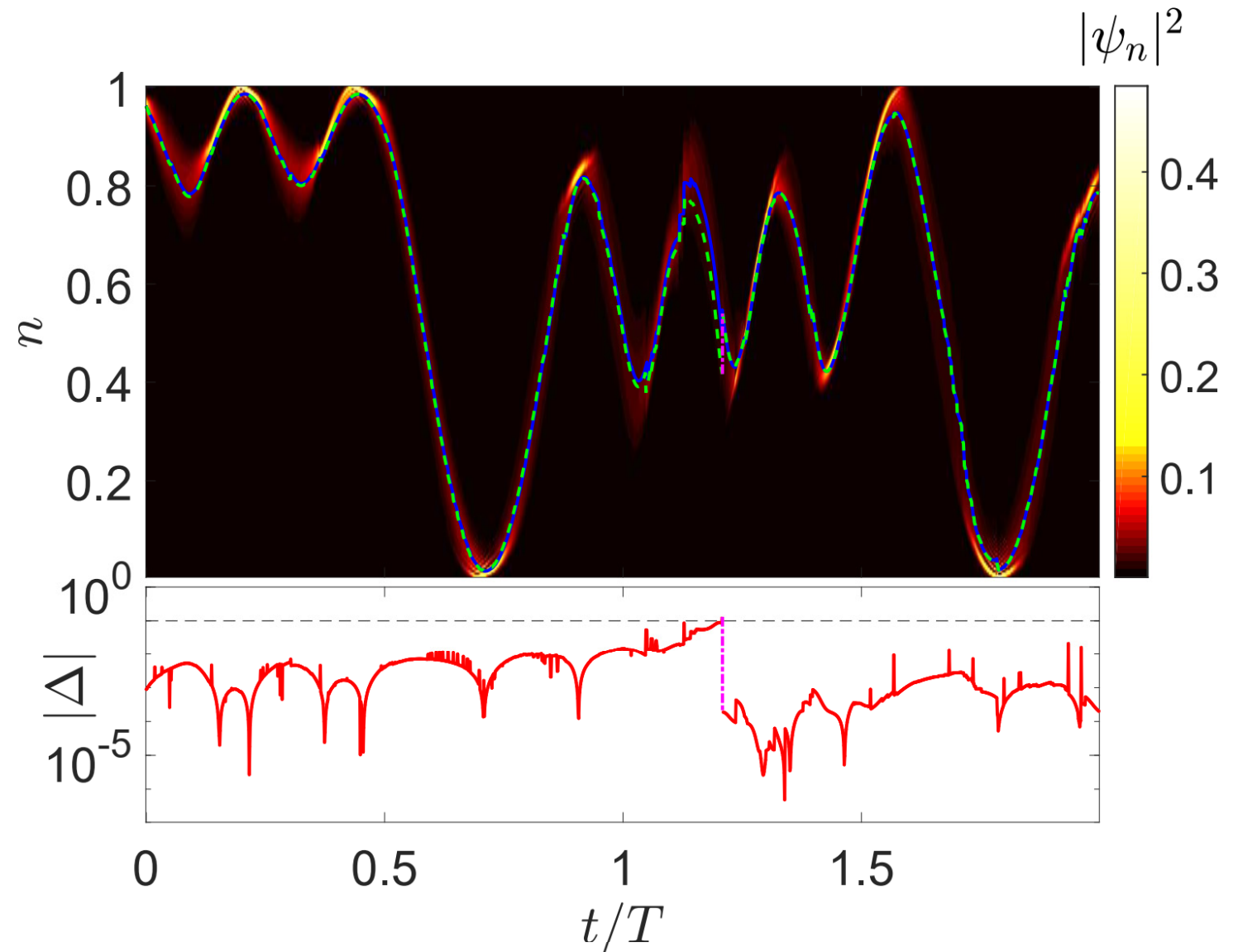
Идея: оценка разбегания близких квантовых траекторий

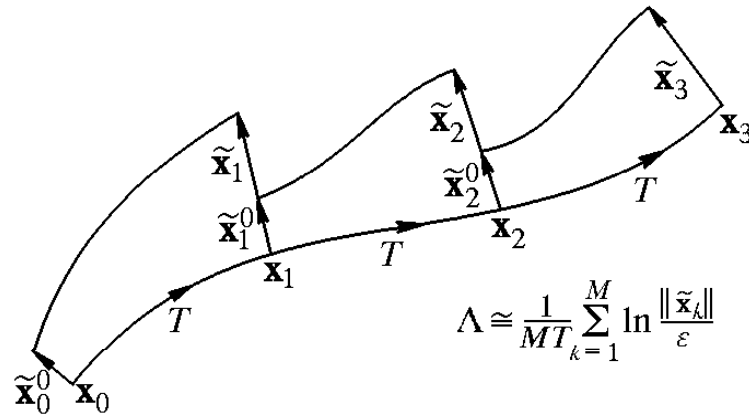
$$\dot{\psi} = H\psi - \frac{i}{2}V^\dagger V\psi$$



- [1] R. Dum, et al., Phys. Rev. A 46, 4382 (1992)
- [2] M. B. Plenio and P. L. Knight, Rev. Mod. Phys. 70, 101 (1998)
- [3] Benettin, et al, Phys. Rev. A 14:2338–2344 (1976)

