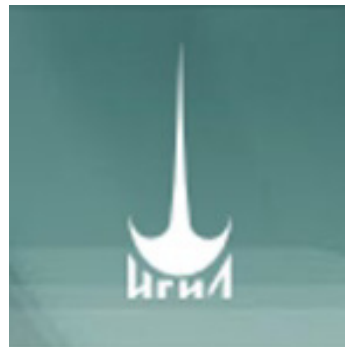


Волновые аттракторы в гео- и астрофизических приложениях

Ерманюк Е.В.

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН

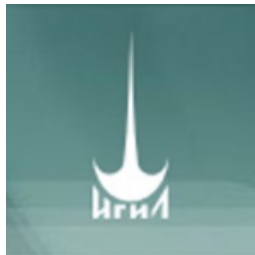


**XX научная школа «Нелинейные волны - 2022»
7- 13 ноября 2022 г., Нижний Новгород**

Волновые аттракторы в гео- и астрофизических приложениях

Е. В. Ерманюк
З. В. Макридин
А. К. Хе
Н. Д. Шмакова

Институт гидродинамики
им. М.А. Лаврентьева СО РАН
Новосибирск



И. Н. Сибгатуллин

Институт океанологии
им. П. П. Ширшова РАН
Москва



L.R.M. Maas

University of Utrecht
The Netherlands



С. В. Субботин
В. Г. Козлов

Пермский
государственный
гуманитарно-
педагогический
университет
Пермь



T. Dauxois
S. Joubaud
P. Odier
H. Scolan
C. Brouzet
G. Pillet
S. Boury

Laboratoire de
Physique, ENS de
Lyon



XX научная школа «Нелинейные волны - 2022»
7- 13 ноября 2022 г., Нижний Новгород

Содержание

Линейная задача об аттракторе внутренних волн в однородно стратифицированной невязкой жидкости в трапециевидной области при заданном законе колебания стенки.

Наблюдаемость аттракторов в экспериментах и численных расчетах в лабораторном масштабе. Проблема экстраполяции на большие масштабы.

Аттракторы внутренних волн в океане: возможные локации, pro et contra.

Аттракторы инерционных волн во вращающейся жидкости. Линейные и нелинейные эффекты, наблюдаемые на лабораторном масштабе. Возможности наблюдения аттрактороподобных структур на небесных телах.

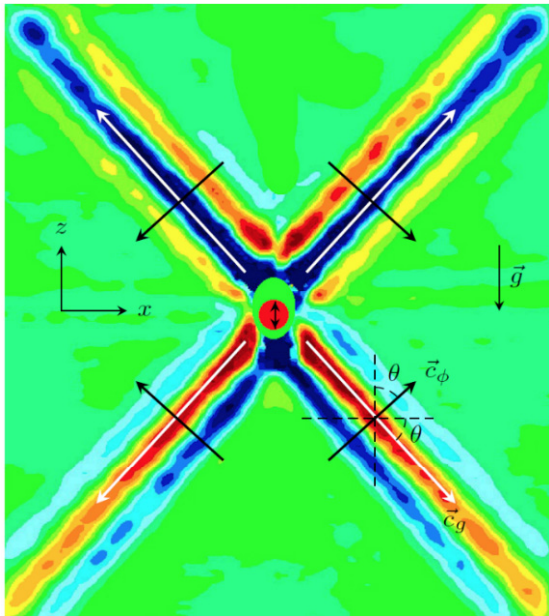
Дисперсионное соотношение

частота плавучести $N(z) = [-(g/\rho)d\rho/dz]^{1/2}$

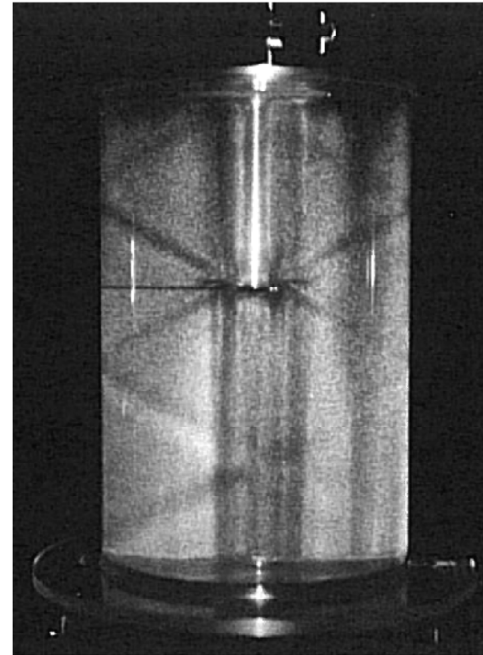
параметр Кориолиса 2Ω

$$\frac{\omega}{N} = \pm \sin \theta$$

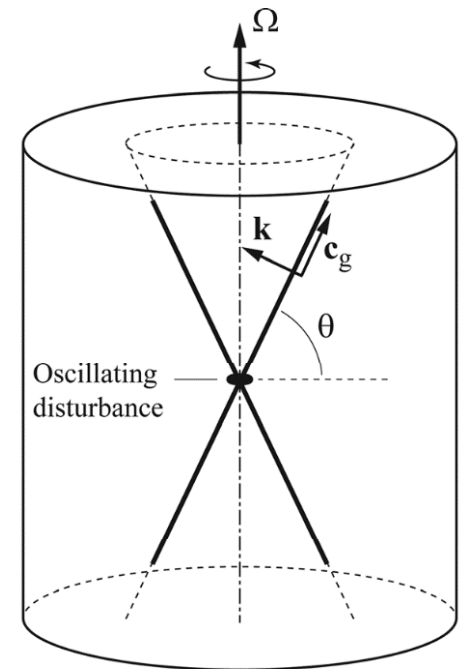
$$\frac{\omega}{2\Omega} = \pm \cos \theta$$



внутренние волны в
стратифицированной жидкости



инерционные волны во
вращающейся жидкости



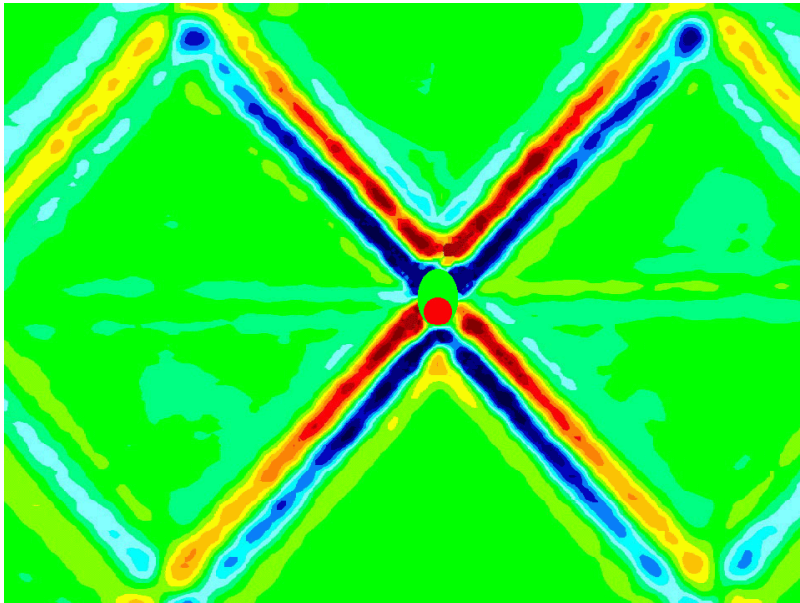
Дисперсионное соотношение

частота плавучести $N(z) = [-(g/\rho)d\rho/dz]^{1/2}$

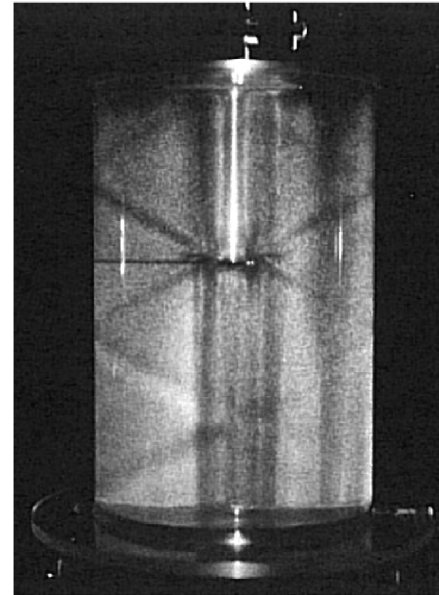
параметр Кориолиса 2Ω

$$\frac{\omega}{N} = \pm \sin \theta$$

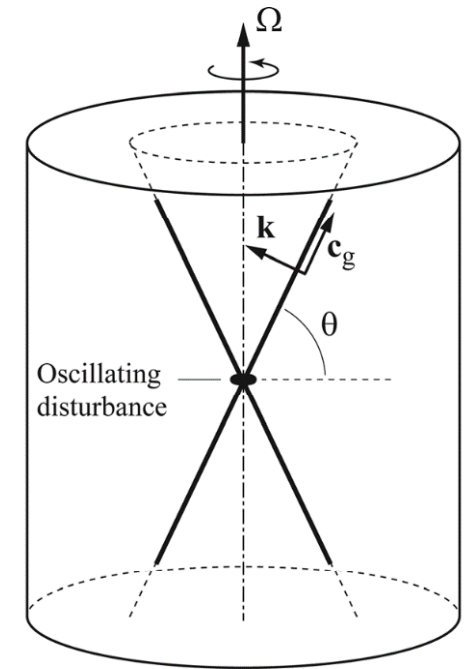
$$\frac{\omega}{2\Omega} = \pm \cos \theta$$



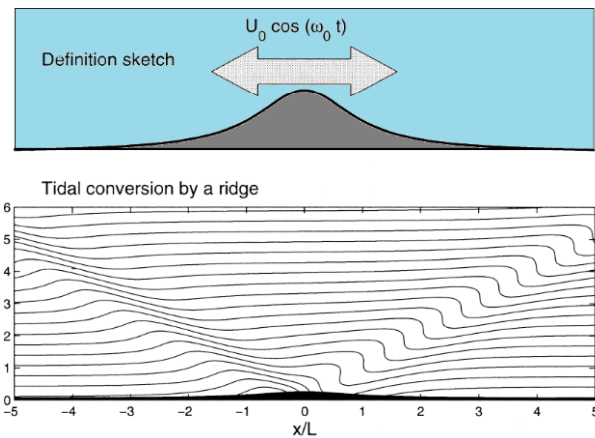
внутренние волны в
стратифицированной жидкости



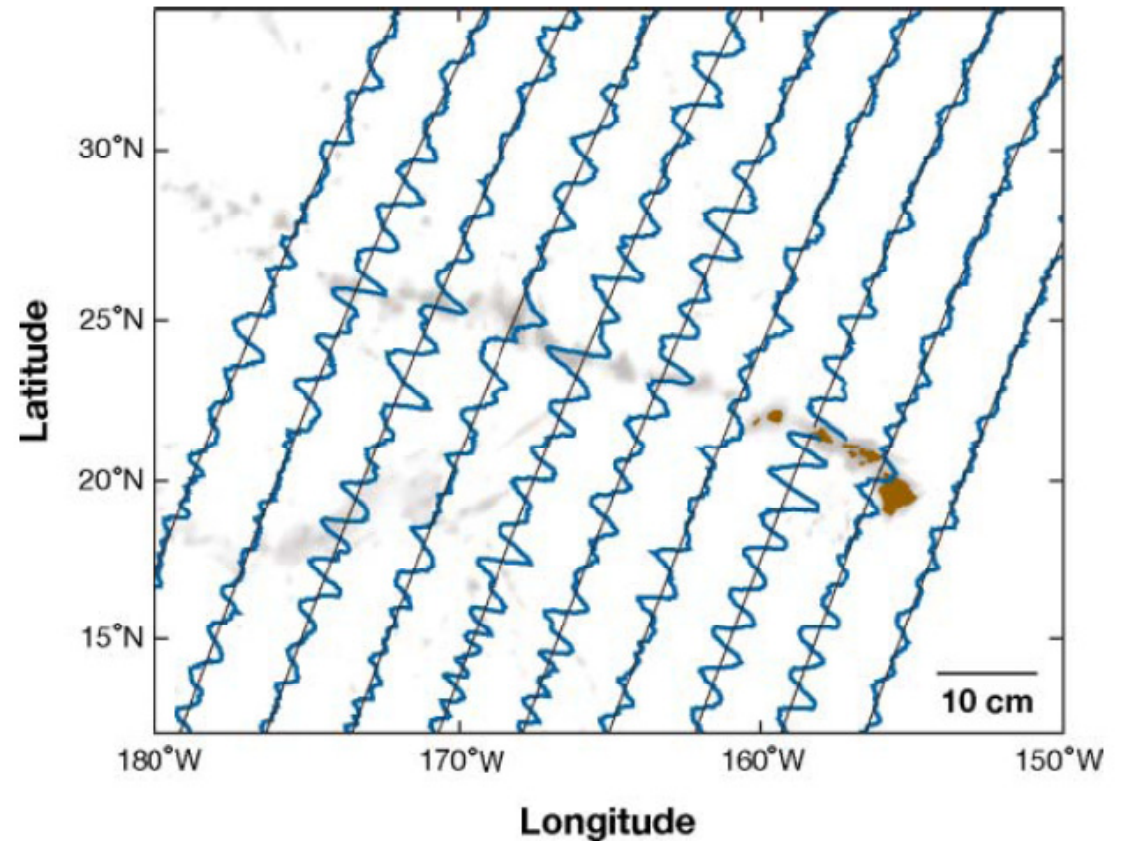
инерционные волны во
вращающейся жидкости



Проявления внутреннего (бароклинного) прилива на свободной поверхности Океана

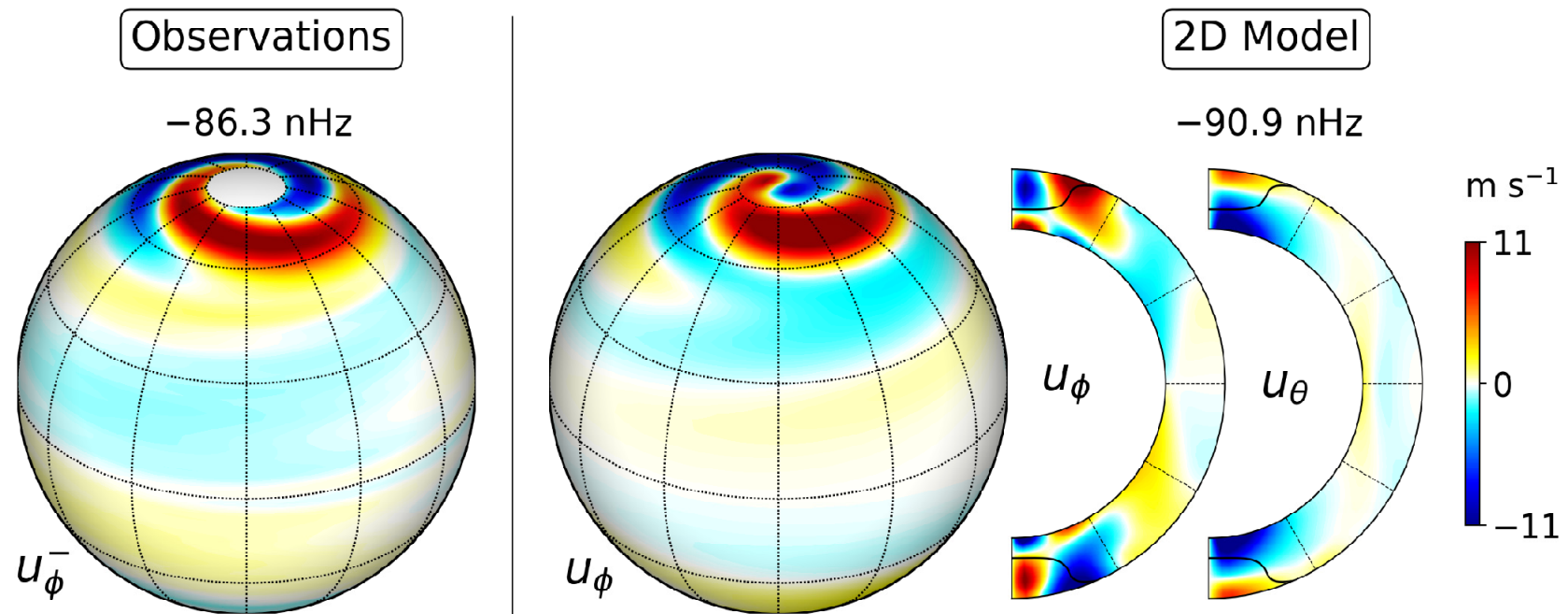


Генерация внутренних волн при взаимодействии баротропного прилива с донной топографией
Bell (JFM 1975)



Возмущения свободной поверхности, вызванные внутренними волнами (Гавайский хребет)
Egbert & Ray (Nature 2000)

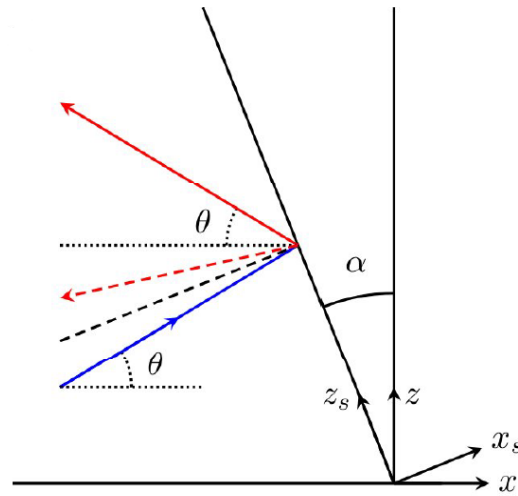
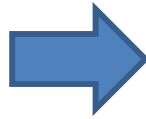
Проявления инерционных волн на поверхности Солнца



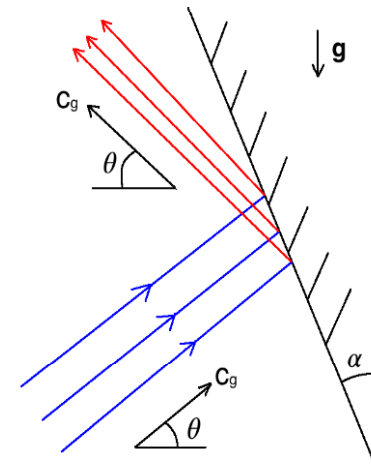
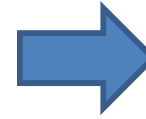
Gizon et al (A&A, 2021) Bekki, Cameron, Gizon (A&A, 2022)

Аттракторы внутренних волн

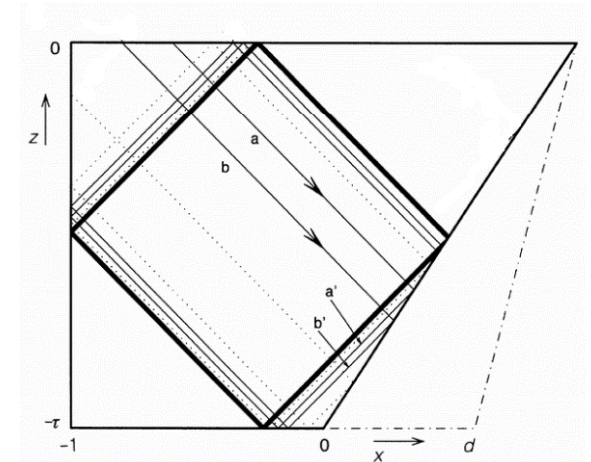
$$\frac{\omega}{N} = \pm \sin \theta$$



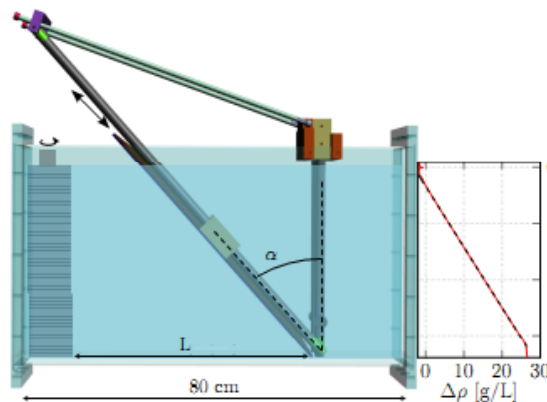
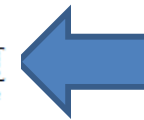
закон отражения



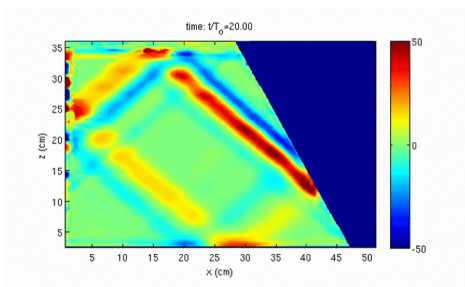
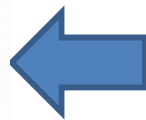
геометрическая
фокусировка



бильярд волновых
лучей

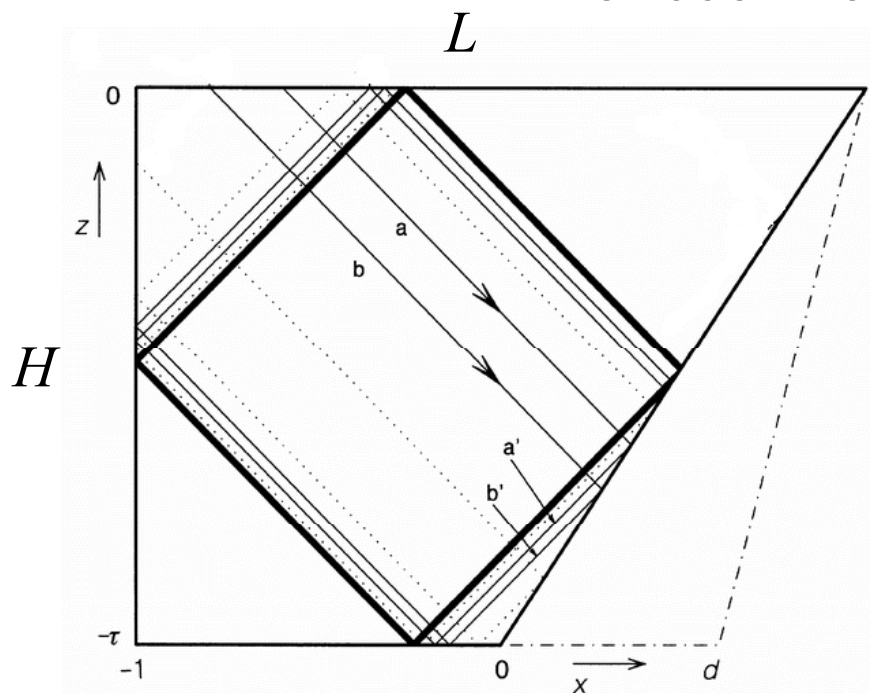


экспериментальная
установка:
возмущение вносится на
«глобальном» масштабе



поле
внутренних
волн

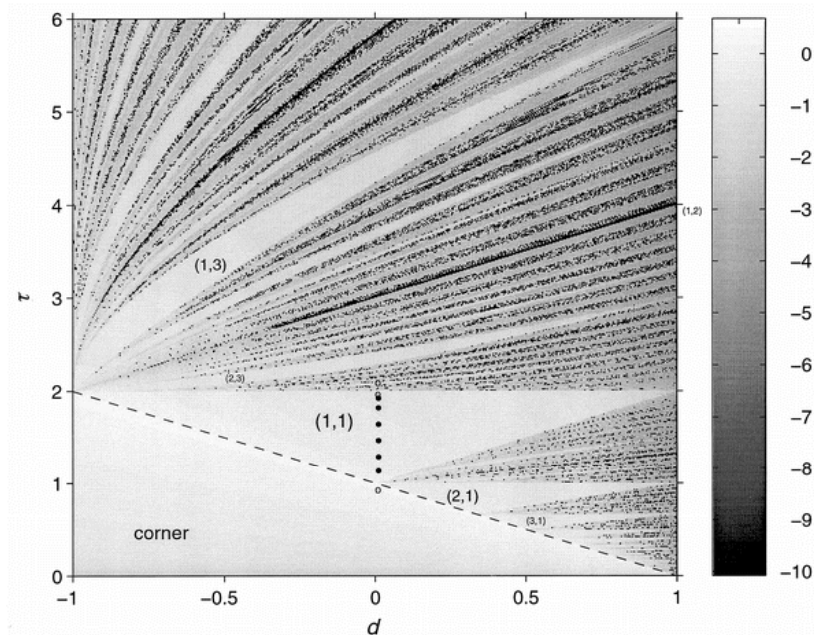
Формирование аттракторов внутренних волн в бассейне с наклонной стенкой



$$\tau = \left(\frac{1 - \Omega^2}{\Omega^2} \right)^{1/2} \frac{H}{L}$$

контрольный
параметр наклона
лучей

d — контрольный параметр
наклона стенки
(от -1 до +1)



(d, τ) — диаграмма режимов

Показатели Ляпунова в данной задаче
имеют отрицательные значения.