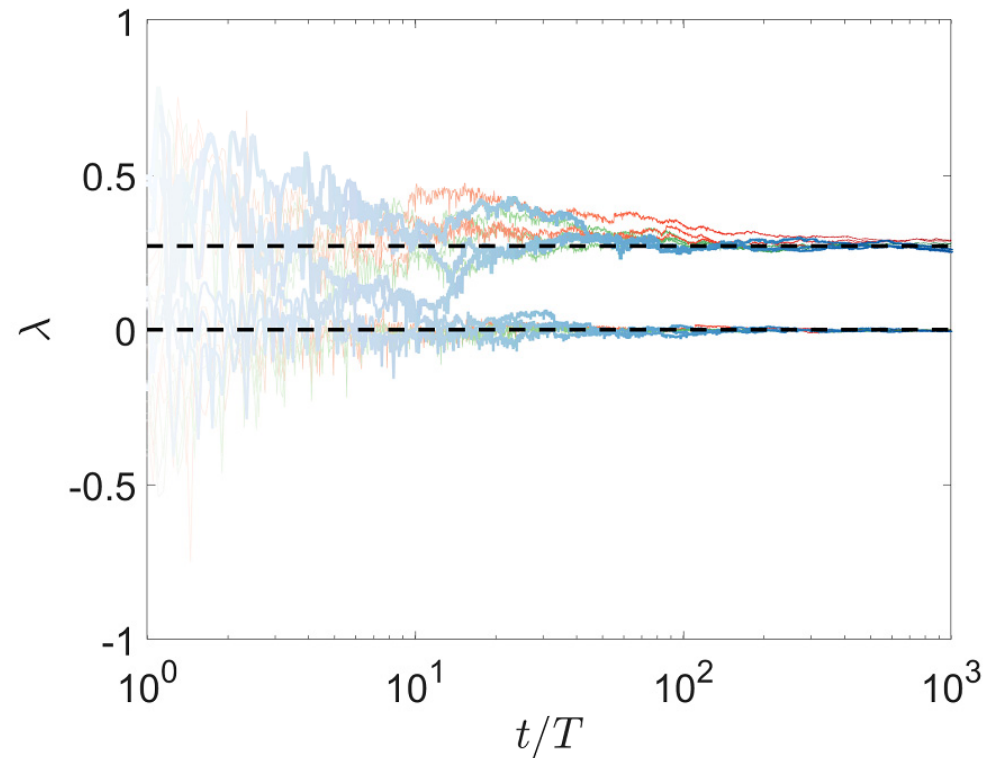
$$n(t) = \frac{1}{N} \sum_k \langle \psi(t) | b_1^\dagger b_1 | \psi(t) \rangle$$

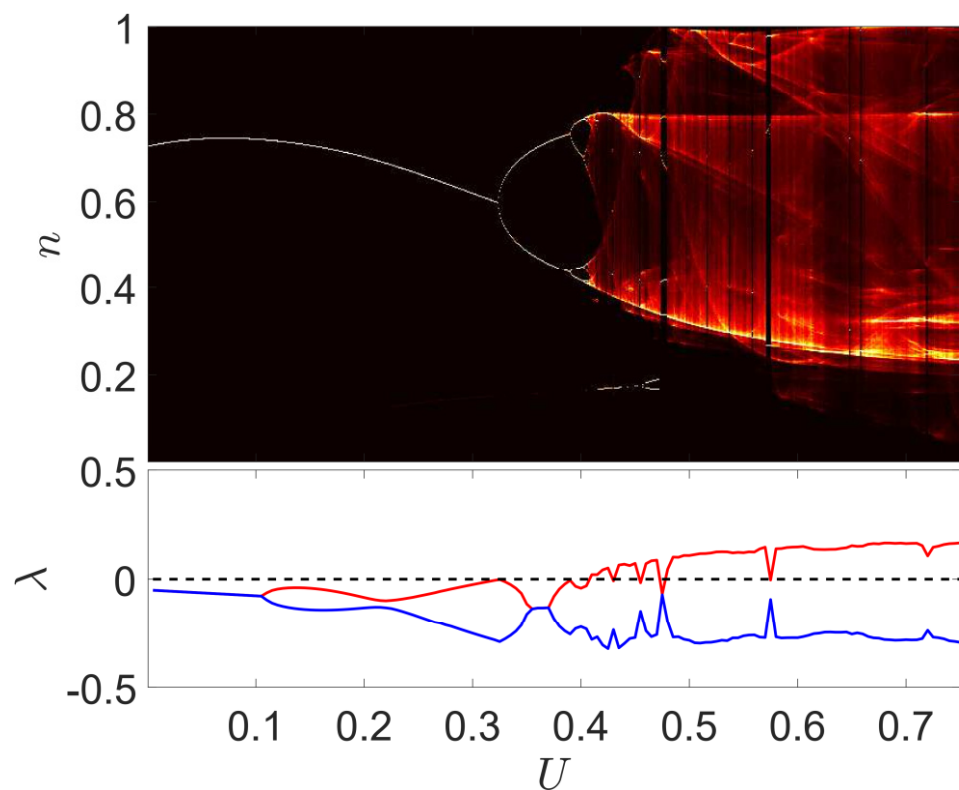




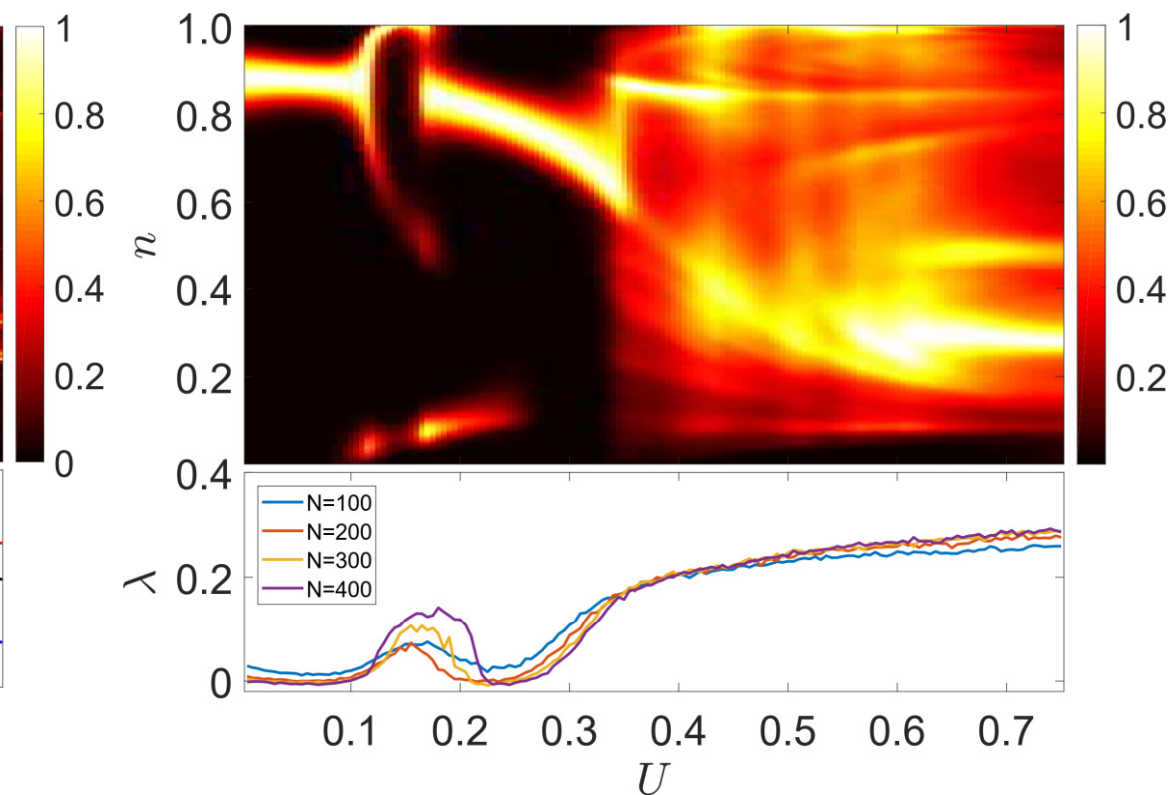
$$\Lambda \approx \frac{1}{MT} \sum_{k=1}^M \ln \frac{\|\tilde{x}_k\|}{\varepsilon}$$

Сходимость



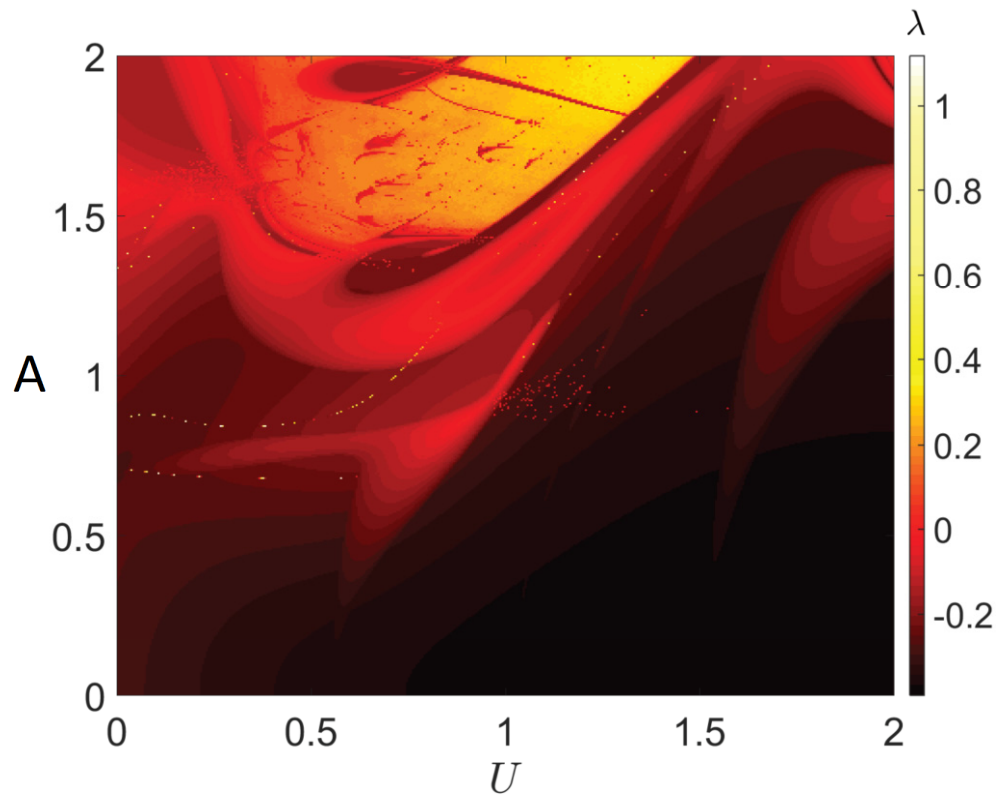


Нелинейные уравнения

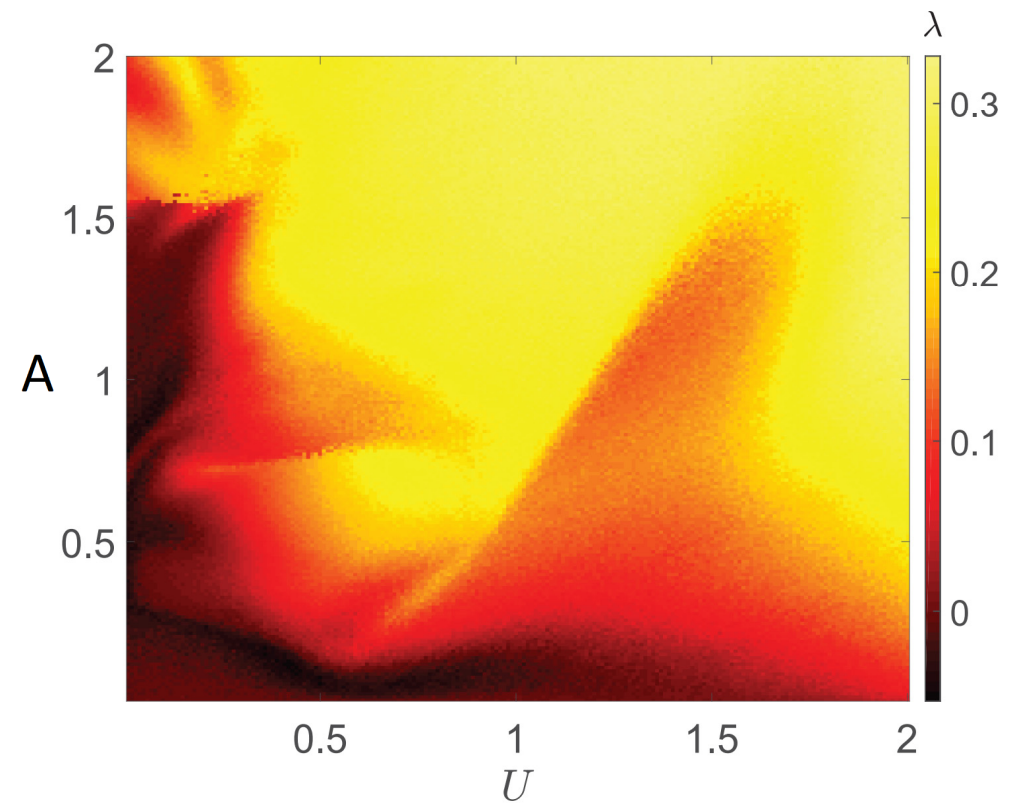


Квантовая модель

$N = 100$
 $J = 1$
 $E = 1$
 $A = 1.5$
 $\gamma = 0.1$



Нелинейные уравнения



Квантовая модель

Photon waiting-time distributions: A keyhole into dissipative quantum chaos

Cite as: Chaos 30, 023107 (2020); doi: [10.1063/1.5127936](https://doi.org/10.1063/1.5127936)