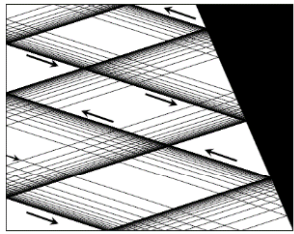
На диаграмме показана величина $\log(-\lambda)$.

Светлые (темные) зоны отвечают
сильной (слабой) лучей к предельному циклу —
аттрактору внутренних волн

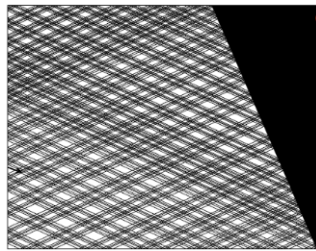
Maas & Lam (JFM 1995)

Maas, Benielli, Sommeria & Lam (Nature 1997)

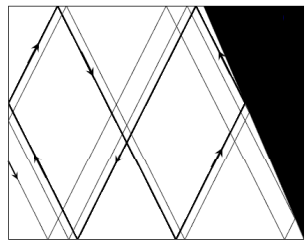
аттракторы внутренних волн в бассейне с наклонной стенкой



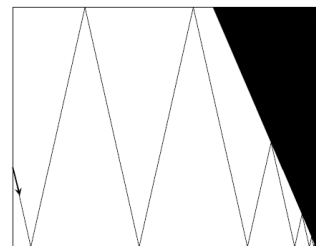
(1,3) аттрактор



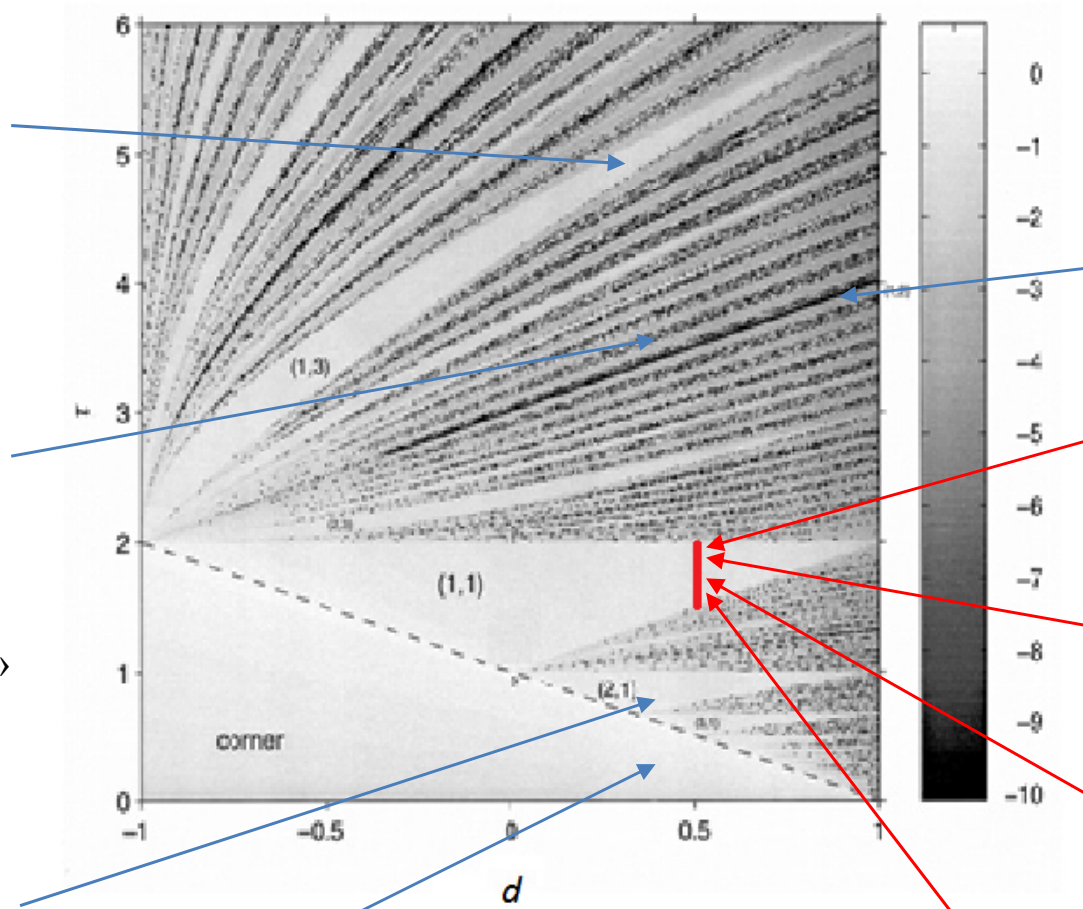
аттрактор с «тонкой»
структурой



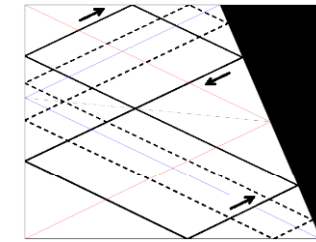
(2,1) аттрактор



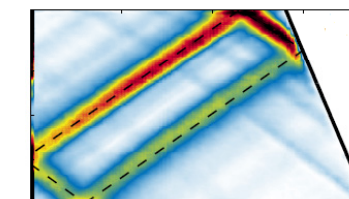
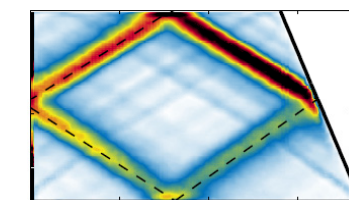
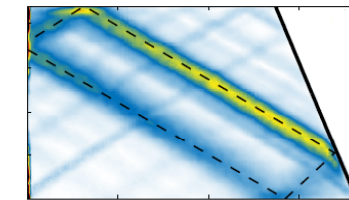
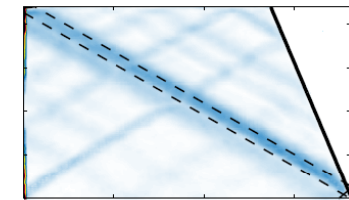
точечный аттрактор



(d, τ) – диаграмма режимов

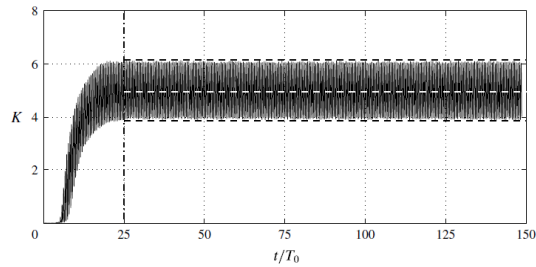


глобальный резонанс
(стоячая волна)



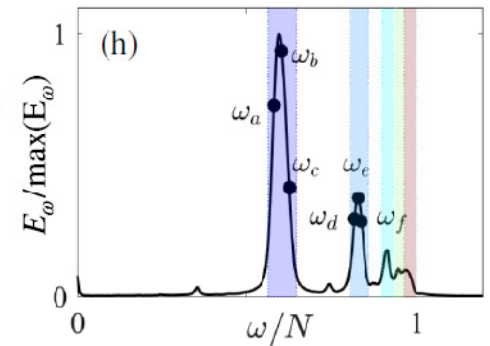
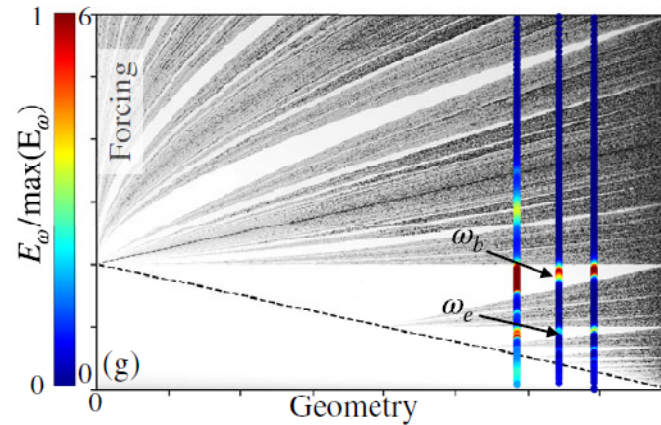
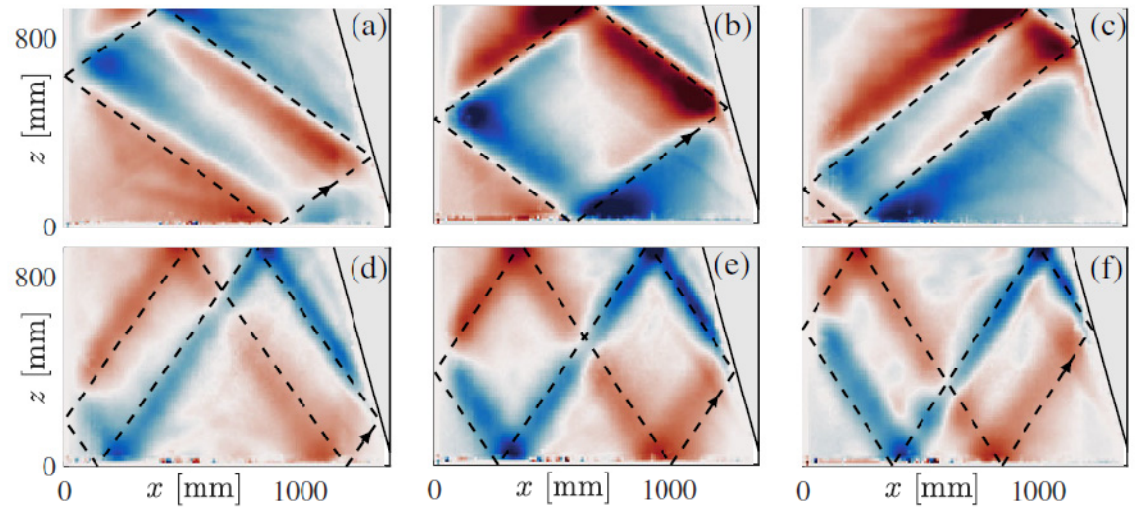
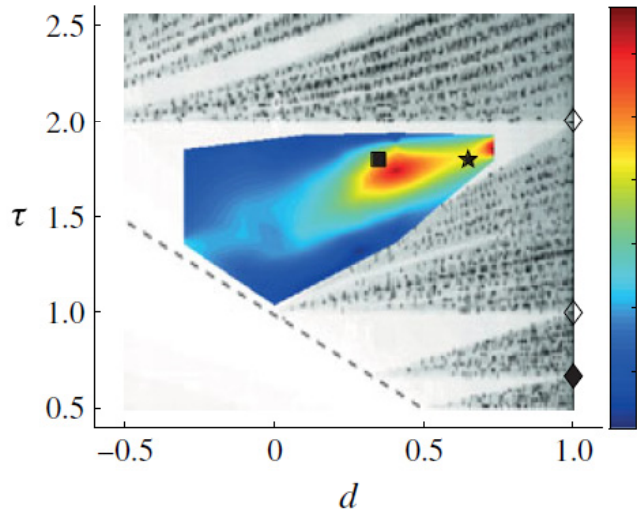
(1,1) аттракторы

2D аттракторы в трапецевидной области



$$K = \frac{\int_S dx dz \frac{1}{2} (v_x^2 + v_z^2)}{\frac{1}{2} (a\omega_0)^2 S}$$

$\langle K \rangle$

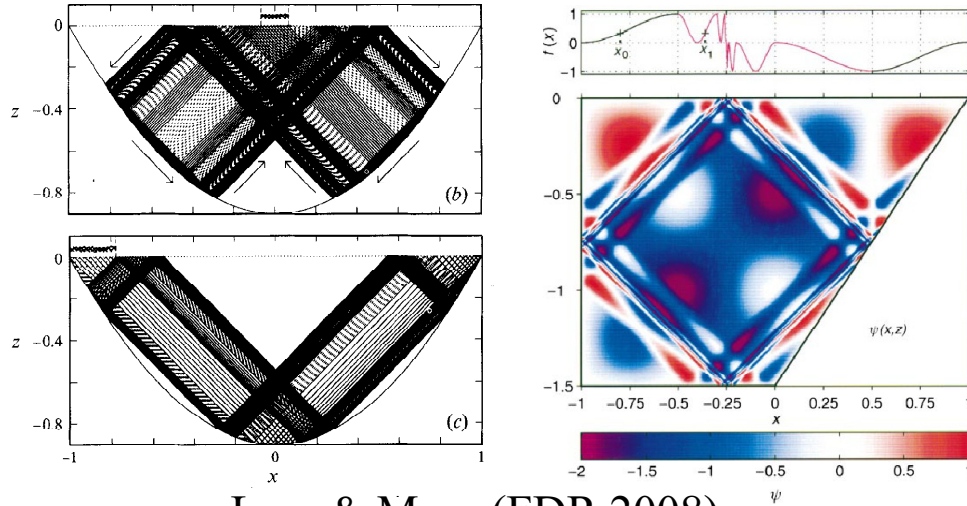


Энергетика аттракторов в зависимости от геометрии и частоты
 Brouzet et al (J. Fluid Mech. 2017), Davies et al (PRL 2020)

Мотивация

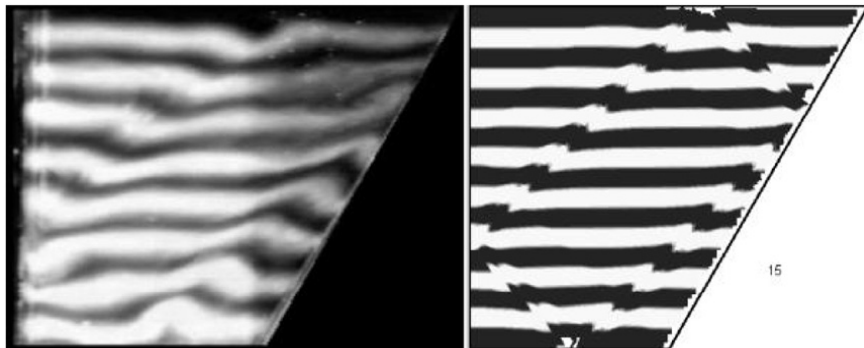
Maas & Lam (JFM 1995)
Maas et al. (Nature 1997)

Построено решение в виде стоячей волны

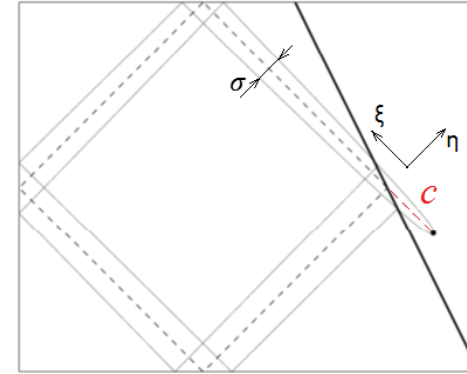


Lam & Maas (FDR 2008)

Построено решение в виде бегущей волны



Ogilvie (JFM 2005),
Hazewinkel, van Breevoort, Dalziel &
Maas (JFM 2008)
Grisouard, Staquet & Pairaud (JFM 2008)



$\sigma(\xi) \propto (\xi + c)^{1/3}$ Thomas & Stevenson (JFM 1972)

L_p периметр аттрактора

$\gamma = \frac{\sigma(L_p)}{\sigma(0)}$ параметр фокусировки

$c = \frac{L_p}{\gamma^3 - 1}$ положение виртуального источника

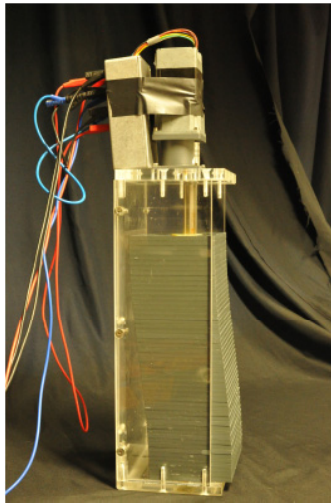
Скейлинг для ширины пучка

$$\frac{\sigma(\xi)}{L_p} = C (1 - \Omega_0^2)^{-1/6} \left(\frac{\nu}{NL_p^2} \right)^{1/3} \left(\frac{\xi + c}{L_p} \right)^{1/3}$$

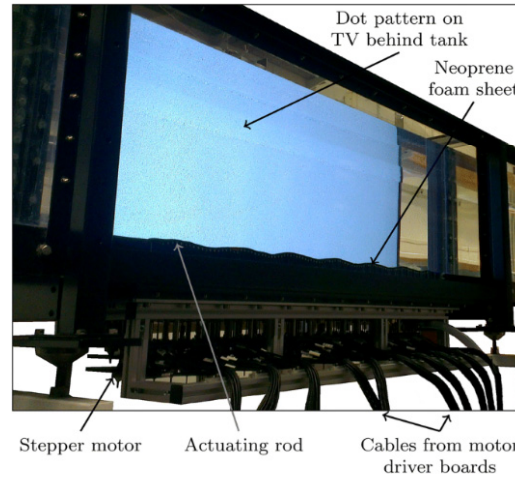
**Как поле внутренних волн связано с задаваемым на границе возмущением?
Какие особенности невязкого решения «наследуются» в случае малой вязкости?**

Мотивация (продолжение)

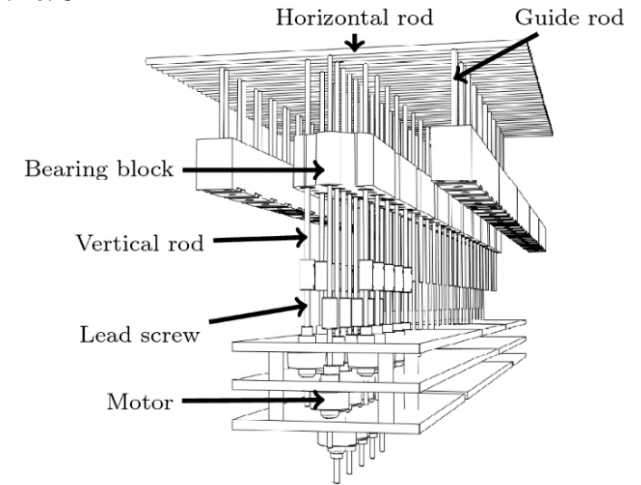
Волнопродукторы, задающие возмущение на границе области



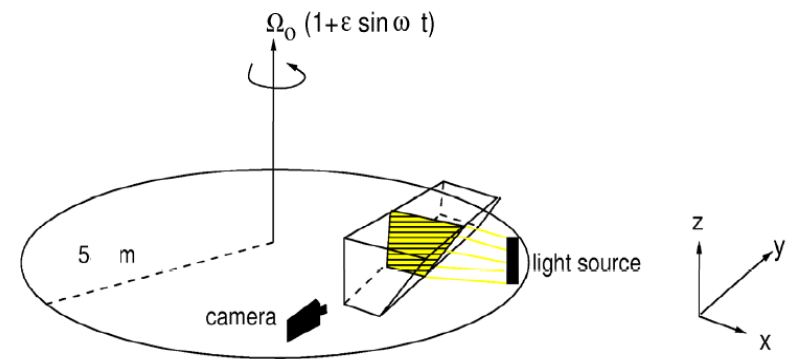
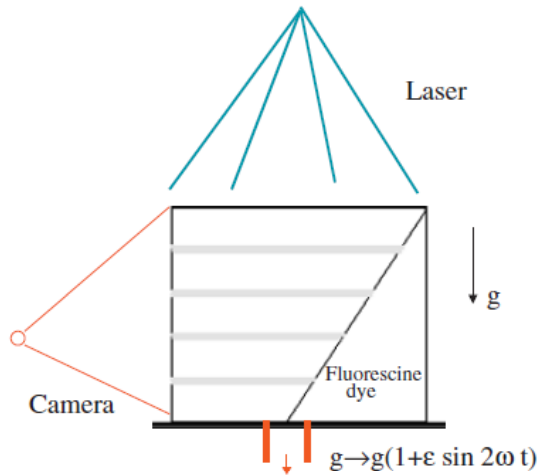
Mercier et al. (JFM 2010)



Dobra et al. (JFM 2020)



Волнопродукторы, задающие возмущение силы инерции (и сейши)



Maas & Lam (JFM 1995) Manders & Maas (JFM 2003)

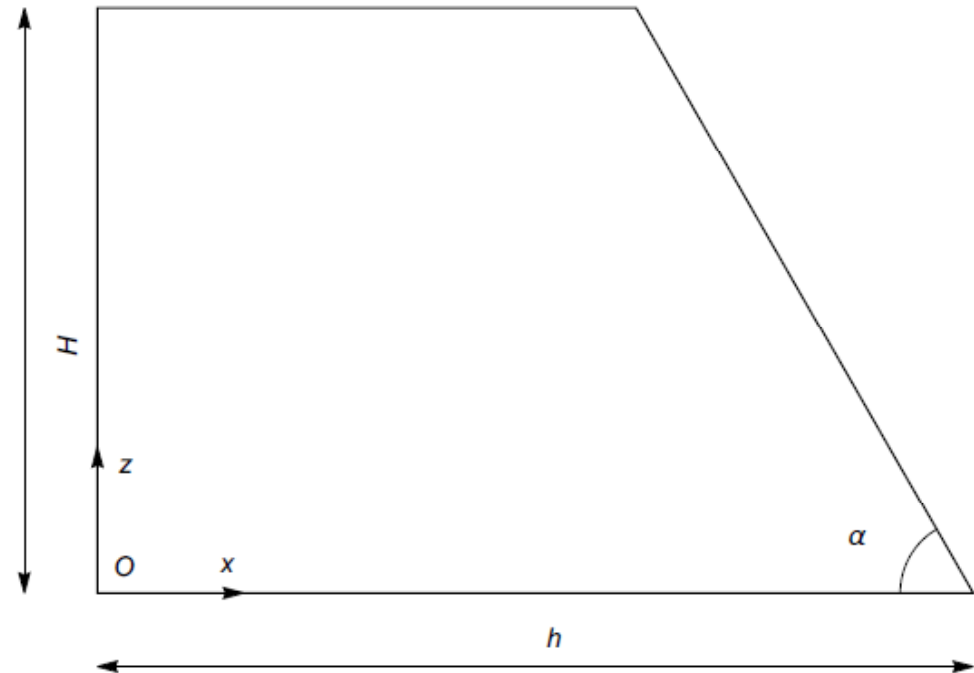
Постановка задачи

Рассматривается невязкая, несжимаемая, слабо стратифицированная жидкость, заполняющая двумерную трапециевидную область Ω . Уравнения движения записываются в виде:

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_*} \nabla p + \mathbf{e}_z b, \quad b_t + \mathbf{u} \cdot \nabla b = -w N^2, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

где $\nabla = (\partial_x, \partial_z)$, $\mathbf{e}_z = (0, 1)$, $\mathbf{u} = (u, w)$ – поле скорости,

- $\rho_* = \text{const}$ – характеристическая плотность жидкости,
- p – возмущение давления относительно гидростатического закона $\rho'_0(z) = -g\rho_0(z)$,
- $b = g(\rho_0 - \rho)/\rho_*$ – возмущение поля плавучести,
- $\rho_0(z)$ – начальное поле плотности
- $N^2(z) = -g\rho'_0(z)/\rho_*$ – частота Брента–Вэйсяля.



Линейное приближение

Уравнение неразрывности позволяет ввести функцию тока $\Psi(x, z, t)$, т.ч. $u = \Psi_z$, $w = -\Psi_x$. Тогда исходная линеаризованная система сводится к уравнению типа Соболева

$$\nabla^2 \Psi_{tt} + \Psi_{xx} = 0.$$

Здесь предполагается, что $N = 1$. Подставляя $\Psi(x, z, t) = \psi(x, z)e^{-i\omega t}$ получаем волновое уравнение на комплекснозначную амплитуду

$$\psi_{xx} - \lambda^2 \psi_{zz} = 0, \quad \lambda^2 = \frac{\omega^2}{1 - \omega^2}.$$

Данное уравнение имеет решение типа плоской волны с волновым вектором $\mathbf{k} = (m, l)$ и волновым числом $|\mathbf{k}| = (m^2 + l^2)^{1/2}$ если и только если выполнено дисперсионное соотношение

$$\omega = \pm m/|\mathbf{k}| = \pm \sin \theta.$$

Здесь θ – угол между волновым вектором \mathbf{k} и вертикалью, следовательно $\lambda^2 = \tan^2 \theta$. Гранчные условия записываются в виде

$$\psi_z \Big|_{x=0} = U_H(z) = U(z)\chi_H(z), \quad \psi_x \Big|_{z=0} = \psi_x \Big|_{z=H} = 0, \quad \left\{ \psi_z \tan \alpha - \psi_x \right\} \Big|_{z=\tan \alpha(h-x)} = 0.$$

Построение решения

Построение решения базируется на методе фиктивных источников аналогично тому, как строится решение, например, в задаче об обтекании цилиндра в полосе:

в) Система бесконечного множества дублетов с одинаковыми моментами M , одинаково направленными параллельно вектору $-\mathbf{v}_\infty$ и помещенными на прямой, перпендикулярной к \mathbf{v}_∞ , в расстоянии a друг от друга, создает течение с комплексным потенциалом

$$w_1 = \frac{M}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - kai}$$

если взять указанное на рис. 105 расположение осей.