Submitted: 14 September 2019 · Accepted: 14 January 2020 ·

Published Online: 3 February 2020



[View Online](#)



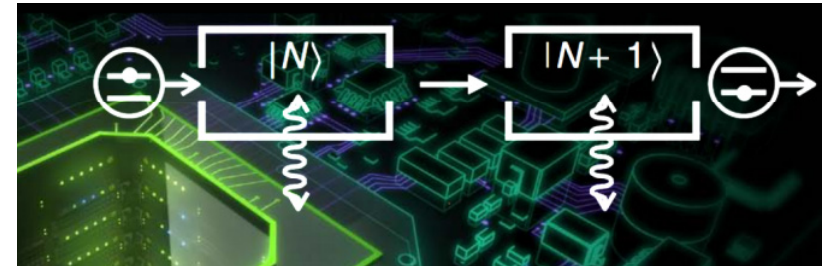
[Export Citation](#)



[CrossMark](#)

I. I. Yusipov,¹ O. S. Vershinina,¹ S. V. Denisov,^{2,3} and M. V. Ivanchenko^{1,3,a)}

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}(\rho) = -i[H, \rho] + \mathcal{D}(\rho)$$



$$H(t) = \frac{1}{2} \chi \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 + i F(t) (\hat{a}^{\dagger} - \hat{a})$$

Керровская нелинейность

Периодическая модуляция

$$\mathcal{D}(\rho) = V \rho V^{\dagger} - \frac{1}{2} \{V^{\dagger} V, \rho\}, \quad V = \sqrt{\gamma} \hat{a}$$

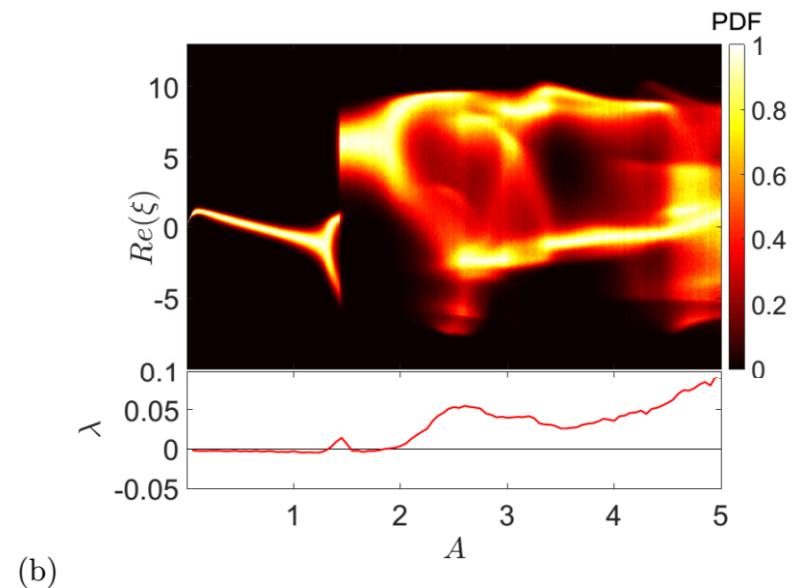
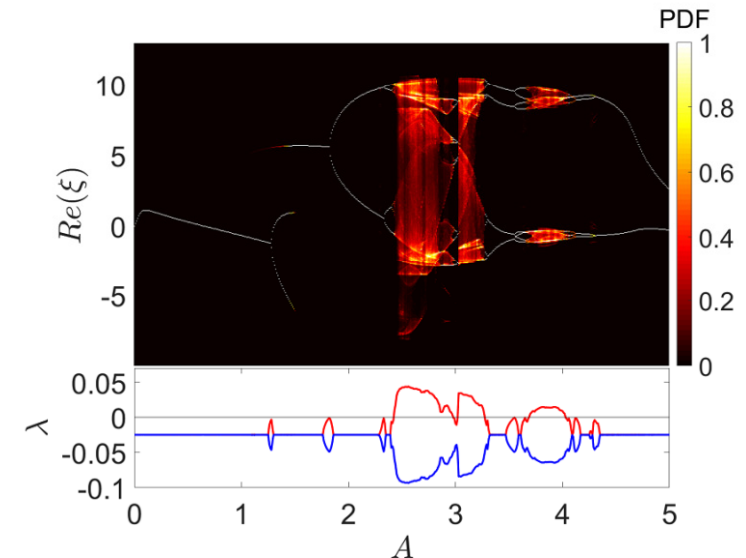
Диссипация -
излучение резонатора

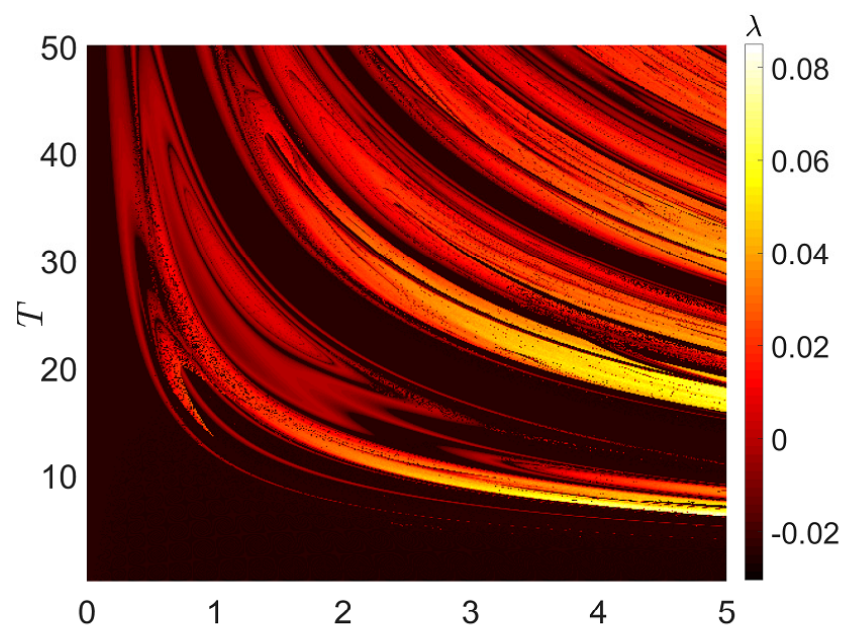
Наблюдаемая для оператора уничтожения

$$\xi(t) = \langle \psi^\dagger(t) | \hat{a} | \psi(t) \rangle$$

Нелинейные уравнения

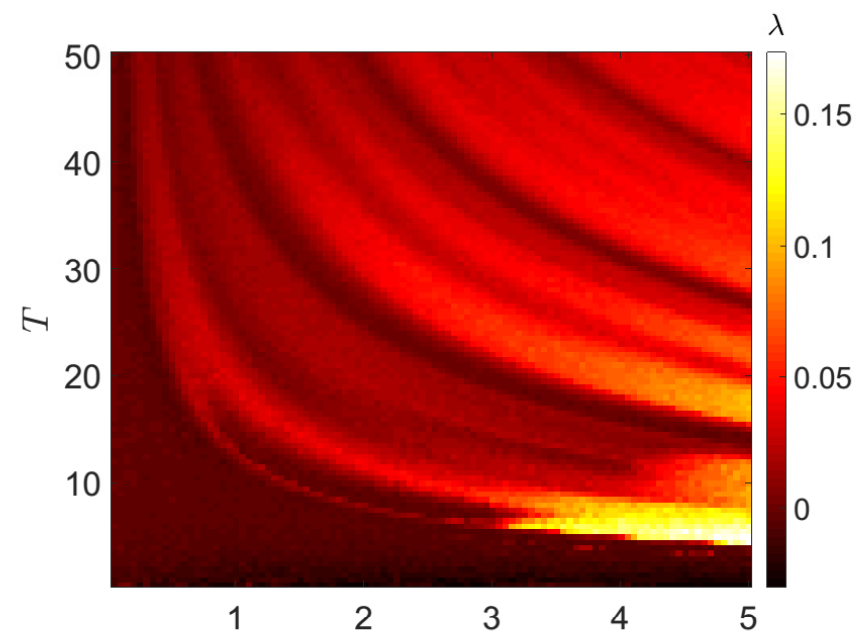
$$\dot{\xi} = -\frac{1}{2}\gamma\xi + F(t) - i\chi|\xi|^2\xi$$





(a)

Нелинейные уравнения



(b)

Квантовая модель

- Квантовый ляпуновский показатель – теоретический инструмент
- В физическом эксперименте можно детектировать излучение отдельных фотонов резонатором
- Как квантовый хаос влияет на статистику интервалов между излучением фотонов?

Квантовые скачки

$$\|\psi(t_{k-1})\| = 1$$

$$\eta_k \in 1_{[0,1]}$$



$$\dot{\psi} = H\psi - \frac{i}{2}V^\dagger V\psi$$
$$\frac{d}{dt}\|\psi\| = -\gamma n(t)\|\psi\|$$



$$\|\psi(t_k)\| = \eta_k$$

$$\psi \rightarrow V\psi$$

Излучение фотона

$$\tau_k = t_k - t_{k-1}$$

Распределение интервалов между квантовыми скачками

$$\frac{d}{dt} \|\psi\| = -\gamma n(t) \|\psi\| \quad \Longrightarrow \quad \|\psi(t)\| = \exp \left[-\gamma \int_{t_{k-1}}^t n(t') dt' \right], \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k$$

Эффективная диссипация нормы

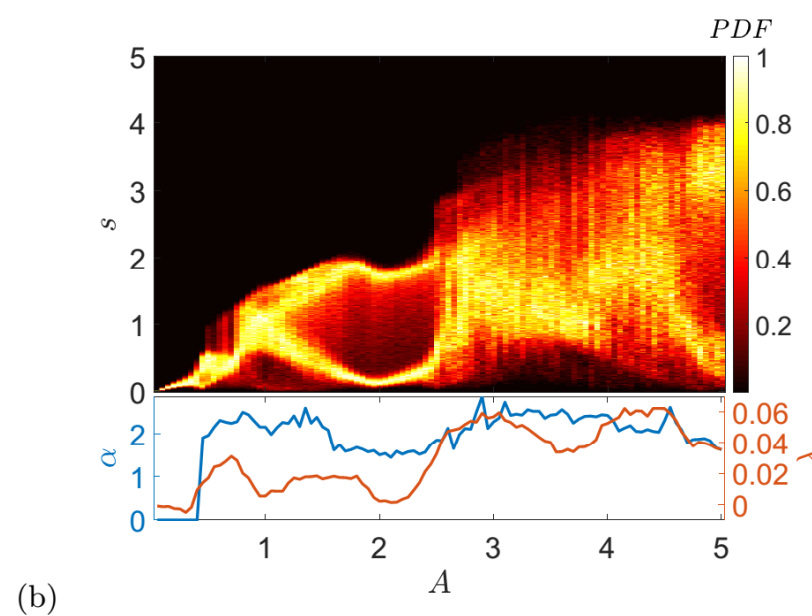
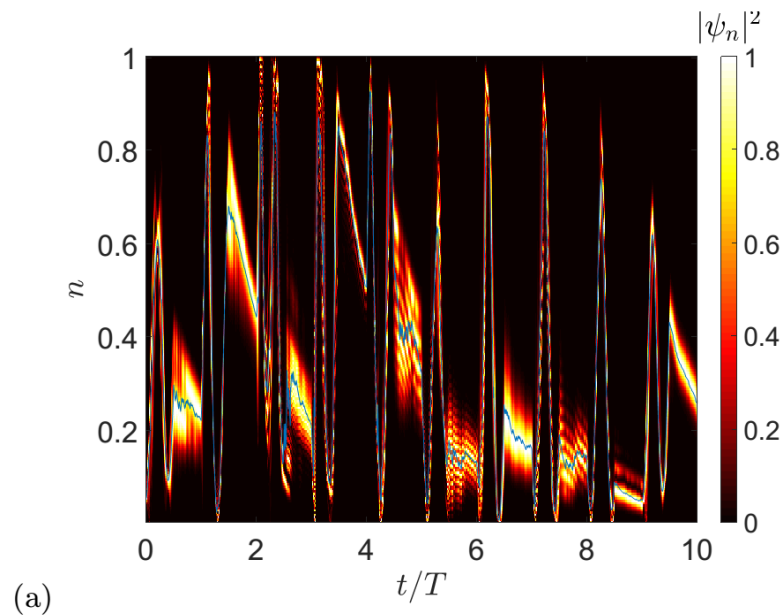
$$s_k = \frac{\gamma}{\tau_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} n(t') dt', \quad \|\psi(t_k)\| = \exp[-s\tau_k].$$