Вспоминая известное разложение на простейшие дроби

$$\operatorname{ctg} z = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - k\pi},$$

мы видим, что

$$w_1 = \frac{M}{2ai} \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{ai} = \frac{M}{2a} \operatorname{cth} \frac{\pi z}{a}.$$

Из симметрии расположения дублетов следует, что все прямые

$$y = (2k + 1) \frac{a}{2} \quad (k = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots)$$

служат линиями тока и останутся таковыми же при наложении однородного поступательного потока с потенциалом $w_0 = Uz$, а поэтому

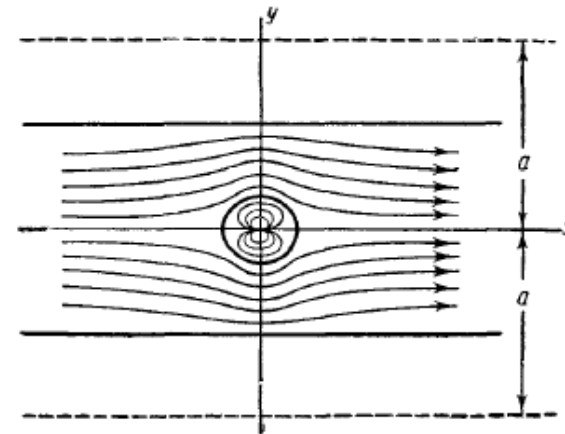


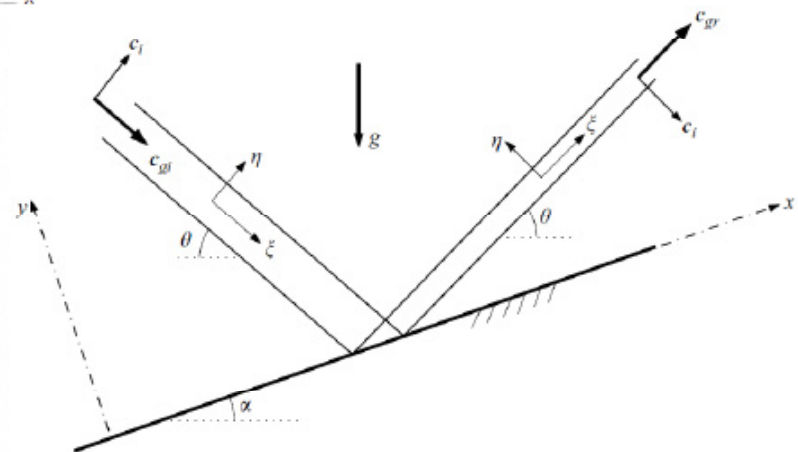
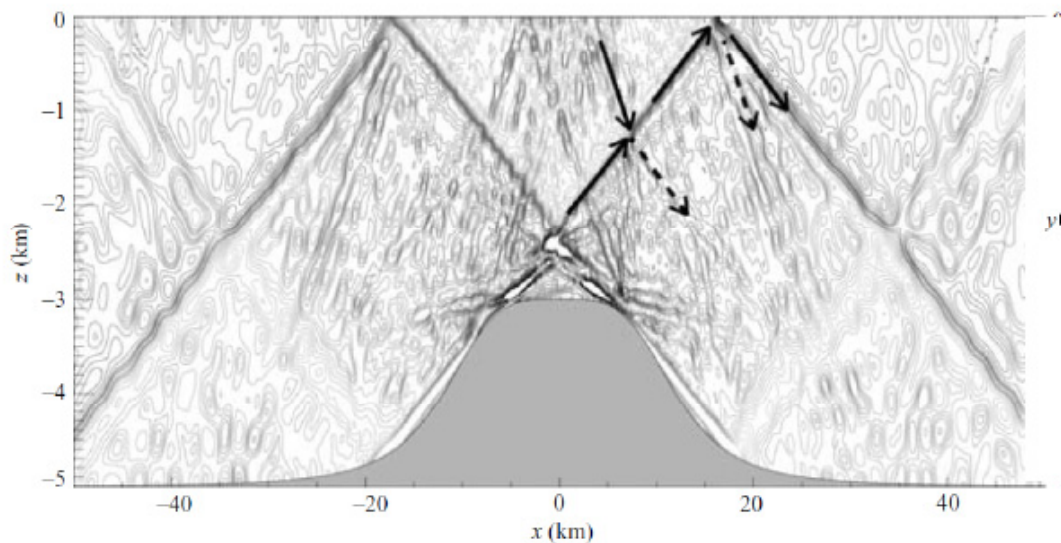
Рис. 105.

картина течения не изменится, если заменить некоторые из упомянутых линий неподвижными стенками.

Лучи внутренних волн – это решения (линеаризованной системы) вида (Т.Р. Akylas, et al. 2003, 2005, JFM):

$$\Psi(x, z, t) = e^{-i\omega t} Q(x, z), \quad Q = Q^{inc} + Q^{ref}$$

$$Q^{inc} = \int_0^{+\infty} A(l) e^{il(x+z \cot(\theta+\alpha))} dl, \quad Q^{ref} = - \int_0^{+\infty} A(l) e^{il(x-z \cot(\theta-\alpha))} dl,$$



Представление решения

Возвращаясь к волновому уравнению на комплекснозначную амплитуду функции тока

$$\psi_{xx} - \lambda^2 \psi_{zz} = 0, \quad \lambda^2 = \frac{\omega^2}{1 - \omega^2} = \tan^2 \theta,$$

Будем искать решение в виде $\psi(x, z) = \varphi(x, z) + i\eta(x, z)$, где

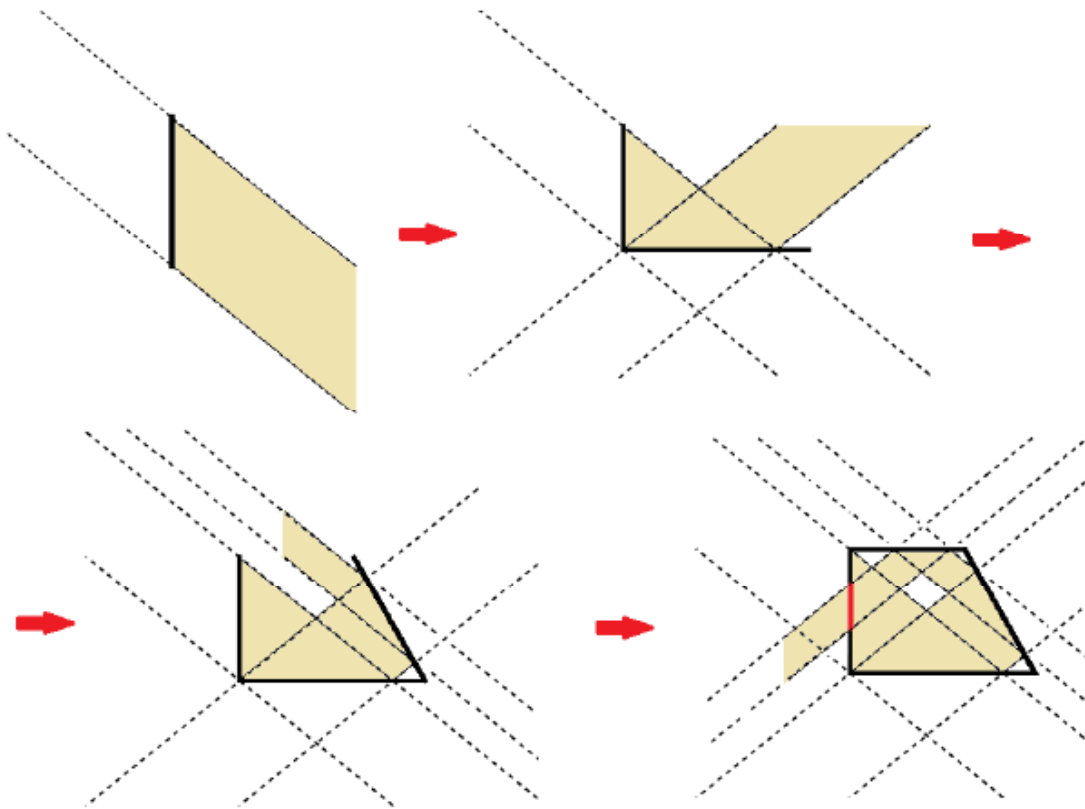
$$\begin{aligned} \varphi(x, z) = \Re \int_0^{+\infty} e^{im_1(l)x} \left\{ \overset{\curvearrowright}{\dot{Q}}(l) e^{ilz} + \overset{\curvearrowleft}{\dot{Q}}(-l) e^{-ilz} \right\} dl \\ + \Re \int_0^{+\infty} e^{im_2(l)x} \left\{ \overset{\curvearrowleft}{\dot{Q}}(l) e^{ilz} + \overset{\curvearrowright}{\dot{Q}}(-l) e^{-ilz} \right\} dl, \end{aligned}$$

где $m_{1,2}(l)$ являются корнями дисперсионного соотношения, а $\overset{\bullet}{\dot{Q}}(l)$ – соответствующий Фурье спектр волнового луча с выделенным направлением вектора групповой скорости: $\bullet \in \{\nearrow, \searrow, \nwarrow, \swarrow\}$.

Представление решения. Случай 1.

$$\varphi_{k,l}^-(x, z) = \int_0^{+\infty} e^{ilx \tan \theta} \left\{ \vec{Q}_{k,l}(l) e^{ilz} + \hat{Q}_{k,l}(-l) e^{-ilz} \right\} dl +$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ilx \tan \theta} \left\{ \check{Q}_{k,l}(l) e^{ilz} + \overleftarrow{Q}_{k,l}(-l) e^{-ilz} \right\} dl.$$



$$\left(\varphi_{1,l}^- \right)_z \Big|_{x=0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \hat{U}_H(l) e^{ilz} dl$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \hat{U}_H(-l) e^{-ilz} dl$$

Решение для случая 1.

Решение представляется в виде бесконечного ряда:

$$\varphi_1^- = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{k,1}^-, \quad \varphi_{k,1}^-(x, z) = \int_0^{+\infty} e^{ilx \tan \theta} \left\{ \overset{\curvearrowright}{Q}_{k,1}(l) e^{ilz} + \overset{\curvearrowleft}{Q}_{k,1}(-l) e^{-ilz} \right\} dl \\ + \int_0^{+\infty} e^{-ilx \tan \theta} \left\{ \overset{\curvearrowleft}{Q}_{k,1}(l) e^{ilz} + \overset{\curvearrowright}{Q}_{k,1}(-l) e^{-ilz} \right\} dl.$$

Функция φ_1^- должна удовлетворять граничным условиям:

$$\left(\varphi_1^- \right)_z \Big|_{x=0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \hat{U}_H(l) e^{ilz} dl, \quad \left(\varphi_1^- \right)_x \Big|_{z=0} = 0, \\ \left(\varphi_1^- \right)_x \Big|_{z=H} = 0, \quad \left(\varphi_1^- \right)_z \tan \alpha - \left(\varphi_1^- \right)_x \Big|_{z=\tan \alpha (h-x)} = 0.$$

Решение для случая 1.

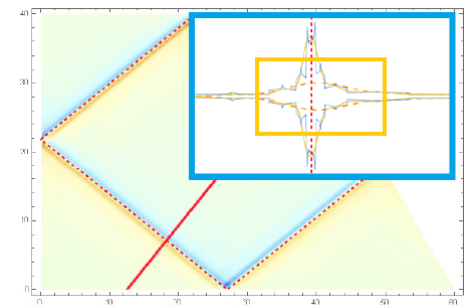
В итоге получаем:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1^- \langle \vec{Q}_{1,l}(l) \rangle = & \\
 & \int_0^{+\infty} \vec{Q}_{1,l}(l) e^{ilx \tan \theta} (e^{ilz} - e^{-ilz}) dl - \int_0^{+\infty} \gamma \vartheta_0(l) \vec{Q}_{1,l}(\gamma l) e^{-ilx \tan \theta} (e^{ilz} - e^{-ilz} e^{2ilH}) dl \\
 & - \sum_{k=2}^{\infty} \int_0^{+\infty} \gamma^k \vartheta_{k-1}(l) \vec{Q}_{1,l}(\gamma^k l) e^{-ilx \tan \theta} (e^{ilz} - e^{-ilz} e^{2ilH}) dl \\
 & + \sum_{k=2}^{\infty} \int_0^{+\infty} \gamma^{k-1} \vartheta_{k-2}(l) \vec{Q}_{1,l}(\gamma^{k-1} l) e^{ilx \tan \theta} (e^{ilz} - e^{-ilz}) dl.
 \end{aligned}$$

Здесь $\vec{Q}_{1,l}(l)$ выражается через Фурье спектр $\hat{U}_H(l)$ и

$$\vartheta_k(l) = \exp \left(il(h \tan \alpha (1 - \gamma) - 2H) \sum_{j=0}^k \gamma^j \right), \quad \gamma = (\tan \alpha - \tan \theta) / (\tan \alpha + \tan \theta)$$

Численное исследование решения для функции $\varphi(x, z)$



Общее решение представляется в виде

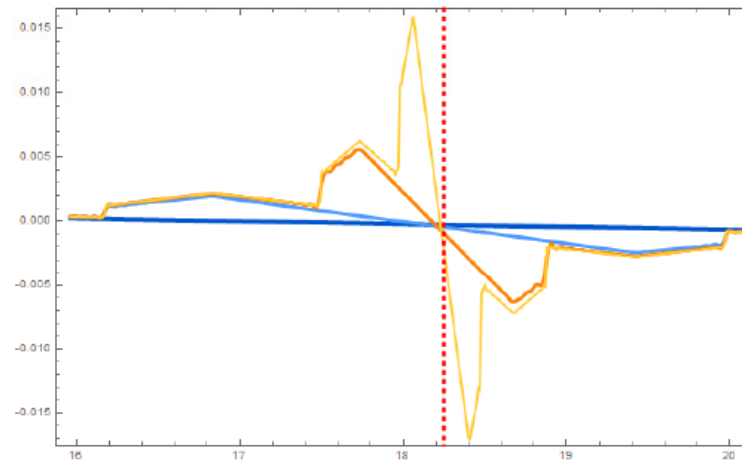
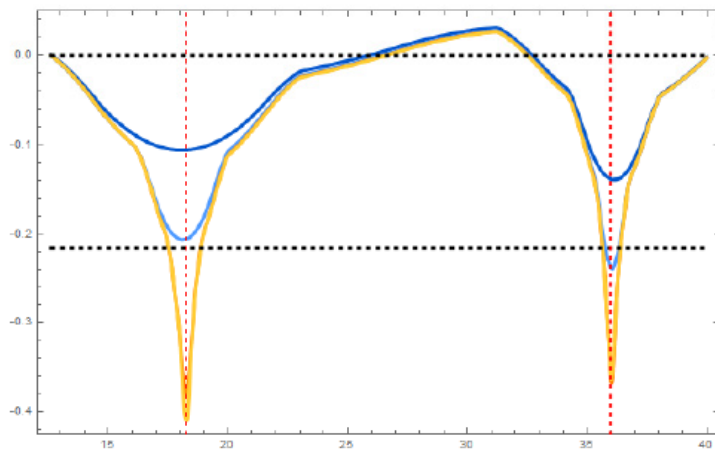
$$\varphi(x, z) = \Phi_{\Omega} + \Re \left\{ \varphi_{\text{I}}^{-} + \varphi_{\text{II}}^{+} + \varphi_{\text{III}}^{+} + \varphi_{\text{IV}}^{+} + \varphi_{\text{VI}}^{+} + \varphi_{\text{VI}}^{+} \right\}.$$

Для численного эксперимента выбираются параметры области: $H = 40$, $h = 60$, $\alpha = \pi/3$ и $\theta = \arcsin \pi/5$. Профиль волнопродуктора $U(z) = 0.0005(z - 20)$.

Кроме того мы рассматриваем конечное число циклов волновых лучей:

$$\varphi_K(x, z) = \Phi_K + \Re \left\{ \varphi_{\text{I},K}^{-} + \varphi_{\text{II},K}^{+} + \varphi_{\text{III},K}^{+} + \varphi_{\text{IV},K}^{+} + \varphi_{\text{VI},K}^{+} + \varphi_{\text{VI},K}^{+} \right\}.$$

$$\Phi_2 = 0.0129, \quad \Phi_3 = 0.0156, \quad \Phi_5 = 0.0171, \quad \Phi_8 = 0.0173.$$

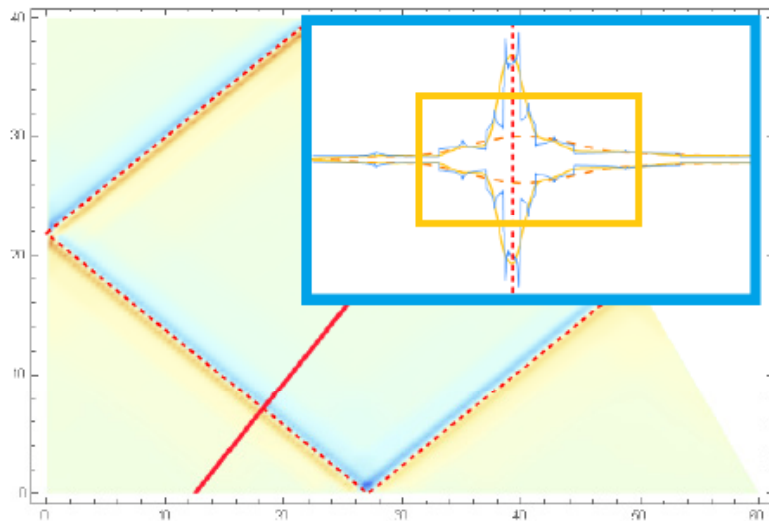


Сопоставление с результатами численного моделирования

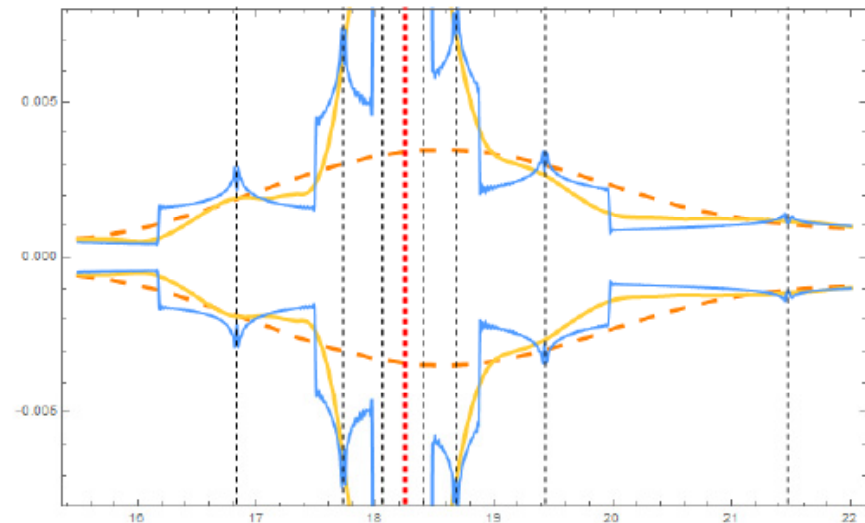
$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \rho^s \mathbf{g},$$

$$\rho_t^s + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho^s = \lambda_s \Delta \rho^s, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \rho = \rho_0 + \rho^s(x, z, t)$$

$$u(0, z, t) = U(z) \sin \omega t, \quad \nu = 0.01; 0.0001$$



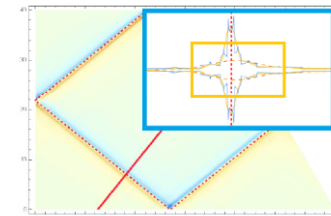
Красная линия – сечение пучка ВВ, на котором выполнено сравнение решения и результатов численного счета.



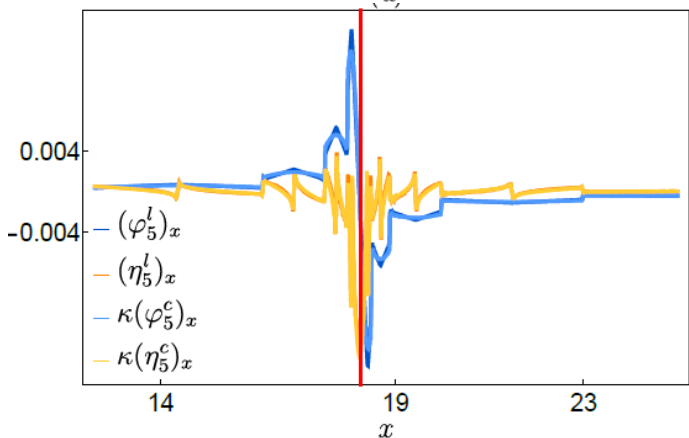
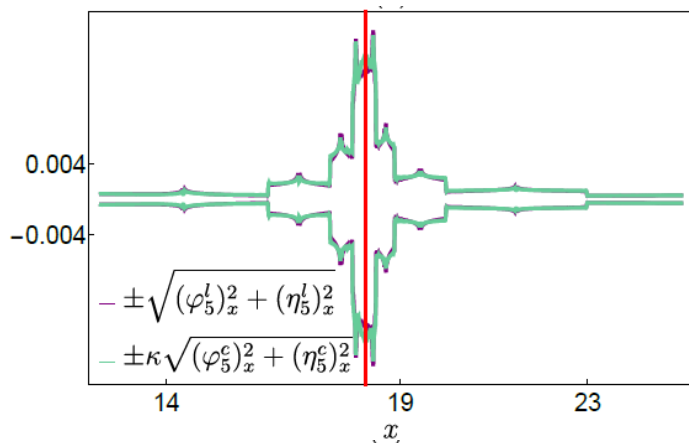
Штриховая красная линия соответствует положению лучевого скелета аттрактора. Голубая линия – решение для идеальной жидкости, желтая и оранжевая линии – результаты расчетов для вязкостей 0.01 (вода, СГС) и 0.0001, соответственно.

Сопоставление результатов для двух различных профилей волнопродукторов

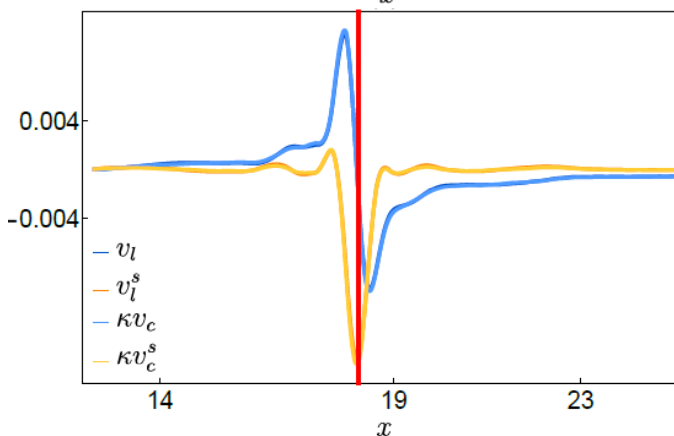
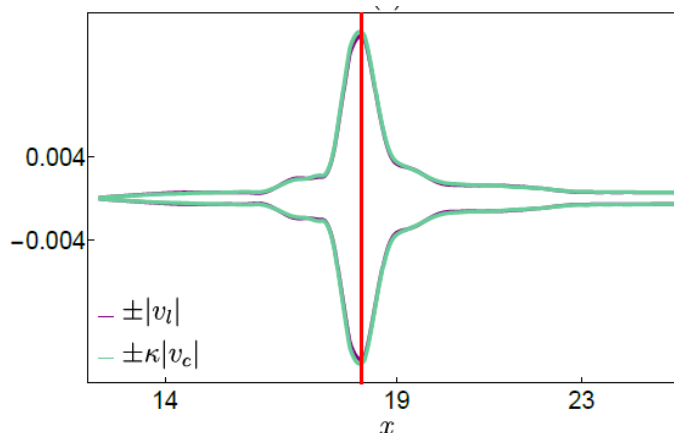
Верхний ряд – огибающие профилей скорости поперек волнового пучка, желтый цвет – линейный волнопродуктор (пластина, совершающая крутильные колебания вокруг горизонтальной оси), синий цвет – волнопродуктор с профилем в виде полуволны косинуса.