Пуассоновское распределение для **регулярной** динамики

$$s_k \approx const \quad \Longrightarrow \quad \tau_k = -\ln(\eta_k)/s \quad \Longrightarrow \quad W_\tau(\tau) = \exp(-s\tau)/s$$

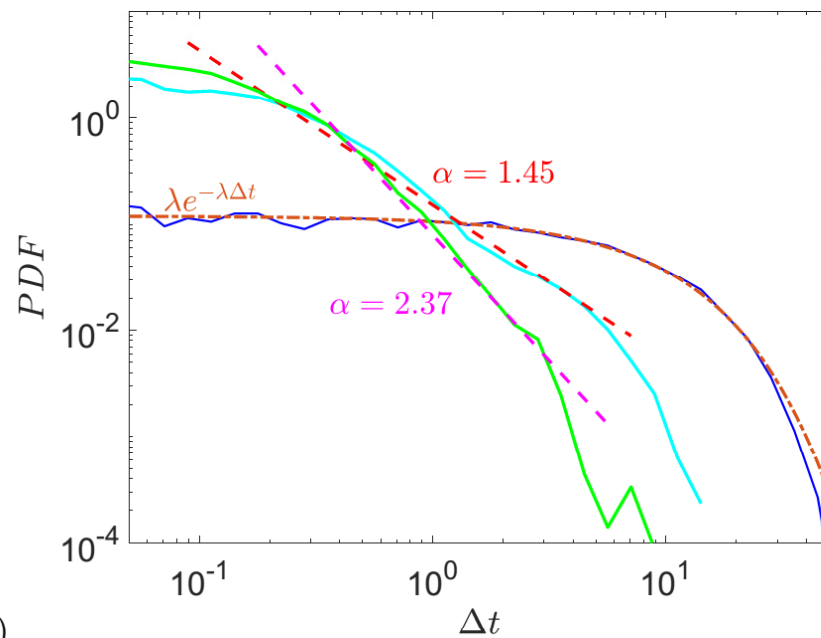
Широкое распределение

$$W_\tau(\tau) = \int_0^\infty s e^{-\tau s} W_s(s) ds \quad \longrightarrow \quad W_\tau(\tau) \sim e^{-s_0 \tau} \left(\frac{s_0}{\tau} + \frac{1}{\tau^2} \right)$$

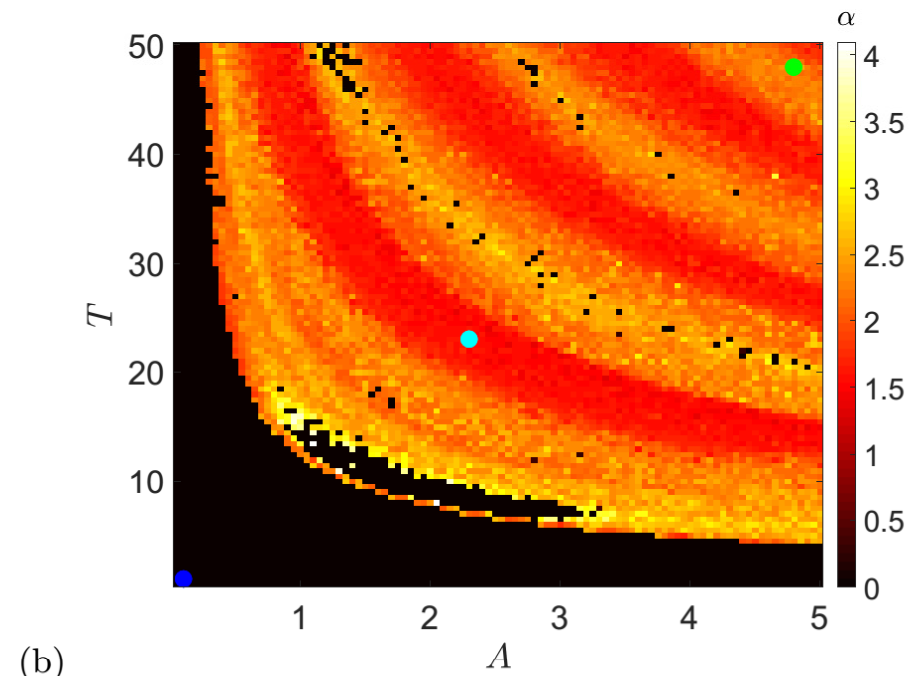


Пуассоновское распределение – «регулярная» квантовая динамика

Степенной интервал – «хаотическая» квантовая динамика





(a)

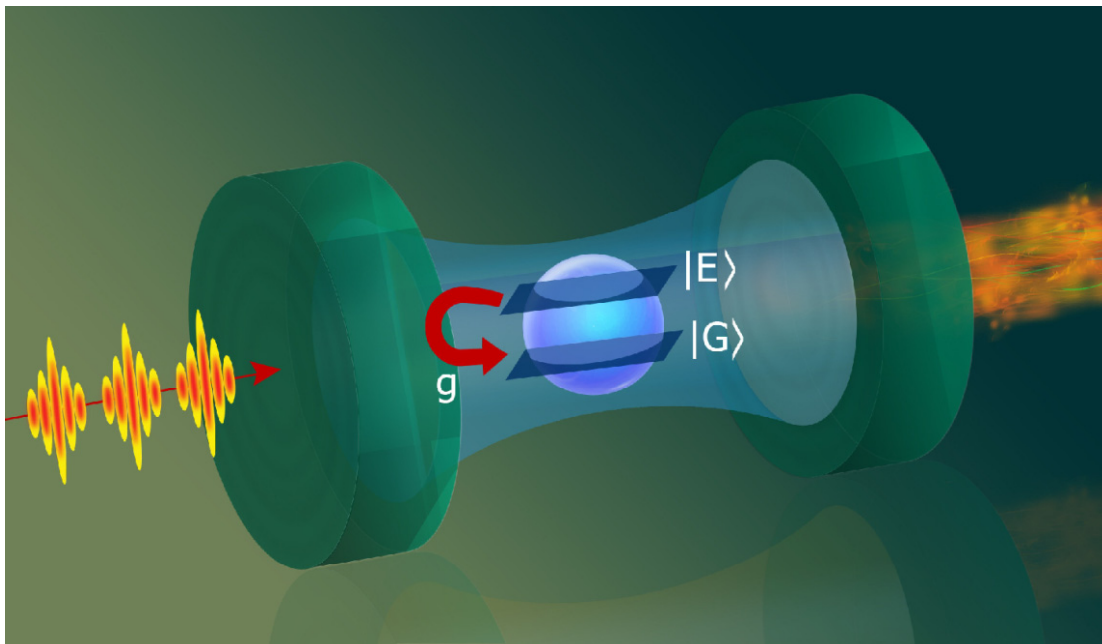


(b)