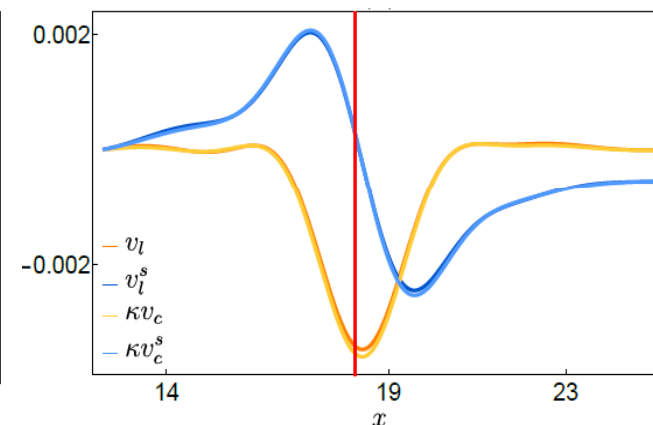
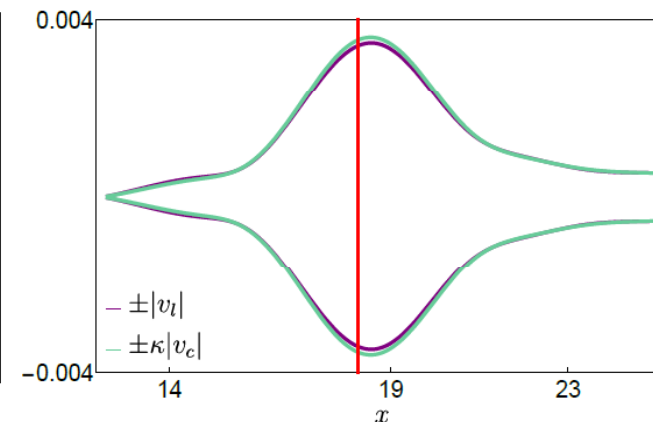
невязкое решение
при $k=5$



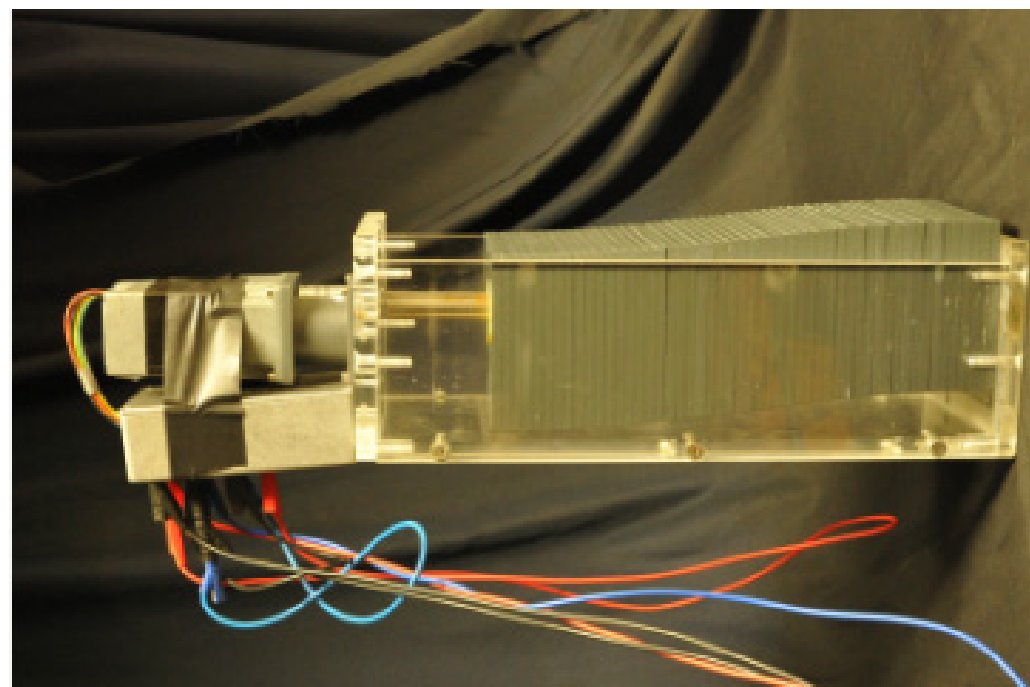
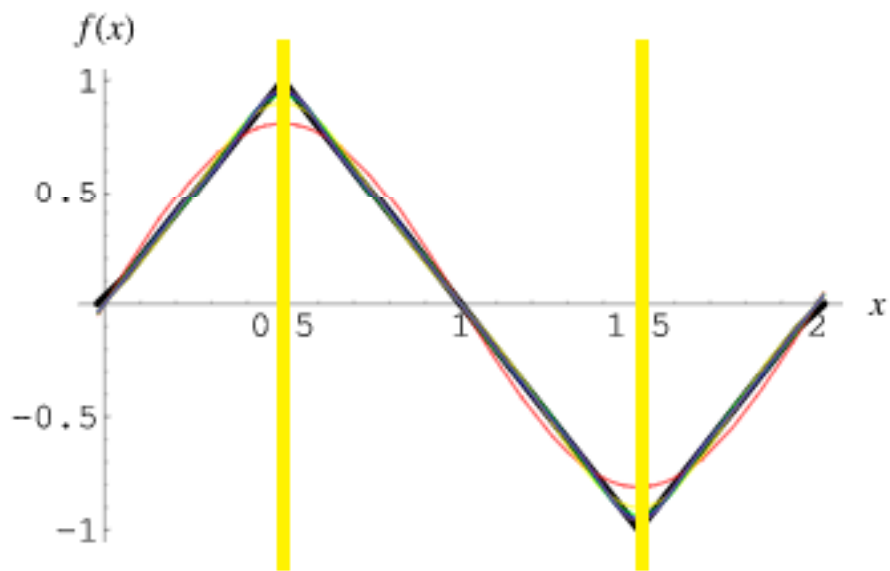
прямой численный счет
при $St = 1.6 \cdot 10^7$



прямой численный счет
при $St = 1.6 \cdot 10^5$



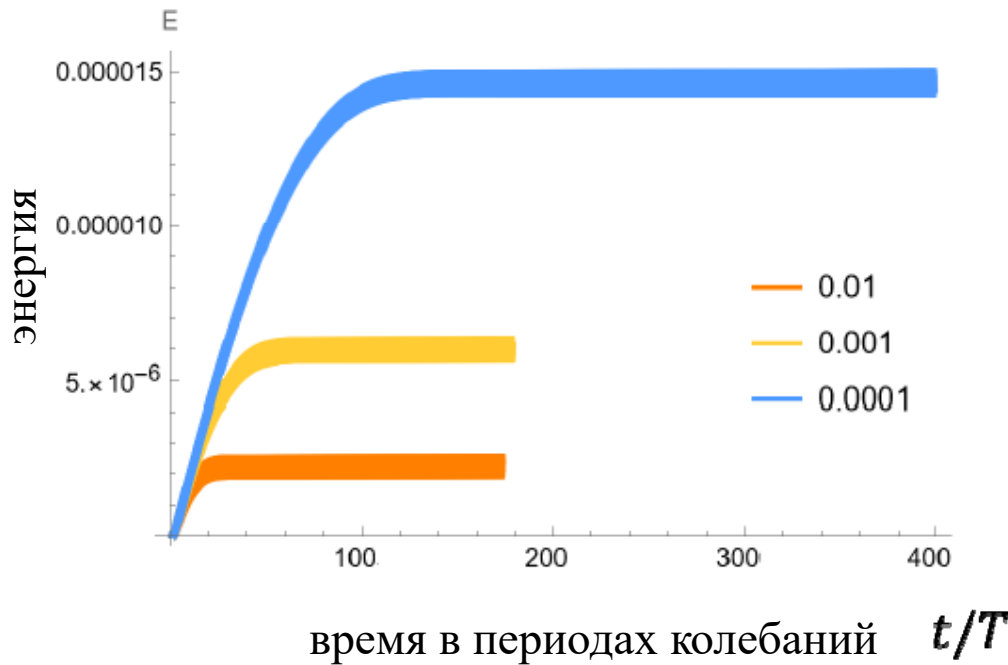
Нижний ряд – мгновенные профили скорости поперек волнового пучка для двух фаз движения (желтый и синий цвета), линейный волнопродуктор (пластина, совершающая крутильные колебания вокруг горизонтальной оси) сплошная линия, волнопродуктор с профилем в виде полуволны косинуса – пунктирная линия). По вертикальной оси для случая волнопродуктора с профилем в виде полуволны косинуса результаты на всех графиках умножены на величину $8/\pi^2$



The Fourier series for the [triangle wave](#) is

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Время установления стационарного режима в системе



$$St = \frac{H^2 N}{\nu} \quad \text{число Стокса}$$

значения кинематической вязкости 0.01, 0.001 и 0.0001 (в системе СГС) соответствуют значениям числа Стокса

$$1.6 \cdot 10^5 \quad 1.6 \cdot 10^6 \quad 1.6 \cdot 10^7$$

$$\hat{E} = \frac{E}{E_{mean}(t \rightarrow \infty)} \quad \text{безразмерная энергия}$$

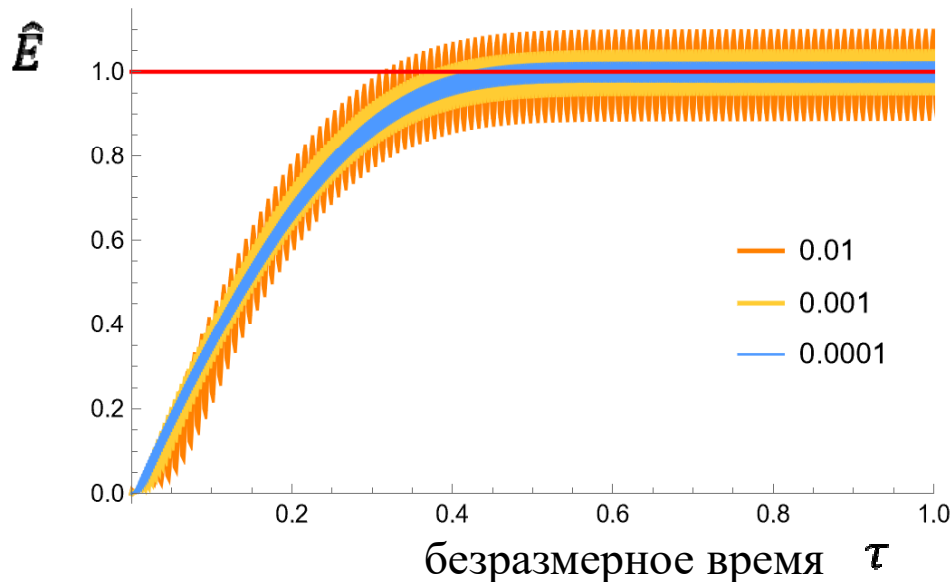
$$\tau = \frac{t}{T} St^{-1/3} \quad \text{безразмерное время}$$

Время установления стационарного режима в системе $\tau_* = 0.5$

В случае «эксперимента» проведенного при $H = 4000\text{м}$ $N = 10^{-3}\text{рад/сек}$

время выхода на стационарный режим

$$T_*/T_0 = 1260$$



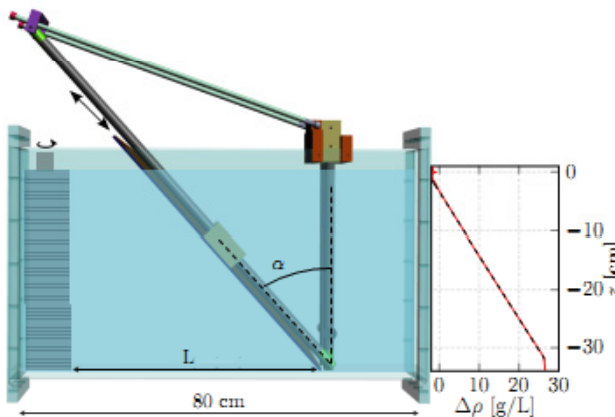
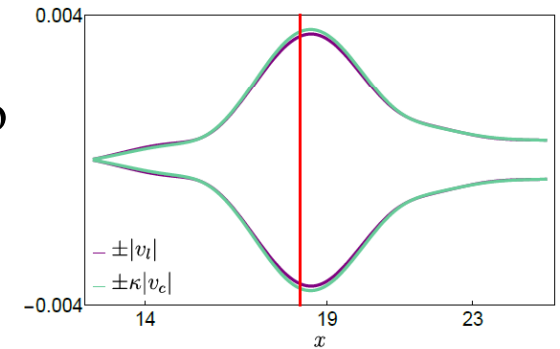
Выводы 1:

Наблюдаемые эффекты на лабораторном масштабе:

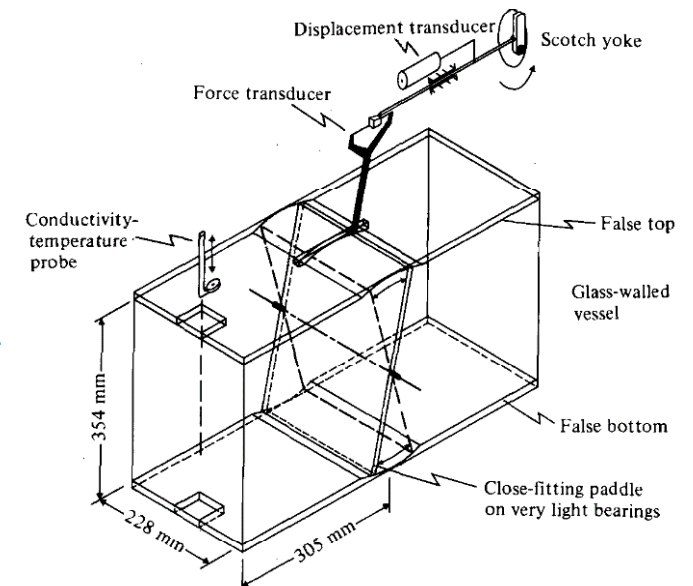
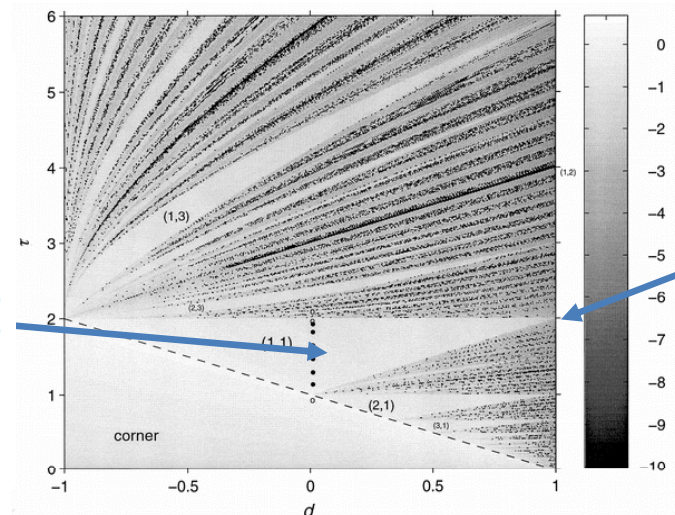
1) смещение максимума амплитуды огибающей по отношению к положению лучевого скелета аттрактора, асимметрия формы огибающей «наследуется» из асимметрии невязкого решения

2) форма огибающей волновых движений в пучке не является чувствительной к форме колебаний волнопродуктора, а максимальная амплитуда волновых движений пропорциональна амплитуде первого члена разложения формы колебаний волнопродуктора в ряд Фурье.

Указанные эффекты чувствительны к фокусировке



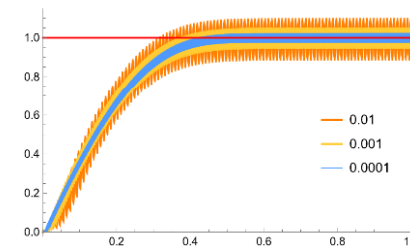
Scolan et al (PRL 2013)



McEwan (JFM 1983)

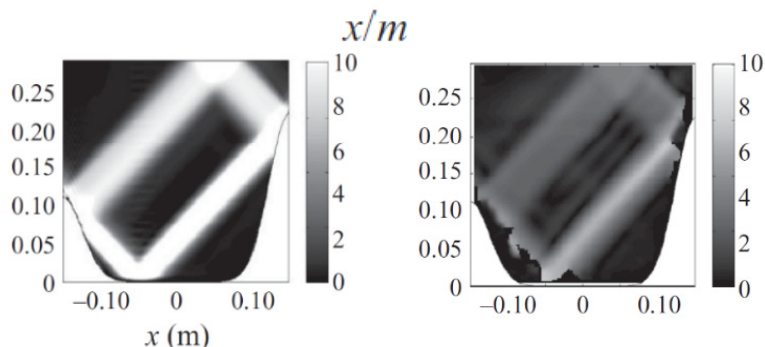
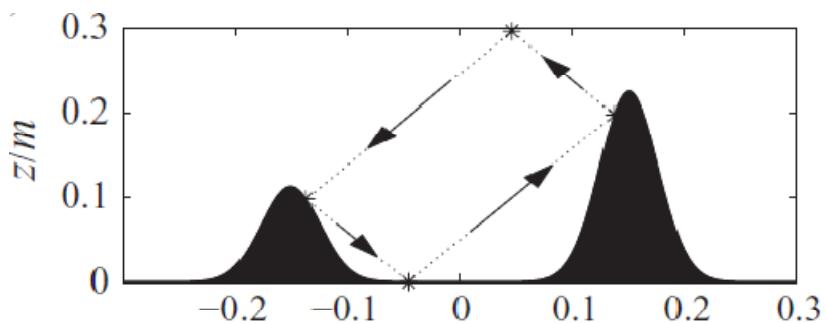
Выводы 1:

Длительность переходного процесса достижения режима установившихся колебаний в аттракторе при больших значениях числа Стокса (малых значениях числа Экмана) при соответствующей нормировке является универсальной.

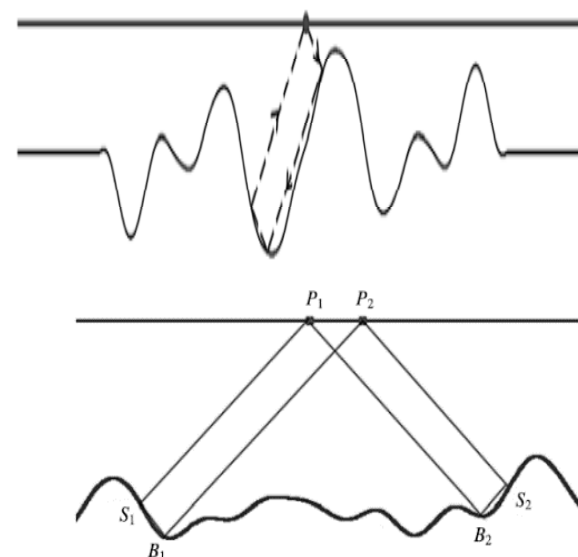


Для систем большого масштаба при учете только молекулярной вязкости длительность переходного процесса может быть весьма велика и сопоставима, например, с характерным масштабом сезонных изменений стратификации.

Tang & Peacock (Chaos 2010) Wang et al (Acta. Oceanol. Sinica. 2015)
Bingtian et al. (Acta. Oceanol. Sinica. 2015)



Аттрактор между двумя подводными хребтами
Echeverri, Yokossi,
Balmforth, Peacock (JFM 2011)

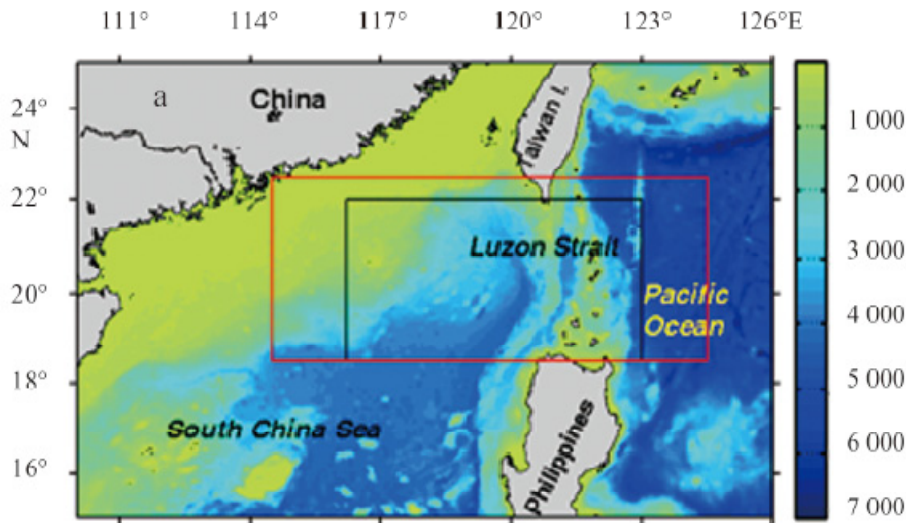


1-point attractor

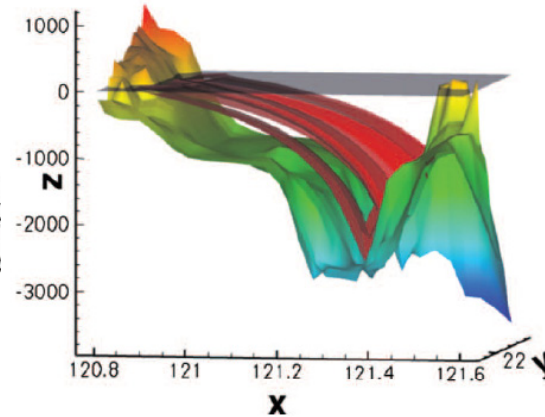
2-point attractor

Guo & Holmes-Cefron (JFM 2016)
1 аттрактор на каждые 100 км
океанского дна
в модельной плоской задаче

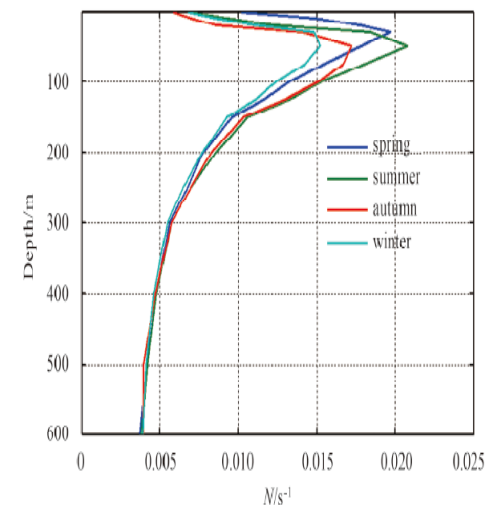
Геофизическое приложение: стратифицированная жидкость



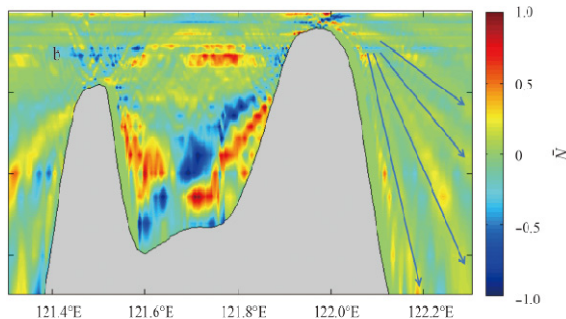
Аттрактор в Лусонском проливе



Лучевой скелет аттрактора
в Лусонском проливе
Tang & Peacock (Chaos 2010)

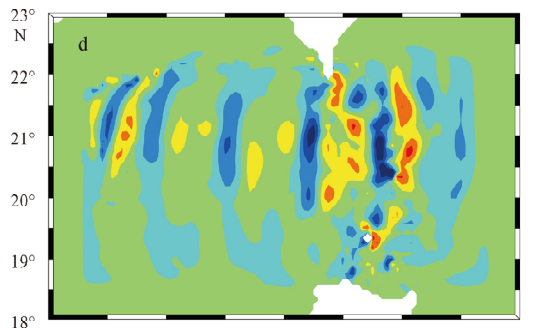
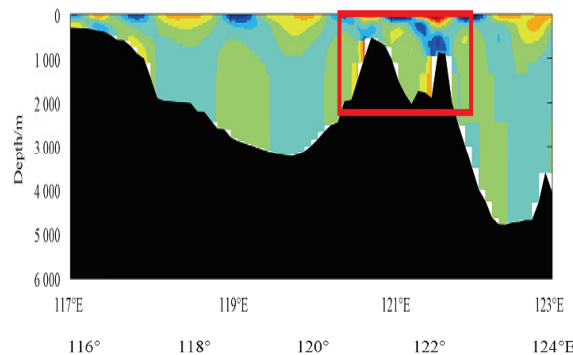


Распределение частоты
плавучести в разные сезоны

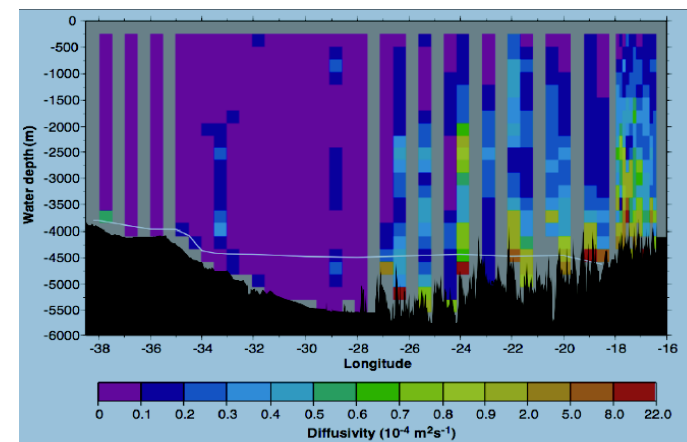


Поле возмущений частоты
плавучести

Wang G., Zheng Q., Lin M., Qiao F. Three dimensional simulation of internal wave attractors in the Luzon strait // Acta Oceanol. Sinica. 2015. V. 34, N 11. P. 14–21.