Chaotic spin-photonic quantum states in an open periodically modulated cavity

Chaos 31, 013112 (2021); <https://doi.org/10.1063/5.0030260>

 I. I. Yusipov^{1,2,a},  S. V. Denisov^{2,3}, and M. V. Ivanchenko^{1,4}



$$H(t) = H_s + H_{\text{ph}}(t) + H_{\text{int}},$$

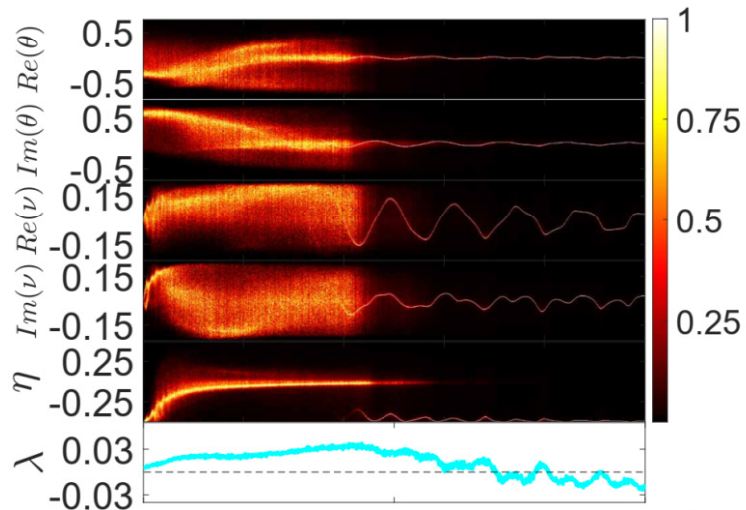
$$H_s = \frac{\delta}{2} J_z,$$

$$H_{\text{ph}}(t) = \frac{1}{2} \chi a^\dagger a^\dagger a a + iF(t) (a^\dagger - a),$$

$$H_{\text{int}} = \frac{g}{2} (a^\dagger J_- + J_+ a).$$

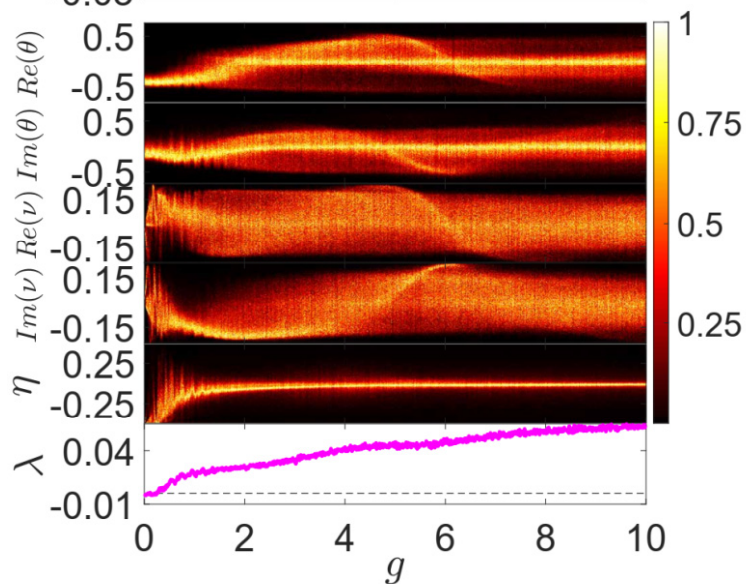
Слабая
модуляция

A=0.5



Сильная
модуляция

A=3.0



Вычисляемые величины

$$\theta(t) = \langle \psi^\dagger(t) | a | \psi(t) \rangle$$

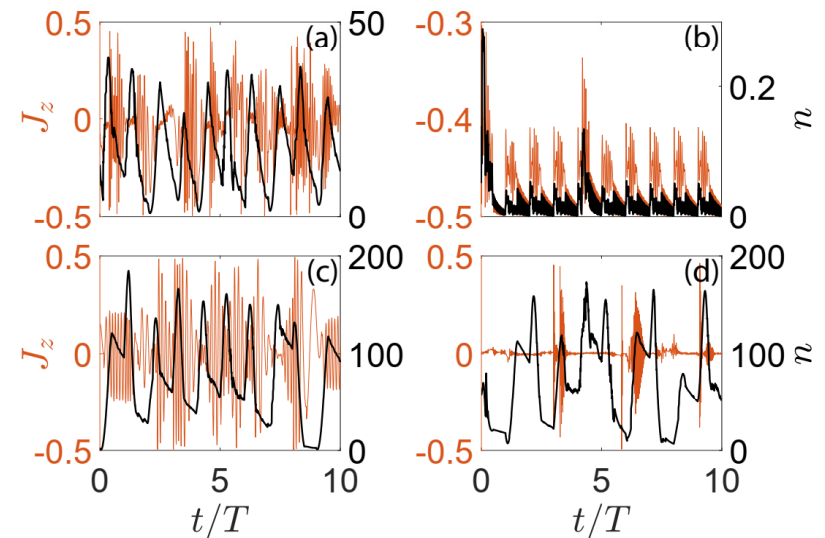
$$v(t) = \langle \psi^\dagger(t) | J_+ | \psi(t) \rangle,$$