Bingtian et al.
(Acta. Oceanol. Sinica. 2015)



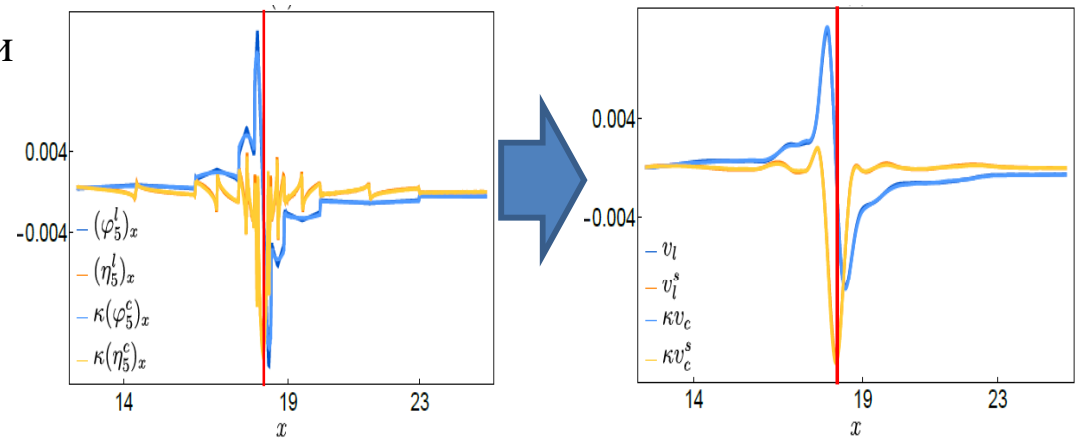
Вертикальное перемешивание
в Бразильской котловине
Polzin *et al.* (Science 1997)

Перспективы:

Регуляризация решения, учет конечной вязкости

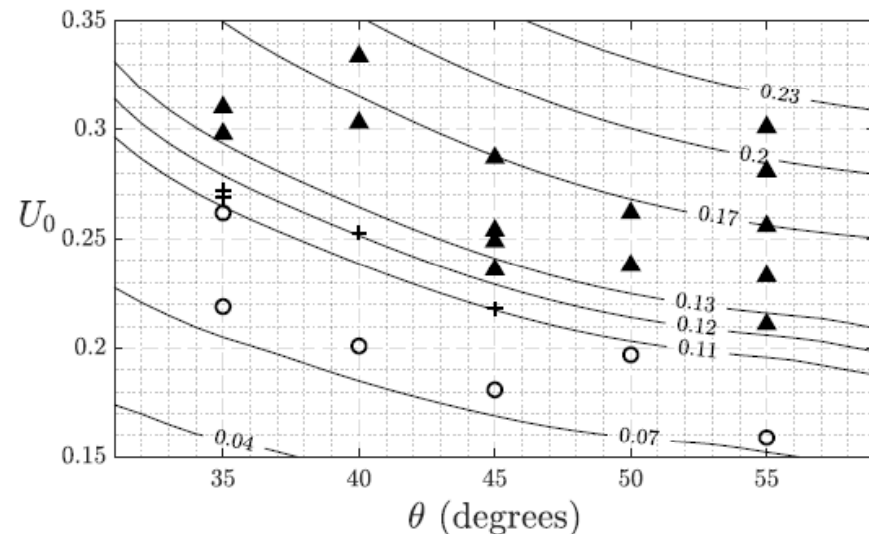
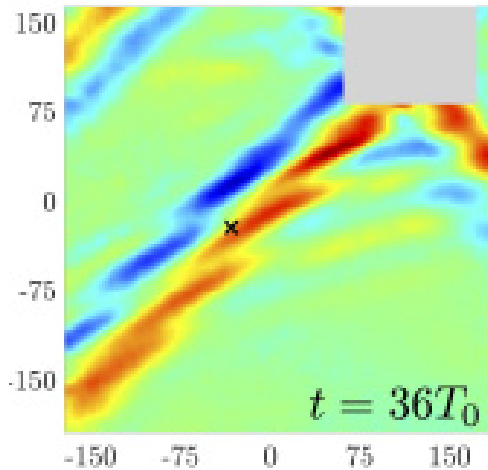
$$\phi(X, Z) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} \sin(nZ) e^{inX}$$

$$\exp \left\{ -\frac{X v}{2\omega_0} n^3 \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \left[\frac{N^2}{N^2 - \omega_0^2} \right]^2 \right\}$$



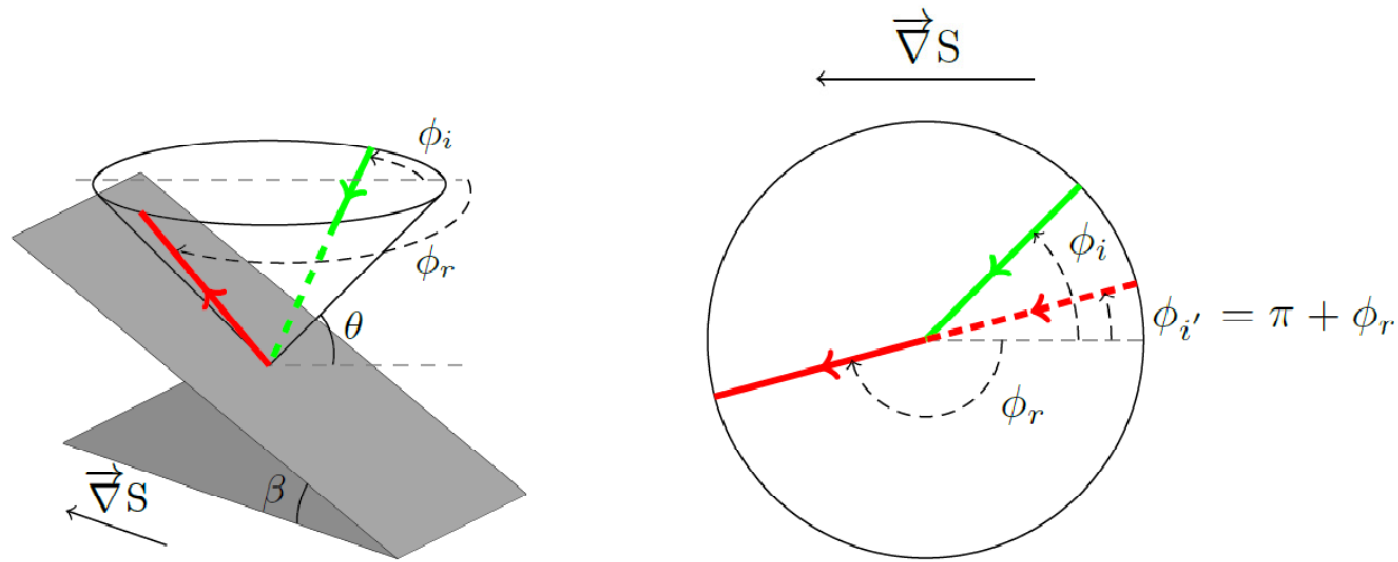
Исследование эффектов в слабонелинейной постановке. Особый интерес представляет оценка порога возникновения триадного резонанса в системе.

Существующие оценки порога возникновения триадного резонанса для пучков конечной ширины выполнены для безграничной жидкости: Fan & Akylas (JFM 2020)



Геофизические приложения: стратифицированная жидкость

Реализуемость аттракторов в пространственной задаче



$$\sin \phi_r = \frac{(s^2 - 1) \sin \phi_i}{2s \cos \phi_i + s^2 + 1}$$

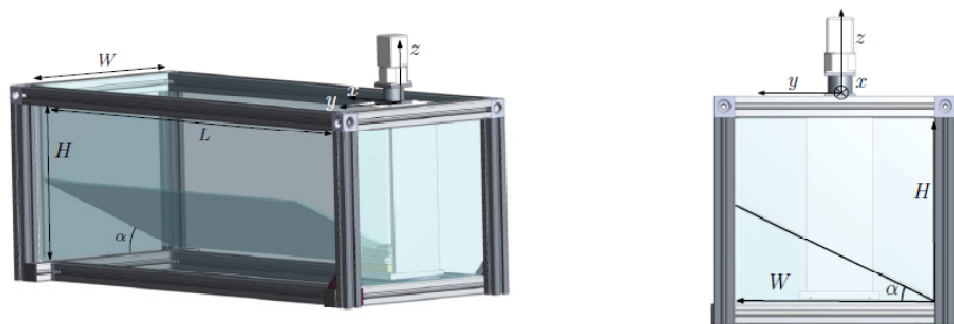
Закон отражения Филлипса

Phillips O.M. (1963) Energy transfer in rotating fluids by reflection of inertial waves // Phys. Fluids **6**, 513-520.

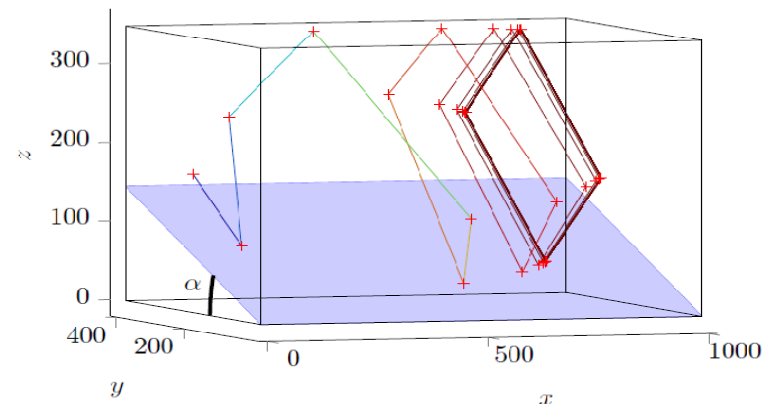
Maas L.R.M. (2005) Wave attractors: linear yet non-linear // Int. J. Bifurcat. Chaos **15** (9), 2757-2782..

Формирование аттракторов в поперечном сечении канала при генерации внутренних волн в направлении вдоль канала

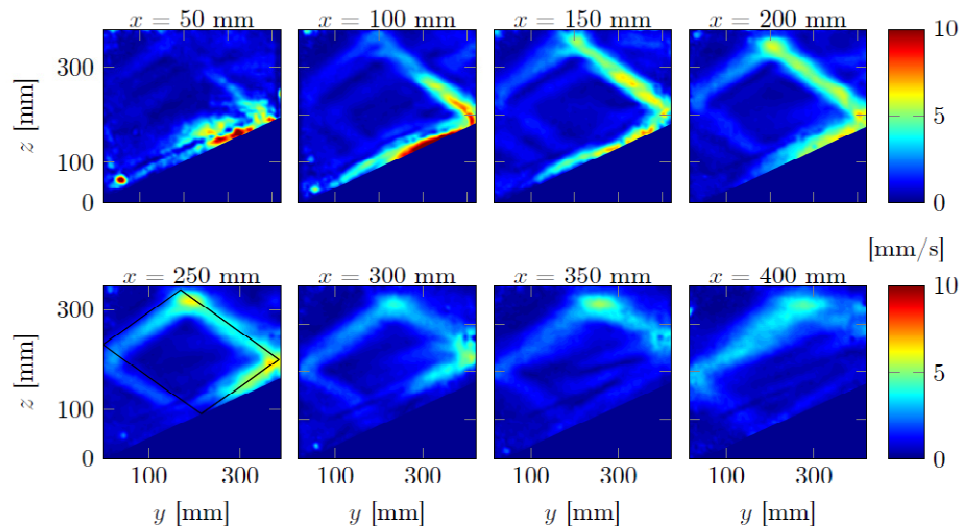
$$H = 360 \text{ mm}, L = 1000 \text{ mm}, W = 410 \text{ mm}$$



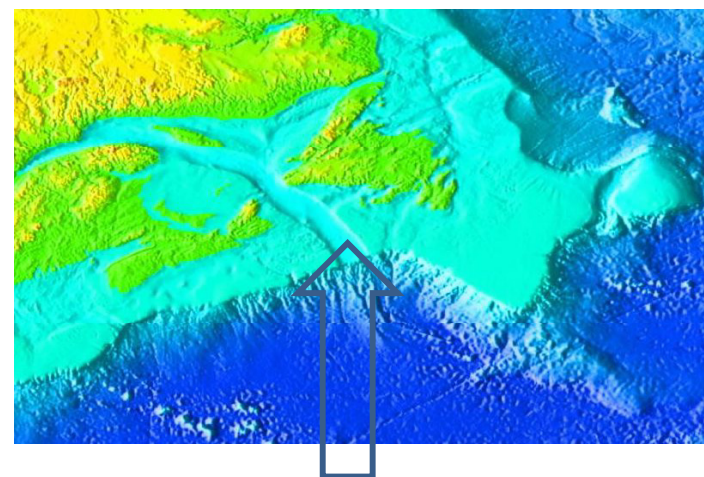
Экспериментальная установка



Траектория луча внутренних волн в соответствии с законом отражения Филиппса



Поле внутренних волн на различных расстояниях от генератора

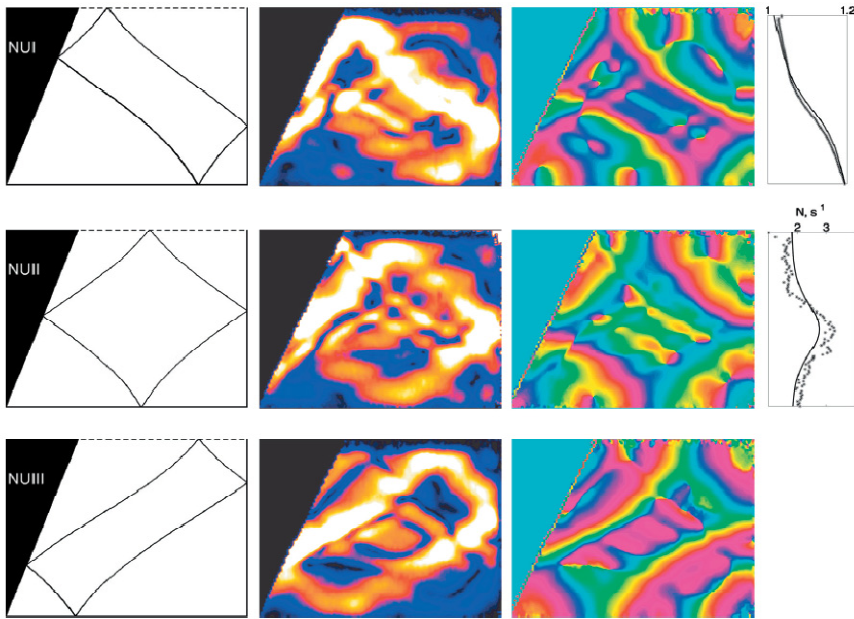


Канал Святого Лаврентия

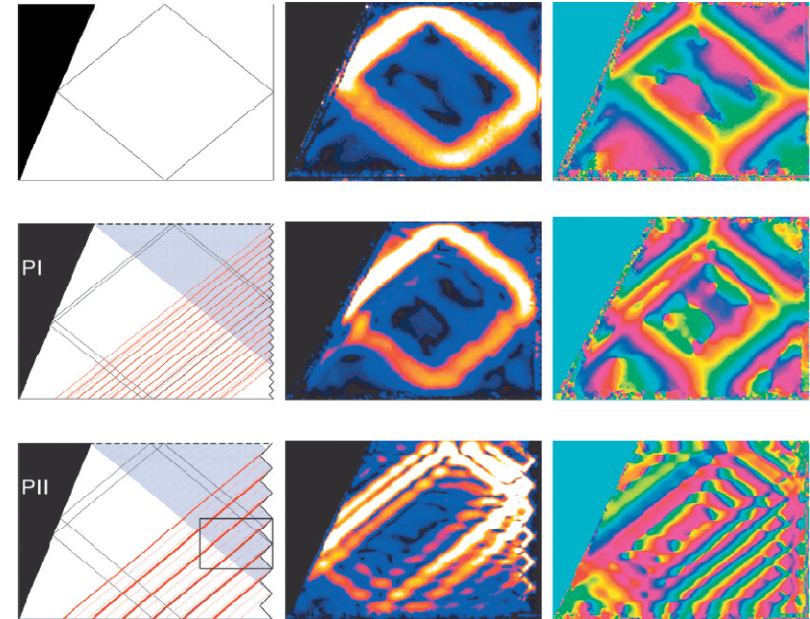
Pillet G., Ermanyuk E.V., Maas L.R.M., Sibgatullin I.N., Dauxois T. (2018) Internal wave attractors in 3D geometries: trapping by oblique reflection // *J. Fluid Mech.* 845, 203-225.

Геофизические приложения: стратифицированная жидкость

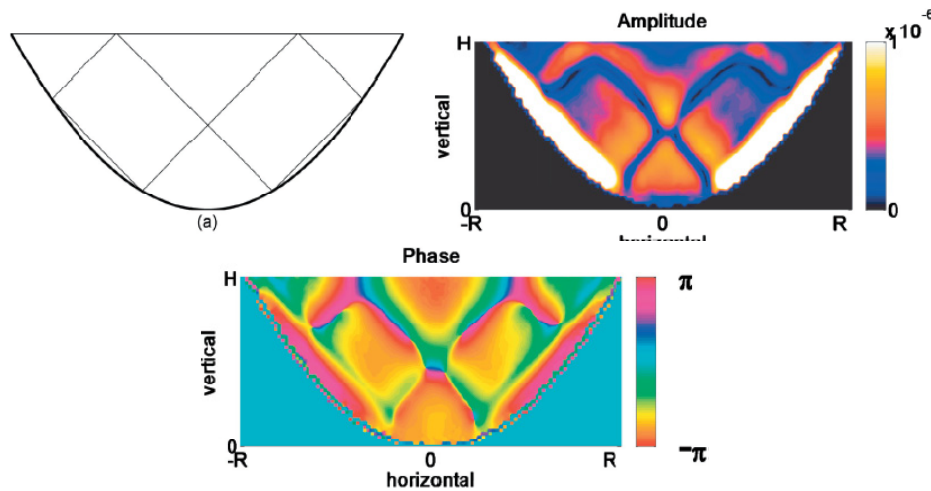
Реализуемость аттракторов в «неидеальной» системе лабораторного масштаба



Нелинейная стратификация



Пилообразная геометрия вертикальной стенки



Криволинейная граница области

Hazewinkel J., Tsimitri C., Maas L. R. M., Dalziel S.
 Observations on the robustness of internal wave attractor to perturbations // Phys. Fluids. 2010. V. 22. 107102.

Геофизические приложения: стратифицированная жидкость

Реализуемость аттракторов в «неидеальной» системе натурального масштаба

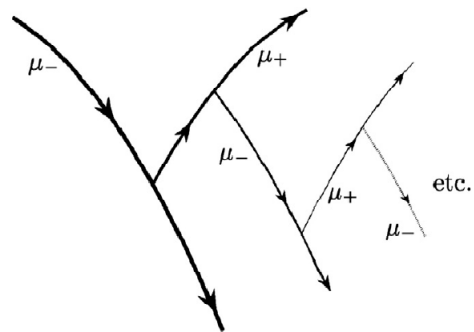
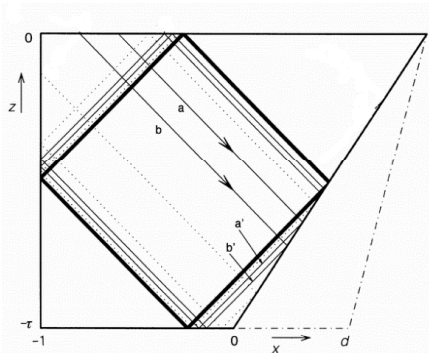
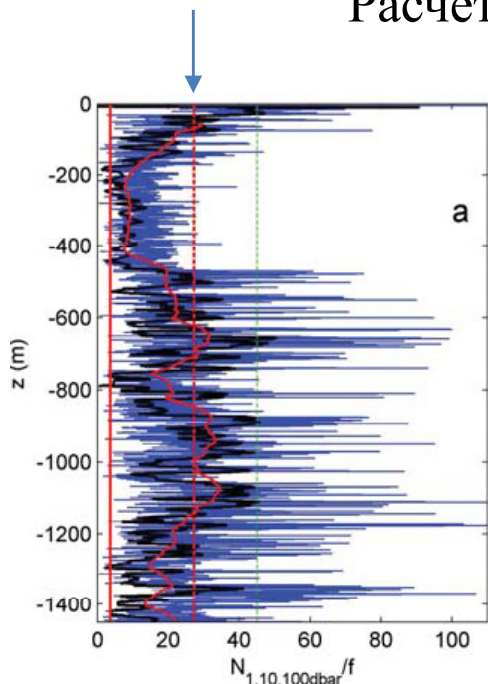
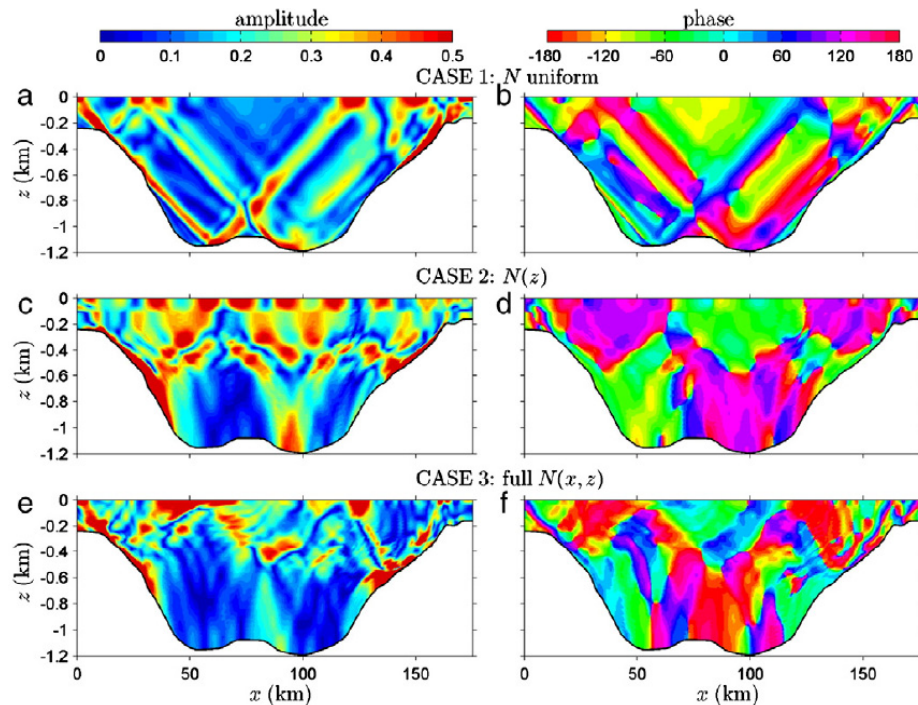


Схема рефракции на прослойках

Расчетное поле внутренних волн для Faeroe-Shetland channel



Типичное распределение частоты плавучести по глубине в натуральных условиях



постоянная частота плавучести во всей области $N = \text{const}$

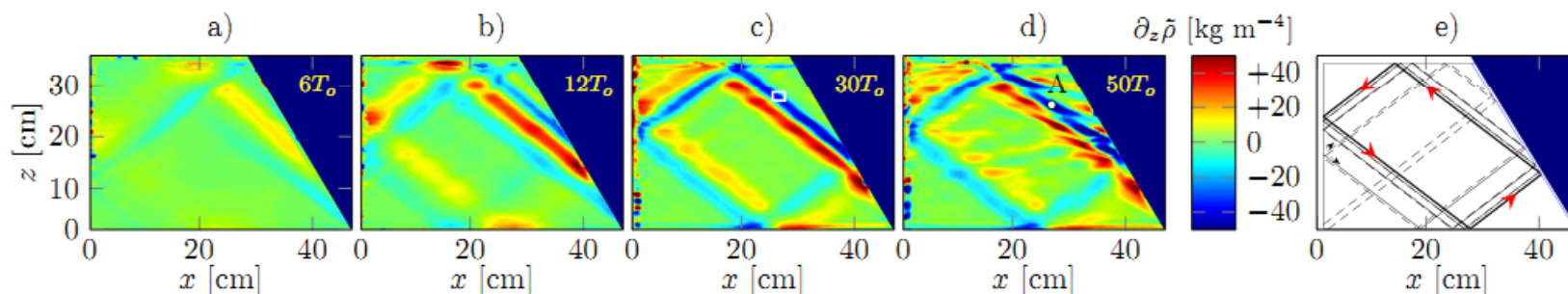
частота плавучести зависит от вертикальной координаты $N(z)$

частота плавучести зависит от вертикальной и горизонтальной координаты $N(x, z)$ + осредненное течение вдоль канала

Gerkema T., van Haren H. Absence of internal tidal beams due to non-uniform stratification // J. Sea Res. 2012. V. 74. P. 2–7.