$$\eta(t) = \langle \psi^\dagger(t) | J_z | \psi(t) \rangle.$$

g=1.0

g=10.0

A=0.5



A=3.0

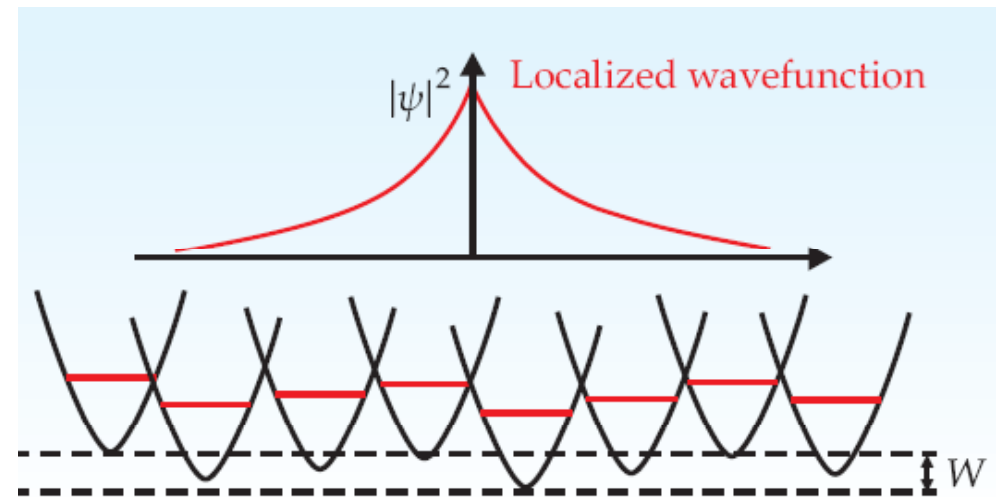
Андерсоновская одночастичная модель:

$$-i\dot{\psi}_l = \varepsilon_l \psi_l - \psi_{l-1} - \psi_{l+1}$$

$$\varepsilon_l \in \Delta: \left[-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}\right]$$

$$|\psi_l|^2 \propto \exp\left(-\frac{|l - l_0|}{\xi_\lambda}\right)$$

$$\xi_\lambda \approx \frac{24(4 - \lambda^2)}{W^2}$$



$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \sum_{k=1}^K \gamma \left(V_k \rho V_k^\dagger - \frac{1}{2} \{V_k^\dagger V_k, \rho\} \right)$$

I. I. Yusipov, M. V. Ivanchenko, Chaos, 2022, Vol. 32, P. 043106.

Многочастичная система с $\frac{N}{2}$ частицами на решетке размером N :

$$H = \underbrace{\sum_{n=1}^N h_n b_n^\dagger b_n}_{\text{Случайные потенциалы}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} b_n^\dagger b_n b_{n+1}^\dagger b_{n+1}}_{\text{Взаимодействие частиц}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} (b_n^\dagger b_{n+1} + b_{n+1}^\dagger b_n)}_{\text{Перемещение частиц}}$$

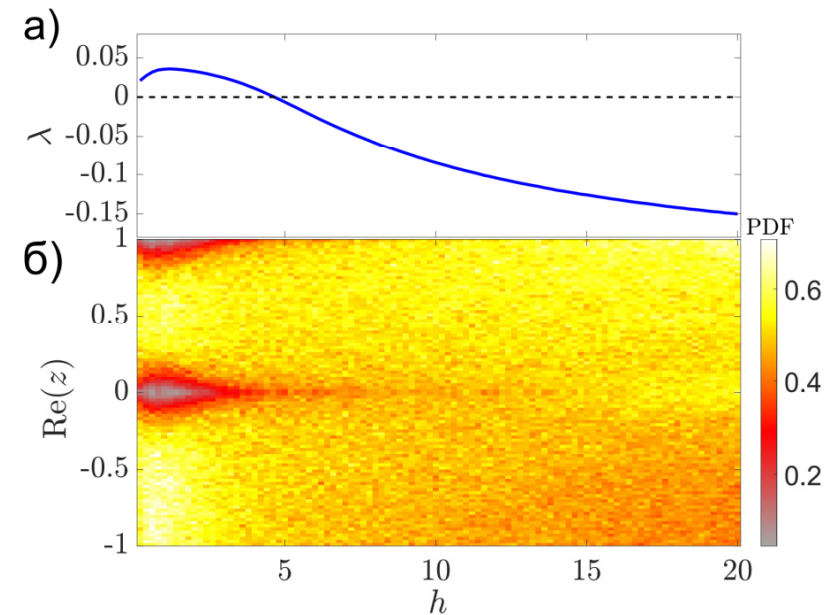
Многочастичная локализация при $h > h_{MBL} \approx 3.6$ [1]

$$V_k = (b_k^\dagger + b_{k+1}^\dagger) (b_k - b_{k+1})$$

Введены в контексте диссипативной инженерии [2,3]
Имеют физическую реализацию [4]

$\{\lambda_k\}_{k=1}^S$ – собственные числа линдбладана
 λ_k^{NN} – ближайшее соседнее с.ч.
 λ_k^{NNN} – ближайшее к ближайшему соседнее с.ч.

$$z_k = \frac{\lambda_k^{NN} - \lambda_k}{\lambda_k^{NNN} - \lambda_k}$$



[1] A. Pal, et. al., Physical Review B, 2010, Vol. 82, no. 17., P. 174411.

[2] D. Diehl, et. al., Nature Physics, 2008, Vol. 4, no. 11., P. 878–883.

[3] C.-E. Bardyn, et. al., New Journal of Physics, 2013, Vol. 15, no. 8, P. 085001.

[4] D. Marcos, et. al., New Journal of Physics, 2012, Vol. 14, no. 5, P. 055005.



Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science



SUBMIT YOUR ARTICLE

HOME

BROWSE

INFO

FOR AUTHORS

COLLECTIONS

 SIGN UP FOR ALERTS

Browse Volumes

Browse Collections

2023 

2022 

2021 

2020 

2019 

Table of Contents

[< PREV](#) [NEXT >](#)

Dissipative Quantum Chaos

Research bridging the theory of classical dissipative chaos with open quantum systems is advancing at an increasing pace. It is not only important for the quantum science community; it will also give new and fresh perspectives to researchers working in the field of classical dissipative chaos. This Focus Issue seeks to give a comprehensive overview of the field along the following three directions: spectral theory of dissipative quantum chaos and its relations to classical dissipative chaos, new quantum generalizations of the concept of Lyapunov exponents, and quantum synchronization.

Guest Editors: Sergey Denisov, Mikhail Ivanchenko, and Sergej Flach



Результаты получены при поддержке РФФ 19-72-20086