Геофизические приложения: стратифицированная жидкость

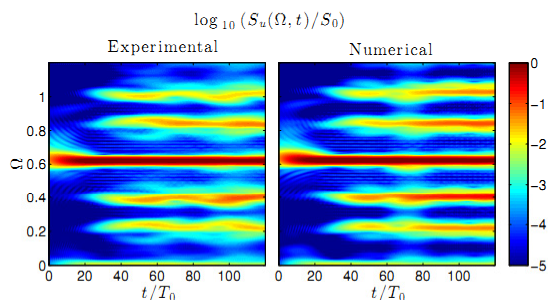
«Наблюдаемость» аттракторов в «идеальных» лабораторных и натуральных системах при наличии волновой турбулентности



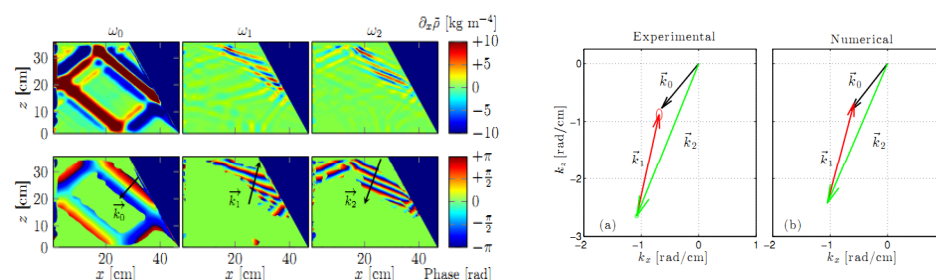
Scolan, Ermanyuk & Dauxois (PRL 2013)

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$$

$$k_0 = k_1 + k_2$$

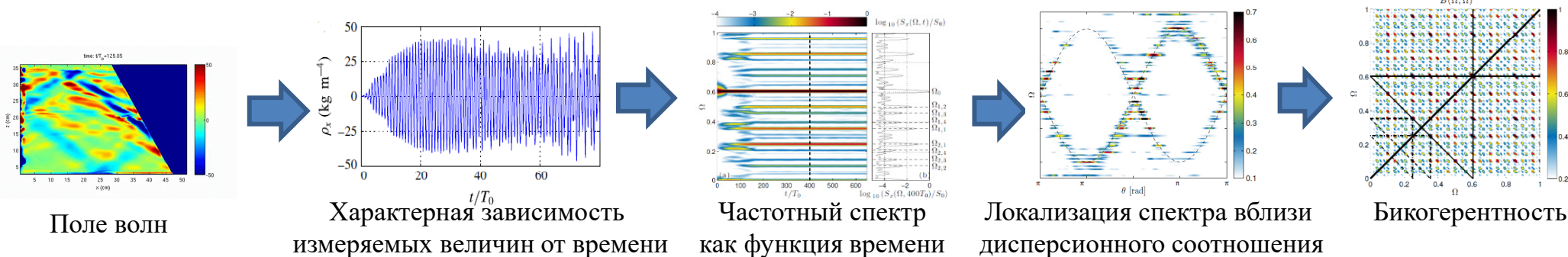


Эволюция частотного спектра с течением времени



Волновые вектора основной и дочерних волн

Волновая турбулентность в области с соотношением размеров, близким к 1:1



Поле волн

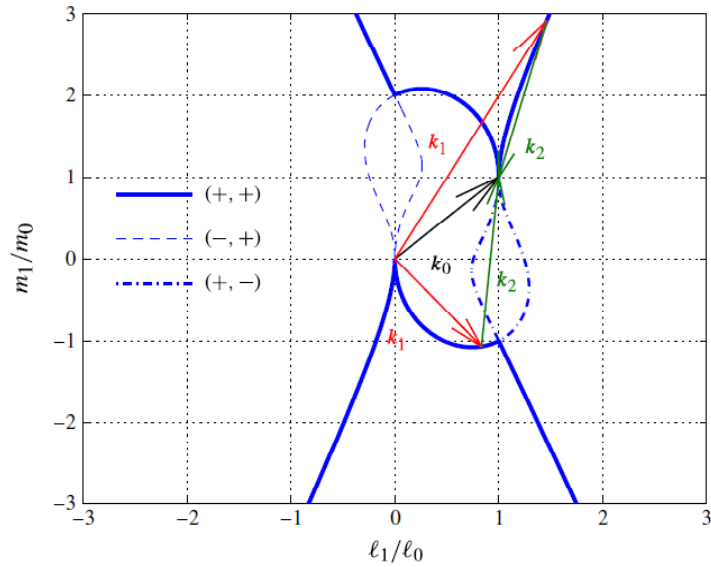
Характерная зависимость измеряемых величин от времени

Частотный спектр как функция времени

Локализация спектра вблизи дисперсионного соотношения

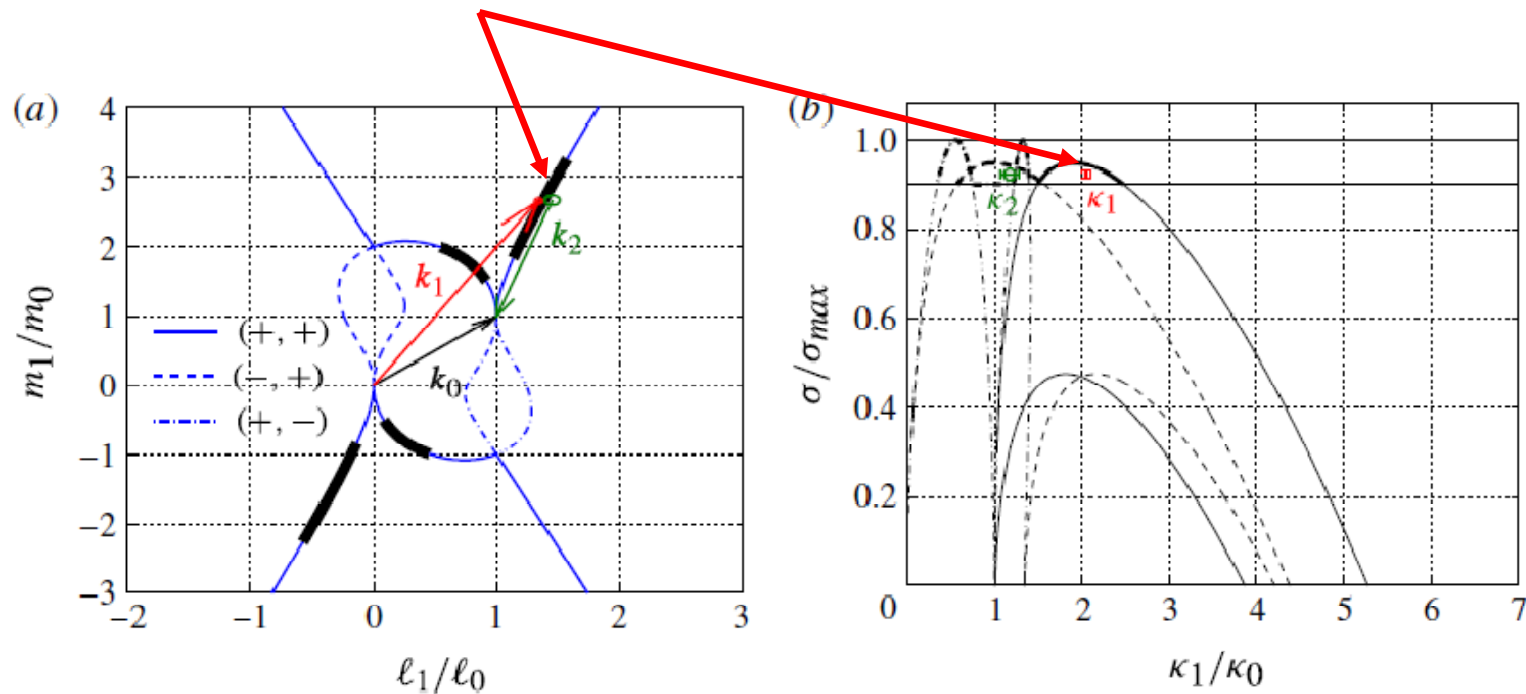
Бикогерентность

Возможные положения концов векторов вторичных волн



$$s_0 \frac{|\ell_0|}{\sqrt{\ell_0^2 + m_0^2}} = s_1 \frac{|\ell_1|}{\sqrt{\ell_1^2 + m_1^2}} + s_2 \frac{|\ell_0 + \ell_1|}{\sqrt{(\ell_0 + \ell_1)^2 + (m_0 + m_1)^2}}$$

В эксперименте как правило реализуется вариант замыкания триады векторов, соответствующий прямому каскаду, т.е. передаче энергии волнам меньших масштабов



Анализ волновой турбулентности

Метод: Yarom & Sharon (Nature Physics 2014)

2D PIV поле скорости: $u(x, z, t)$ и $w(x, z, t)$

3D преобразование Фурье: $\hat{u}(k_x, k_z, \omega)$ и $\hat{w}(k_x, k_z, \omega)$

спектр энергии:

$$E(k_x, k_z, \omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{ST} (|\hat{u}(k_x, k_z, \omega)|^2 + |\hat{w}(k_x, k_z, \omega)|^2)$$

дисперсионное соотношение: $\Omega = \pm \sin \theta$

интерполяция: $E(k_x, k_z, \omega) \longrightarrow E(k, \theta, \omega)$

интегрирование
по масштабам,
разрешаемым
в эксперименте

$$E(\theta, \omega) = \int_{k_{min}}^{k_{max}} E(k, \theta, \omega) k dk$$

Волновая турбулентность и/или вихревые движения?

Разделение масштабов...

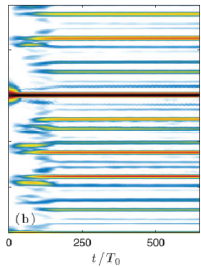
$$k \in [0.22, 1] \text{ rad/cm}$$

$$\lambda \in [28.5, 6.3] \text{ cm}$$

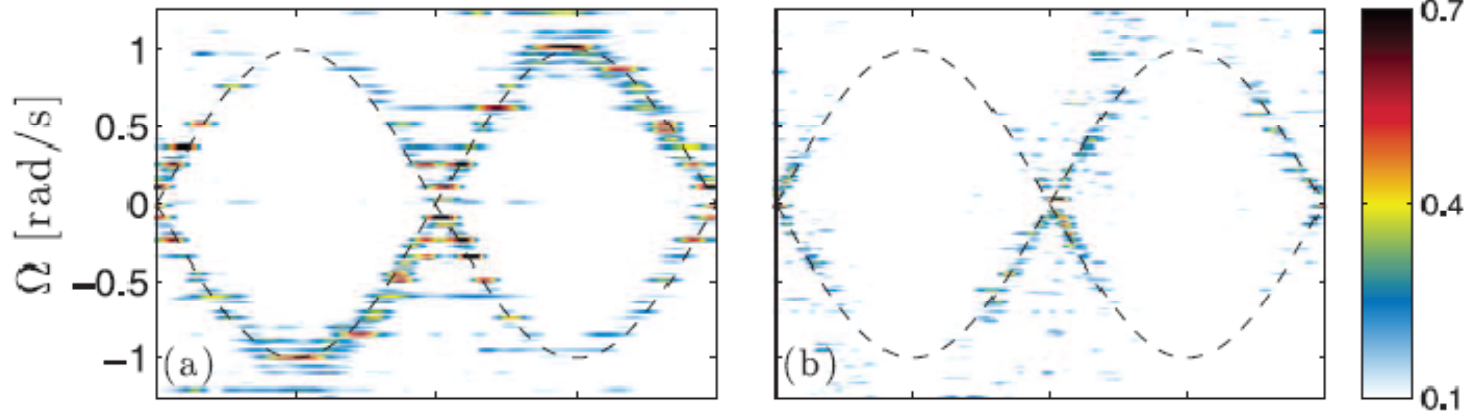
$$k \in [1, 1.86] \text{ rad/cm}$$

$$\lambda \in [6.3, 3.4] \text{ cm}$$

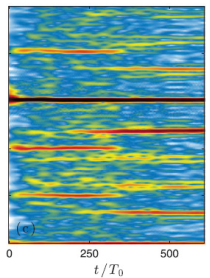
Каскад В



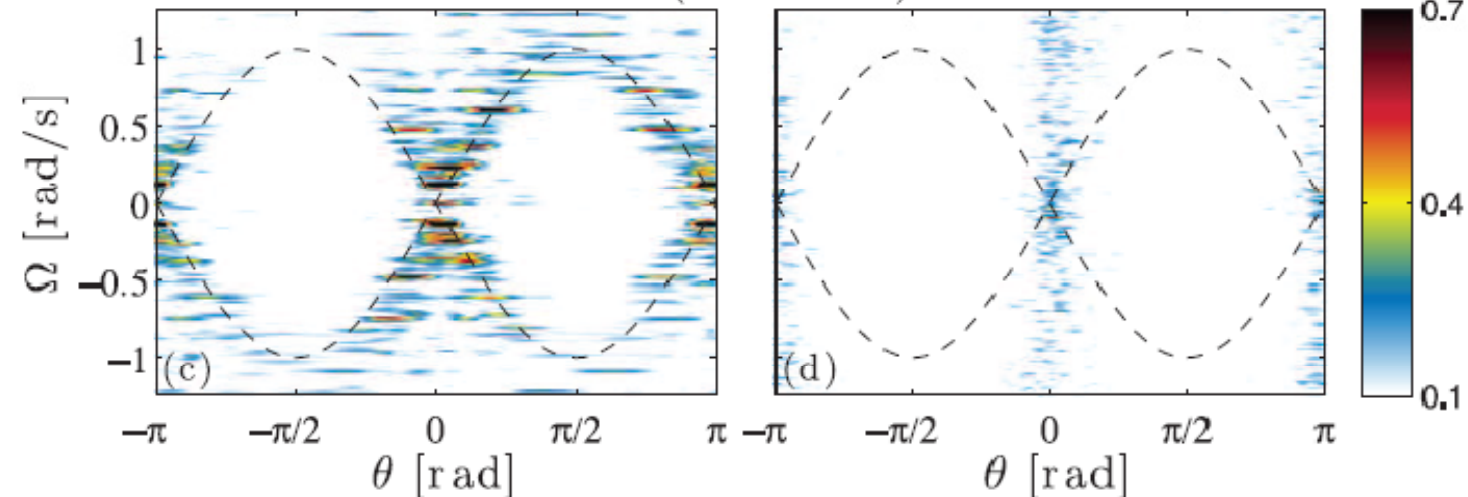
Case B ($a = 5 \text{ mm}$)



Каскад С

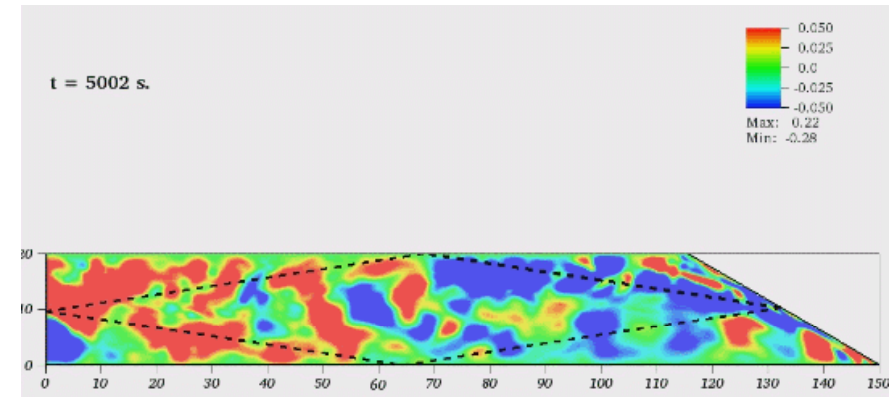
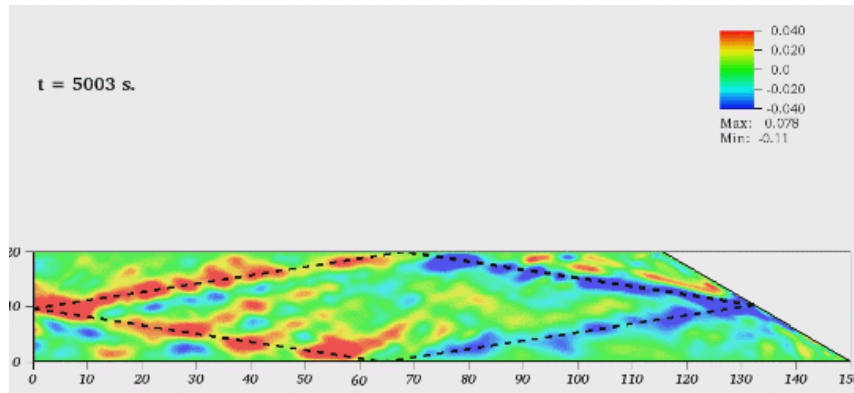
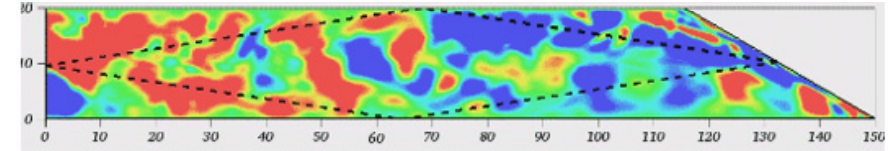
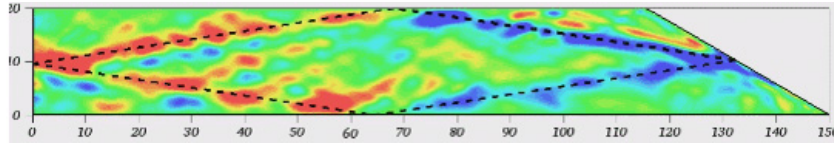


Case C ($a = 10 \text{ mm}$)



Геофизические приложения: стратифицированная жидкость

«Наблюдаемость» аттракторов в «идеальных» лабораторных и натуральных системах при наличии волновой турбулентности



Результаты прямого численного моделирования (И.Н. Сибгатуллин) аттракторов внутренних волн в случаях «слабой» (слева) и «сильной» (справа) волновой турбулентности (амплитуды входных возмущений отличаются в 2.5 раза)

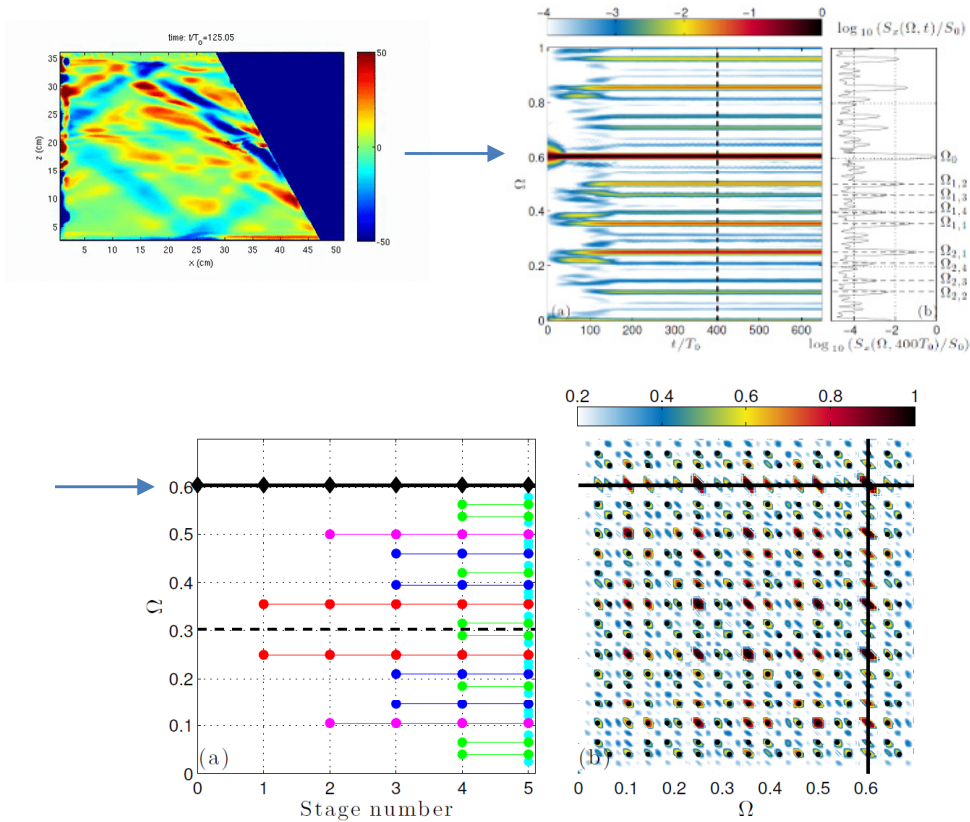
Актуальные задачи:

- экспериментальное исследование энергетического баланса,
- исследование закономерностей «заселения» частотного спектра,
- связь с теорией волновой турбулентности Lvov & Tabak (PRL 2001), Lvov, Polzin, Tabak (PRL 2004) и спектром Гаррета-Манка.

Исследование закономерностей «заселения» частотного спектра

Аттрактор в области
с отношением глубины к длине
близким к 1.

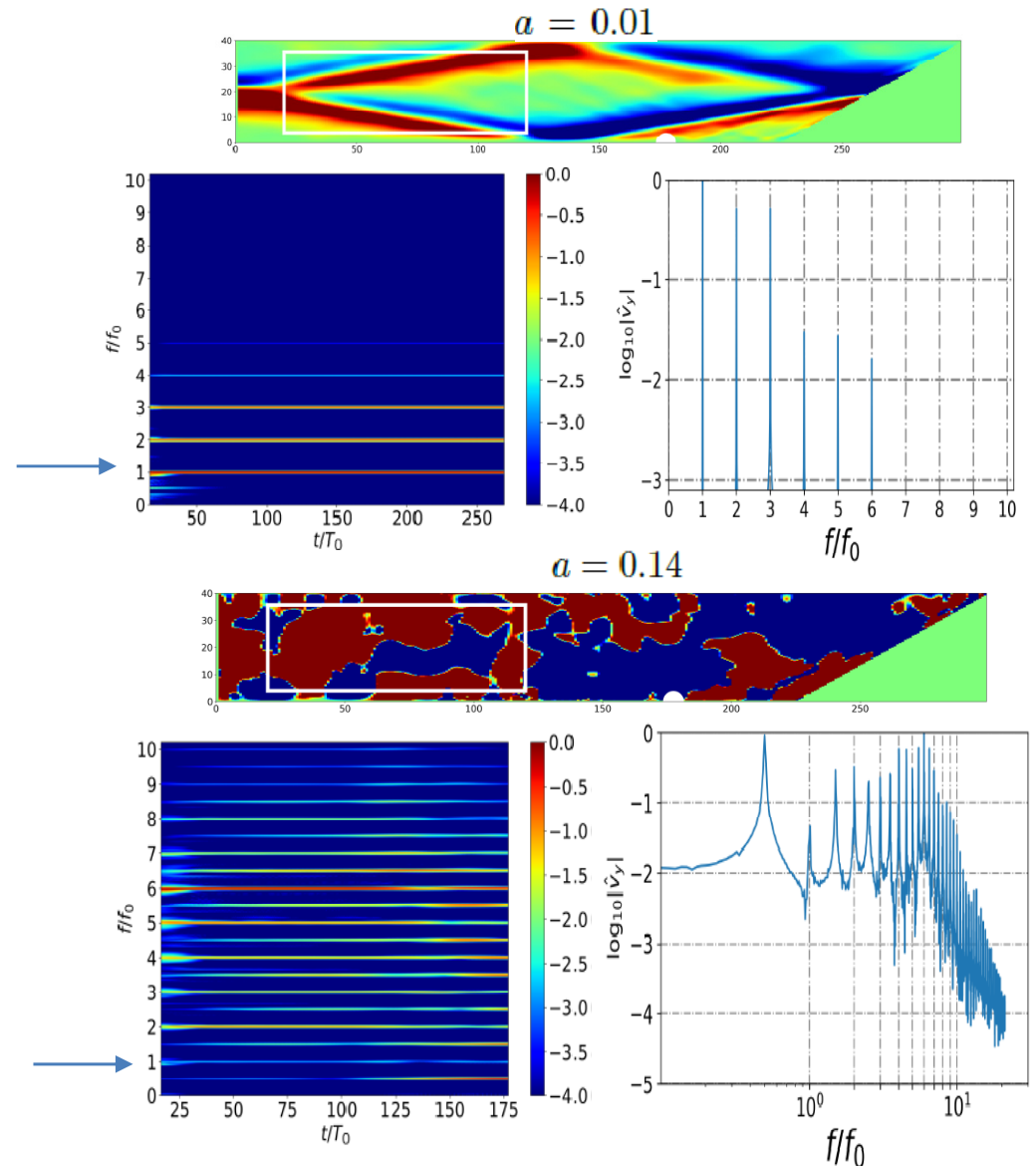
«Заселение» спектра субгармониками



Brouzet C., Ermanyuk E.V., Joubaud S., Sibgatullin I.N.,
Dauxois T. (2016) Energy cascade in internal-wave attractors
// *EPL* **113**, 44001

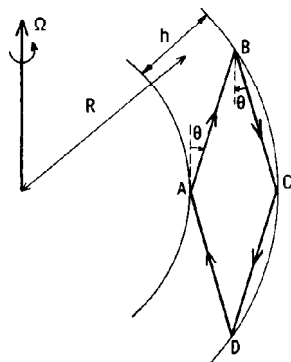
Brouzet C., Ermanyuk E.V., Joubaud S., Pillet G.,
Dauxois T. (2017) Internal wave attractors: scenarios
of instability // *J. Fluid Mech.* **811**, 544-568

Аттрактор в области
с большим горизонтальным удлинением
«Заселение» спектра кратными
и «полукратными» гармониками

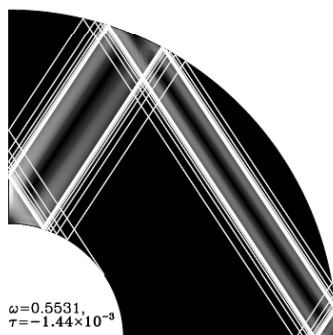
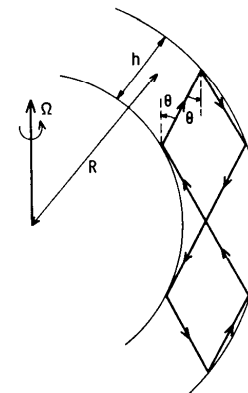


Волновые аттракторы во вращающейся жидкости

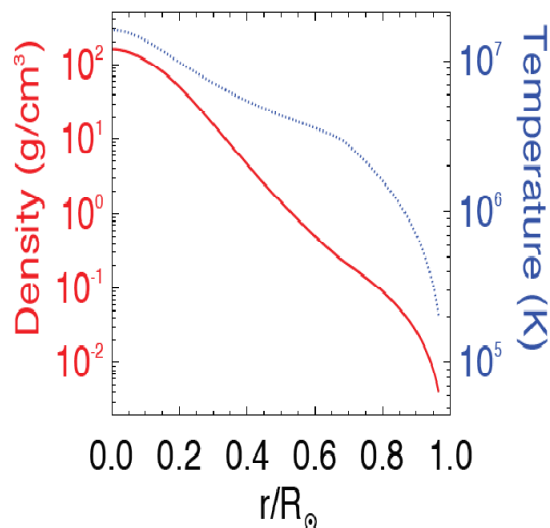
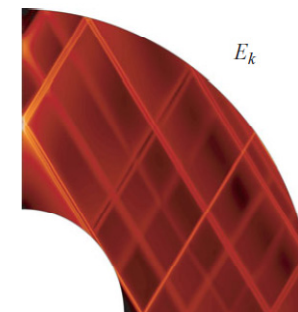
Гео- и астрофизические приложения: вращающаяся жидкость



Аттракторы в экваториальной зоне
вращающейся жидкой сферической оболочки
Bretherton (Tellus 1964)
Maas, Harlander,
Hoff, Egbers, Klein...

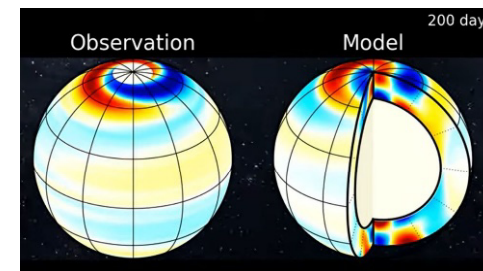


Аттракторы в жидком ядре Земли
Rieutord, Georgeot, Valdettaro
(PRL 2000), (JFM 1997- 20..)
Ogilvie (JFM 2005)
Jouve & Ogilvie (JFM 2014)

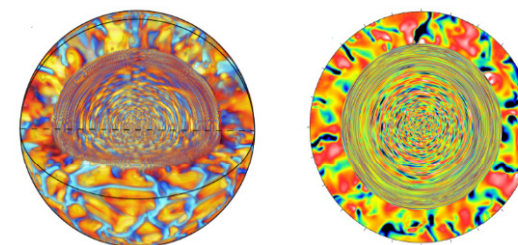


Стратификация
Солнца

Инерционные моды в конвективной оболочке
Солнца.
Gizon et al (A&A, 2021)
Bekki, Cameron, Gizon (A&A, 2022)



Инерционные волны в радиационной зоне
Солнца
Alvan, Strugarek, Brun, Mathis, Garcia
(A & A 2015)



Геофизические приложения: вращающаяся жидкость

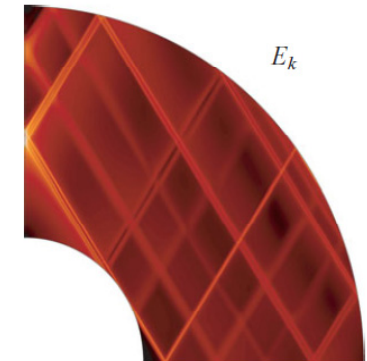
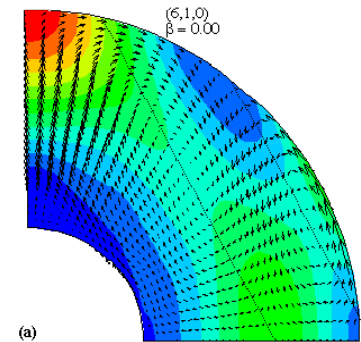
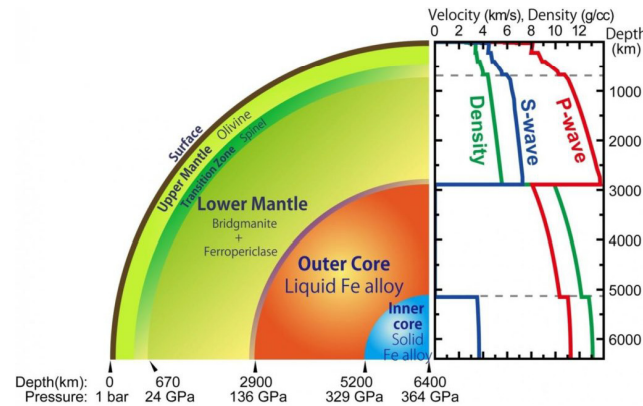
Влияние внутреннего ядра на собственные частоты колебаний жидкой оболочки

Aldridge K. D., Lumb L. I. Inertial waves identified in Earth's fluid outer core // Nature. 1987. V. 325. P. 421–423.

Table 1 Comparison of periods observed by Melchior and Ducarme with calculated inertial wave periods

Observed period (h)		Calculated period (h)	mode (n, m, k)
Mindanao	Hindu Kush		
15.3	15.2	15.832	(3, 1, 1)
13.9	14.0	14.003	(4, 1, 1)
13.2	13.2	13.247	(5, 1, 1)
—	15.6	15.626	(5, 1, 0)
14.4	14.3	14.403	(6, 1, 0)
13.6	13.6	13.720	(7, 1, 0)
13.4	13.4	13.290	(8, 1, 0)
14.6	14.6	14.551	(6, 1, 2)

Here, we compare the periods near peak power from the superconducting gravimeter with those of inertial waves of an incompressible, homogeneous, rotating fluid which completely fills a spheroidal cavity with a flattening, f , equal to that of the Earth's fluid core. Our interpretation of the observed periods associated with the Mindanao (20 November 1984) and Hindu Kush (30 December 1983) earthquakes are shown in columns one and two respectively of Table 1.

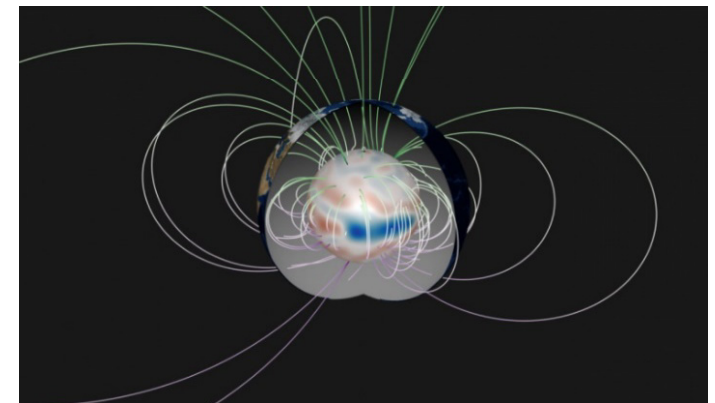


Влияние внутреннего ядра на диссипацию приливных инерционных мод

Rieutord M., Valdettaro L. Viscous dissipation by tidally forced inertial modes in a rotating spherical shell // J. Fluid Mech. 2010. V. 643. P. 363–394.

Детектирование аномалий магнитного поля Земли и решение обратных задач магнитной гидродинамики

Jillet et al. Satellite magnetic data reveal interannual waves in Earth's core // PNAS. 2022.



Механизм каскада энергии во вращающейся жидкости?

параметр Кориолиса

$$2\Omega$$

дисперсионное
соотношение

$$\frac{\omega}{2\Omega} = \pm \cos \theta$$

Волновые взаимодействия: триадный резонанс.
Каскад энергии по направлению θ и по масштабу.
Формализм слабой волновой турбулентности.

«Мы совершенно точно знаем,
что такое волновая турбулентность»

В.Е. Захаров



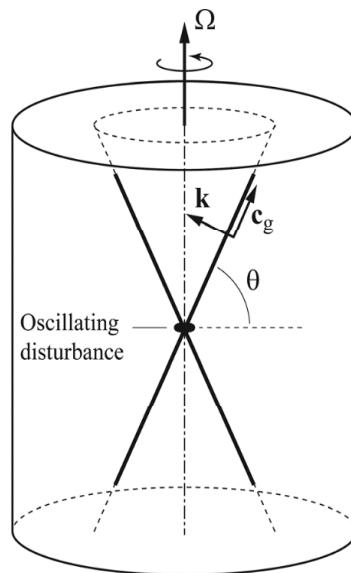
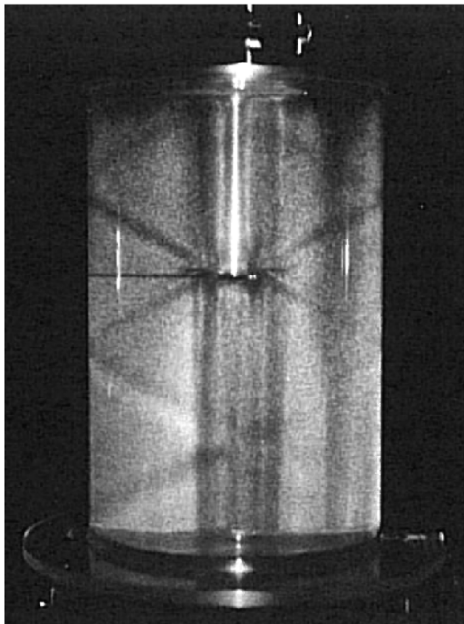
“The 2D geostrophic or slow modes decouple from the 3D inertial waves. Such decoupling underlies the validity of quasigeostrophic models, e.g., for the atmosphere or the oceans. Forced DNS show the generation of slow modes. **From the present work, we see that weak turbulence at the lowest order cannot describe such an observation; however higher order processes could play a significant role**”

Galtier S. “Weak inertial-wave turbulence theory”
(Phys. Rev. E. 2003)

Поведение реальных систем при наличии границ (слоев Экмана), сильного возмущающего воздействия, сильных нелинейных взаимодействий?



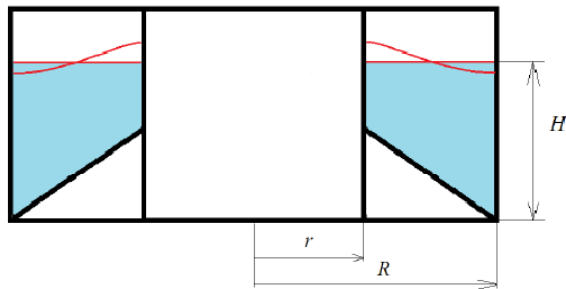
Необходимы новые экспериментальные и численные постановки задач, развитие сложных методов пост-процессинга, развитие математического аппарата для выделения «волновых» и «вихревых» компонентов течения....



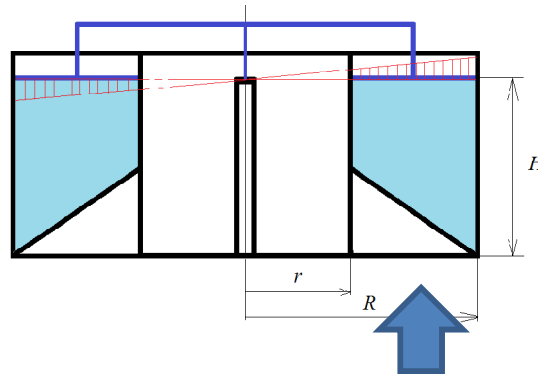
**инерционные волны во
вращающейся жидкости**

Аттрактор инерционных волн в кольцевой области

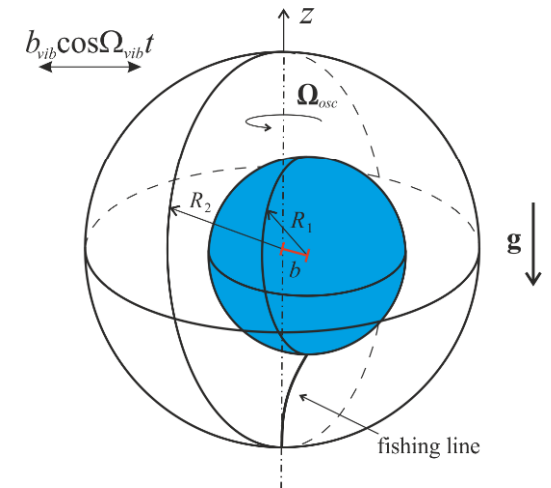
Осесимметричное
возмущение
эксперимент в Лионе



Возмущение с помощью
нутаации крышки
эксперимент в Перми



Возмущение с помощью
инерционных колебаний ядра
эксперимент в Перми

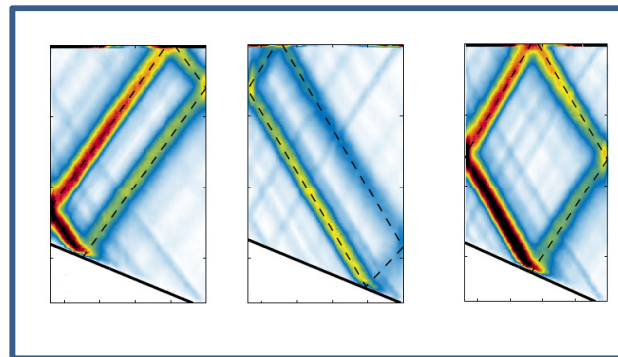


J. Fluid Mech. (2021), vol. 926, A12, doi:10.1017/jfm.2021.703



Vortex cluster arising from an axisymmetric inertial wave attractor

S. Boury^{1,2,†}, I. Sibgatullin^{3,4}, E. Ermanyuk⁵, N. Shmakova⁵, P. Odier², S. Joubaud^{2,6}, L.R.M. Maas⁷ and T. Dauxois²



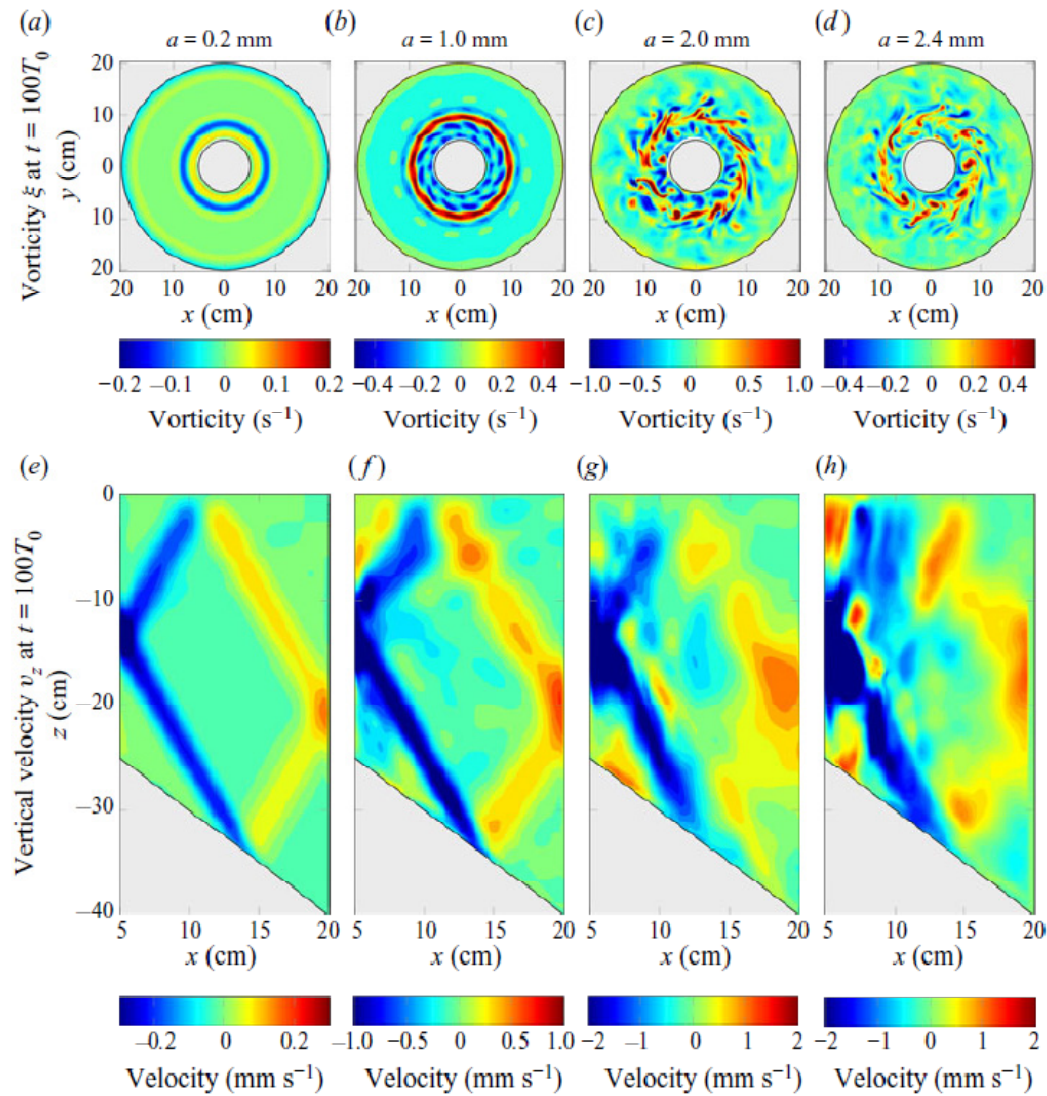
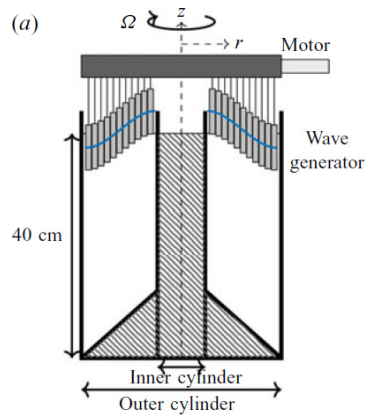
Stewartson layer instability and triadic resonances in rotating sphere with oscillating inner core

Stanislav Subbotin, Natalia Shmakova, Evgeny Ermanyuk and Victor Kozlov

Physics of Fluids **34**, 064103 (2022);
<https://doi.org/10.1063/5.0090492>

Численные результаты

Осесимметричное возмущение эксперимент в Лионе

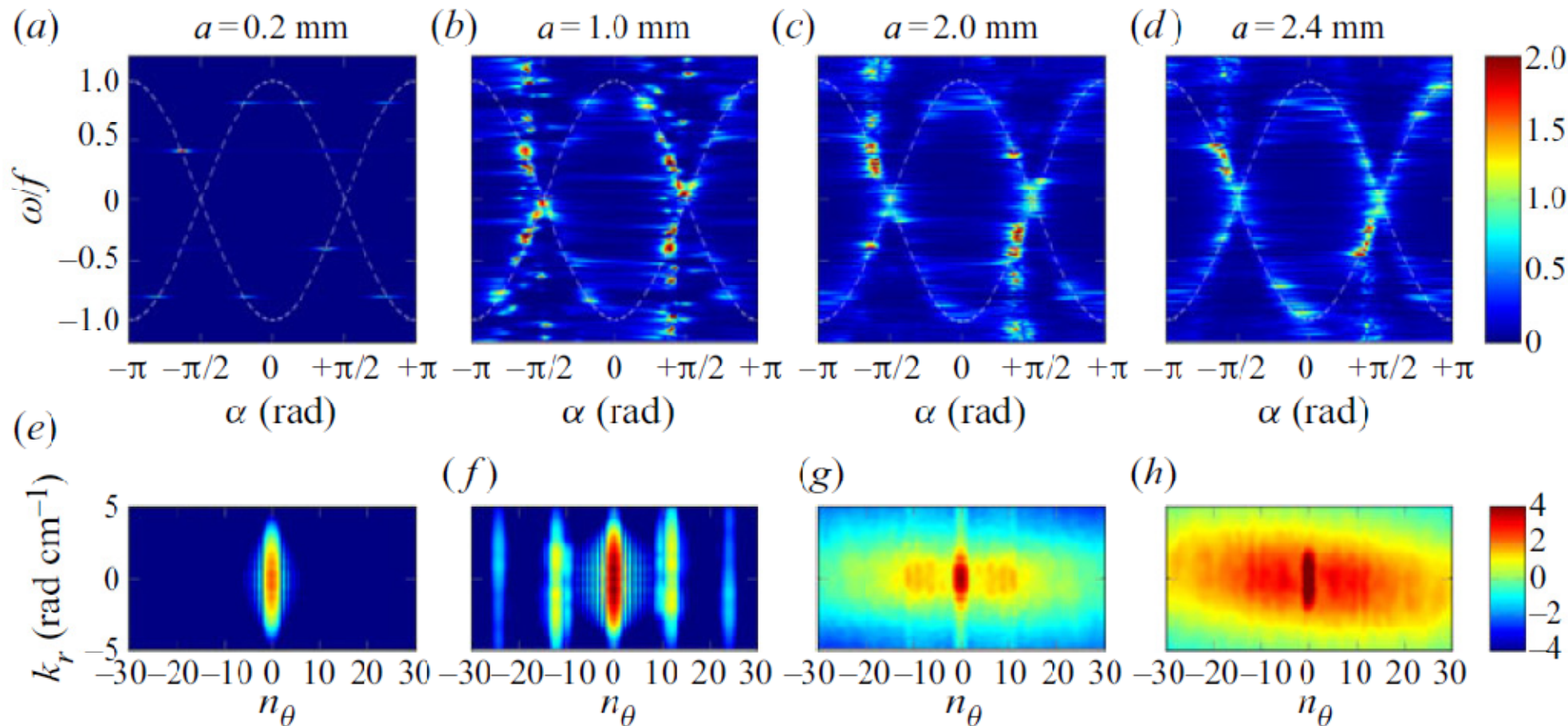


Верхний ряд:

спектр энергии в «меридиональном»
сечении как функция угла наклона
волнового вектора и частоты

$$E_{\parallel}(k_r, k_z, \omega) = \frac{|\hat{v}_r(k_r, k_z, \omega)|^2 + |\hat{v}_z(k_r, k_z, \omega)|^2}{2A_{\parallel}T}$$

$$E_{\parallel}(\alpha, \omega) = \int_{k_{min}}^{k_{max}} E_{\parallel}(k, \alpha, \omega) k dk$$



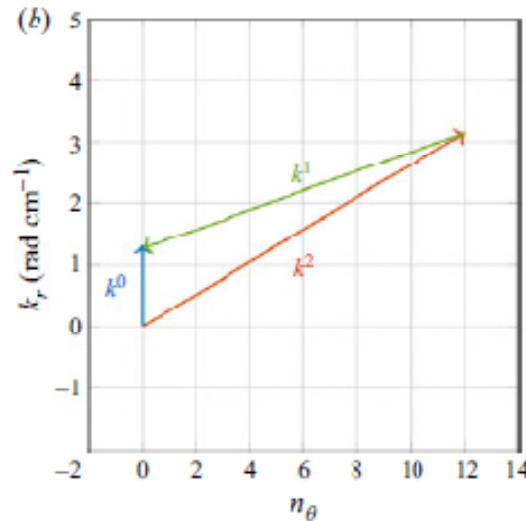
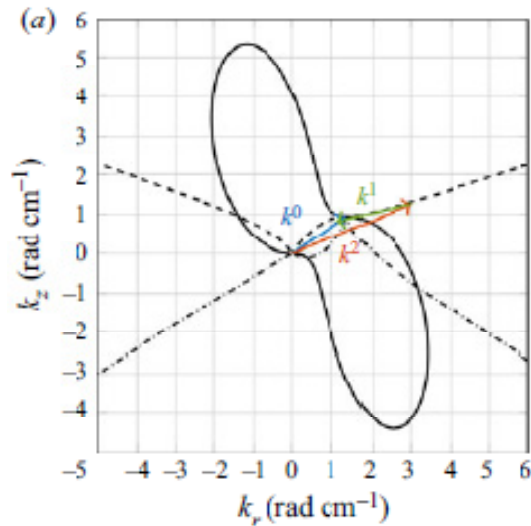
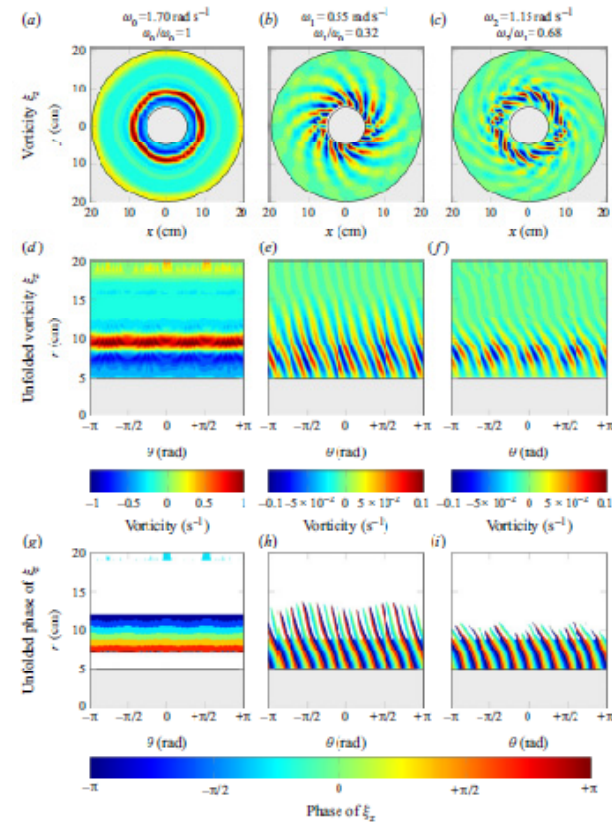
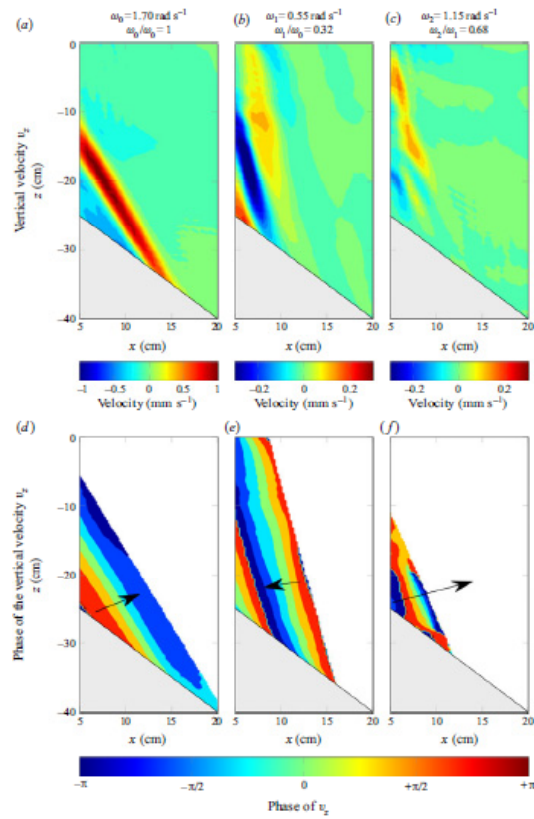
Нижний ряд:

спектр энергии в «экваториальном»
сечении как функция
радиальной компоненты волнового
вектора и азимутального
волнового числа

$$E_{\perp}(k_r, n_{\theta}, \omega) = \frac{|\hat{v}_r(k_r, n_{\theta}, \omega)|^2 + |\hat{v}_{\theta}(k_r, n_{\theta}, \omega)|^2}{2A_{r,\theta}T}$$

$$E_{\perp}(k_r, n_{\theta}) = \int_{-f}^f E_{\perp}(k_r, n_{\theta}, \omega) d\omega$$

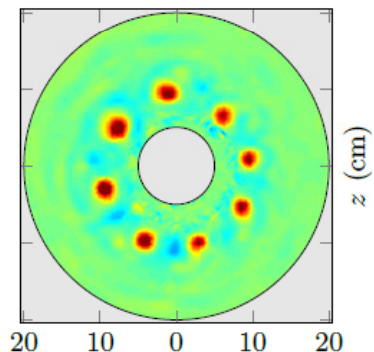
Фильтрация волновой картины с помощью преобразования Гильберта ($a=1\text{ мм}$)



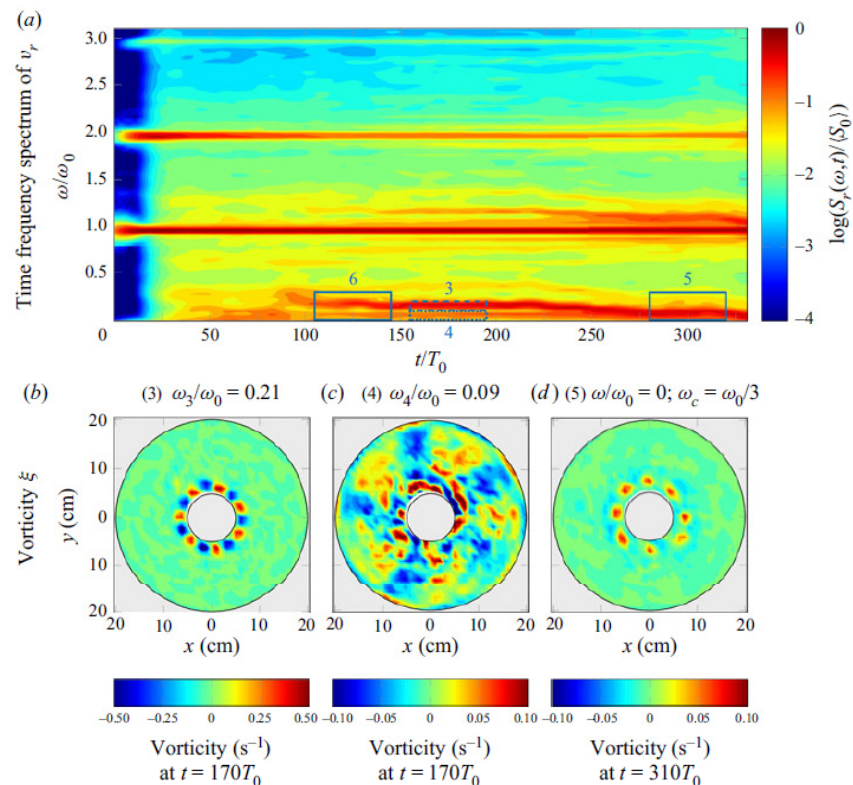
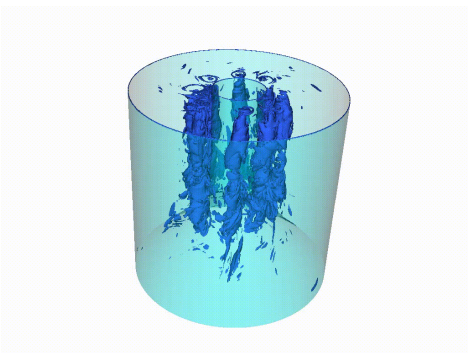
Триада векторов
 в меридиональном и
 экваториальном сечениях

Формирование устойчивого полигонального вихревого кластера

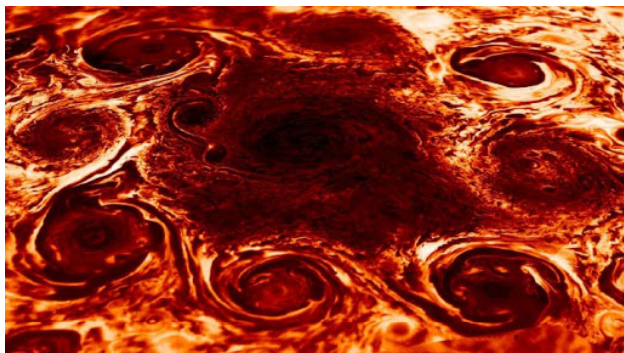
эксперимент



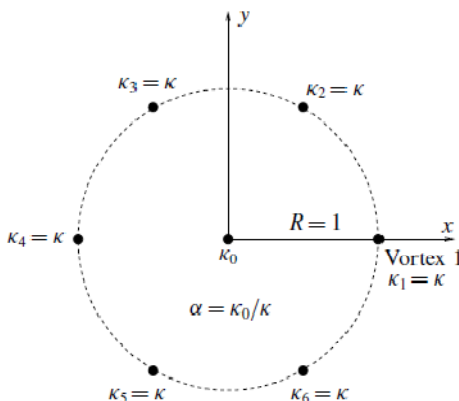
расчет



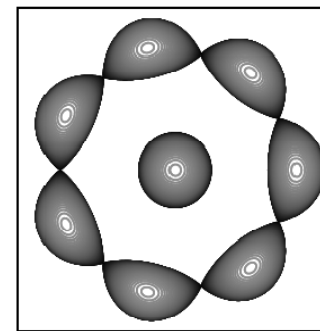
Исследование устойчивости полигональных вихревых кластеров с центральным вихрем



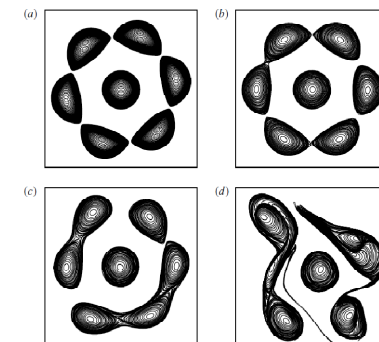
Вихревой кластер вблизи Северного полюса Юпитера: Adriani et al (Nature 2018)



$(m + 1)$ -vortex problem

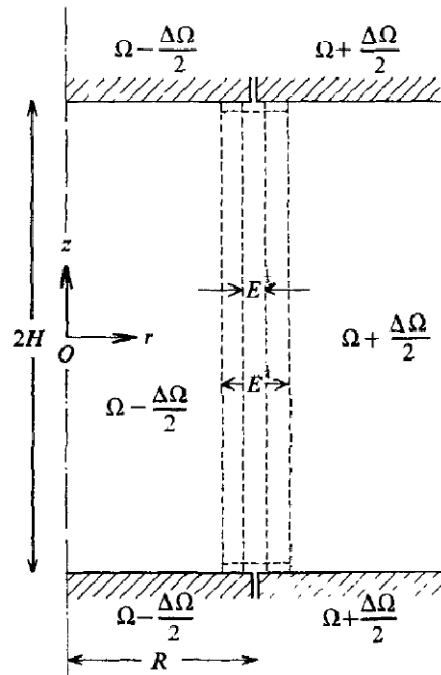


Reinaud (JFM 2019)



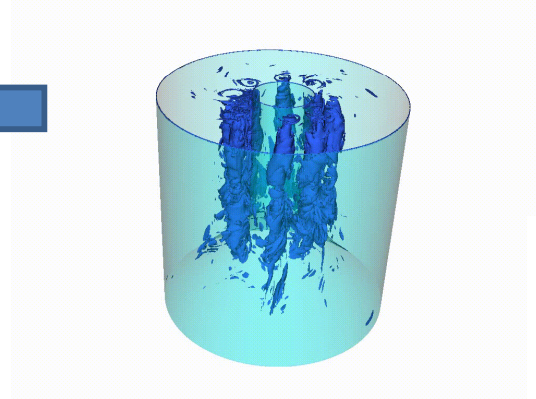
Интерпретация механизма образования вихревого кластера

Неустойчивость слоя
Стюартсона

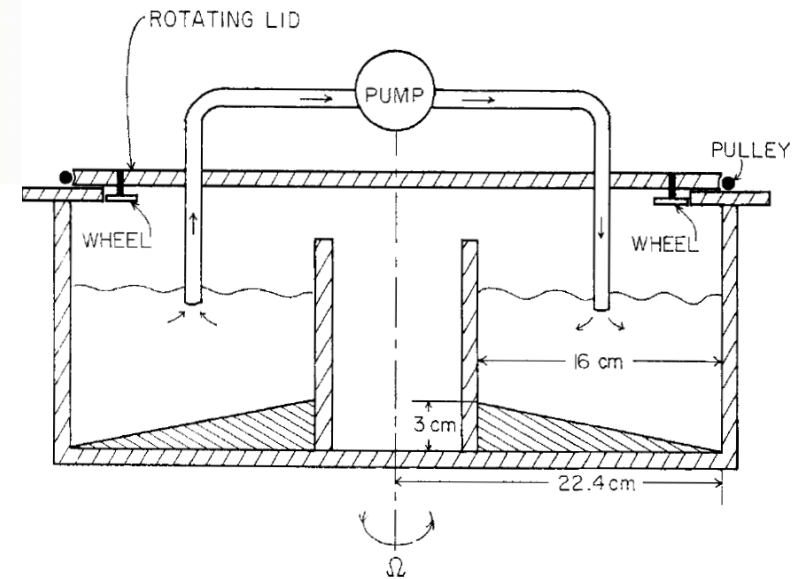


$$m Ro / (\gamma E^{1/2}) > 9.5.$$

Nashimoto (JFM 1976)



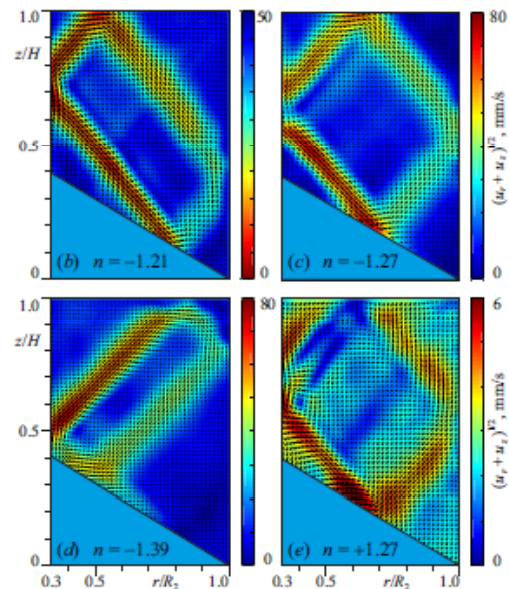
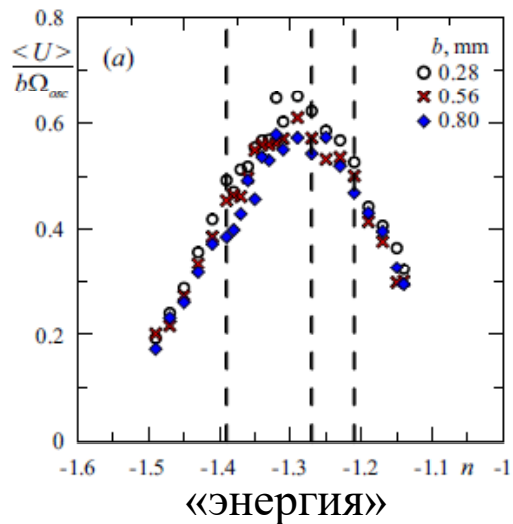
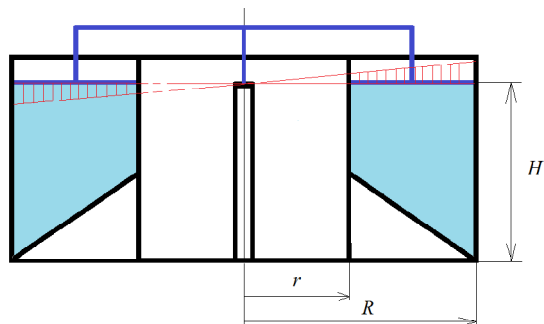
Волны Россби
(с захваченным ядром)



$$c_{k,l} \equiv \frac{\beta}{(k^2 + \pi^2 l^2)}$$

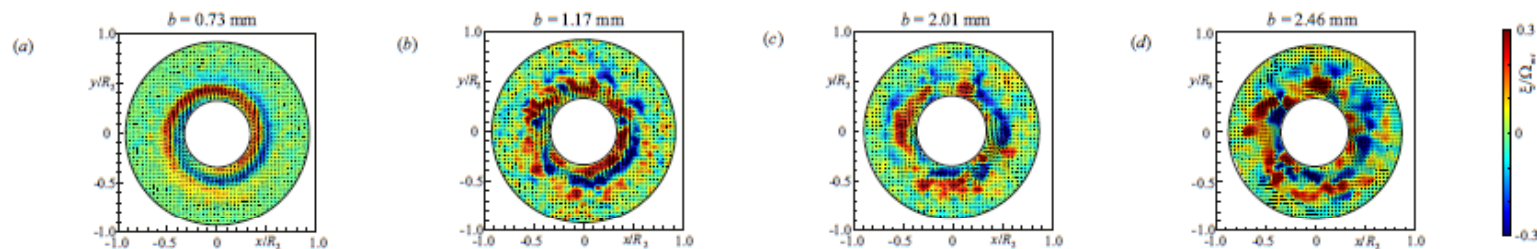
Holton (Geophys. Fluid Dyn. 1971)

Возмущение с помощью нутации крышки эксперимент в Перми

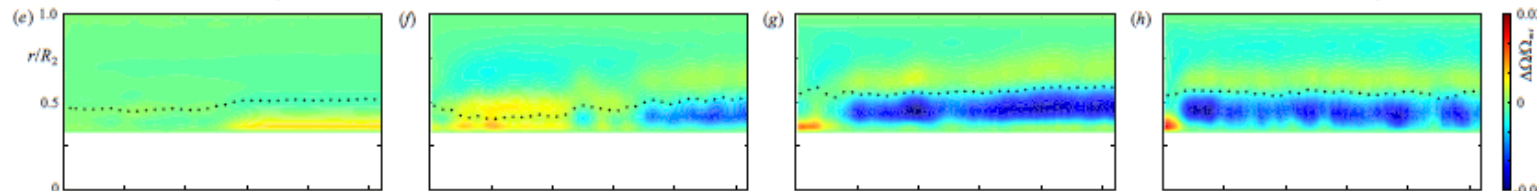


Вид аттрактора в линейном режиме при разных частотах.

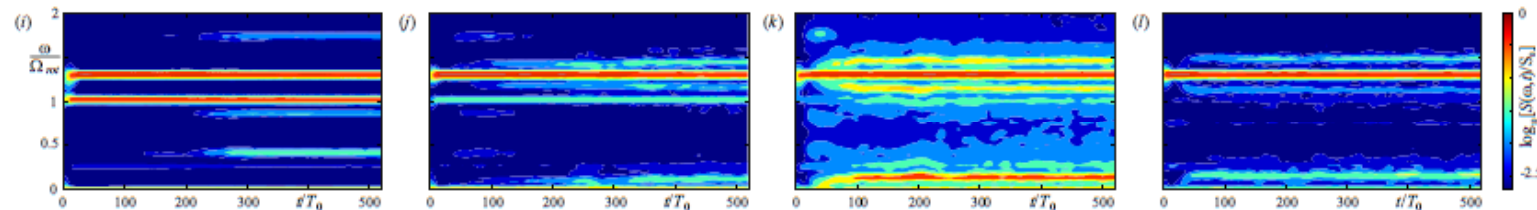
Картина течения



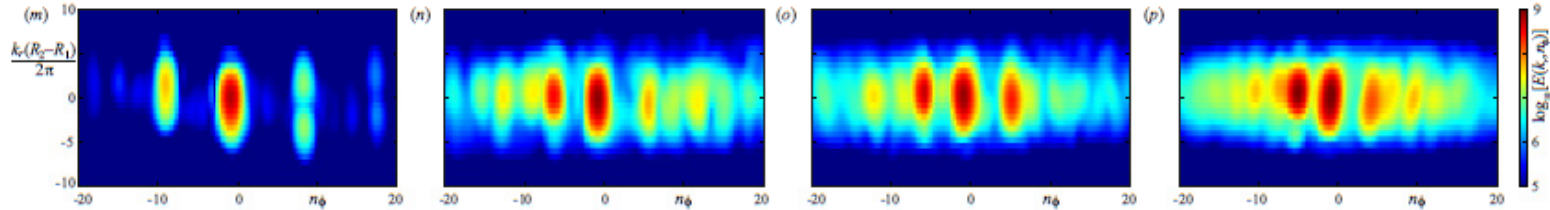
Среднее азимутальное течение

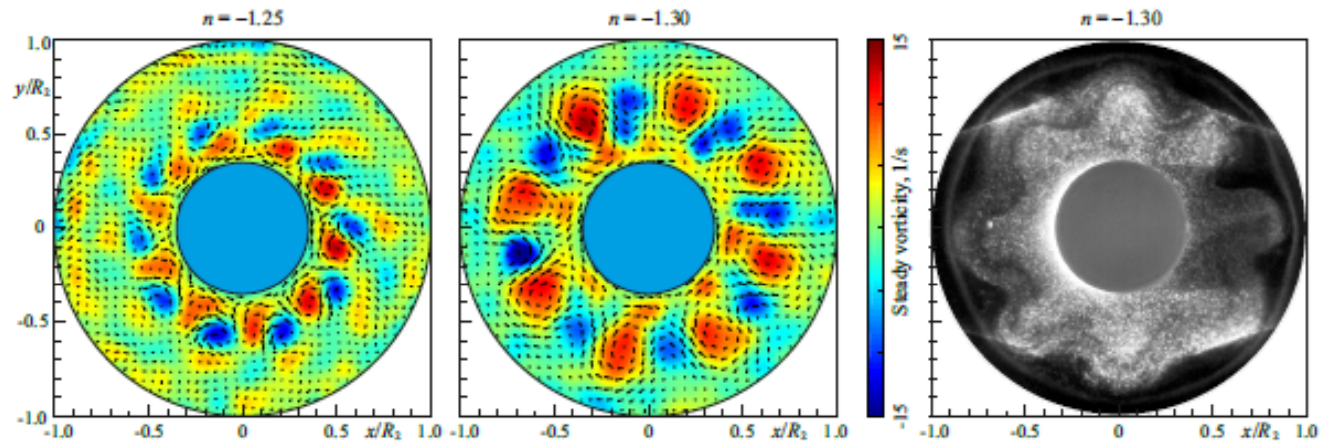


Частотный спектр

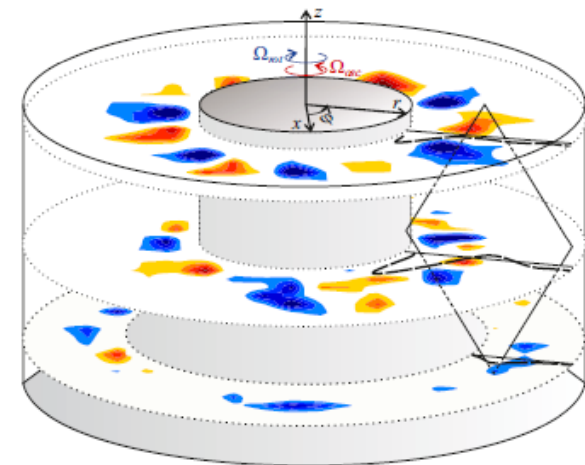
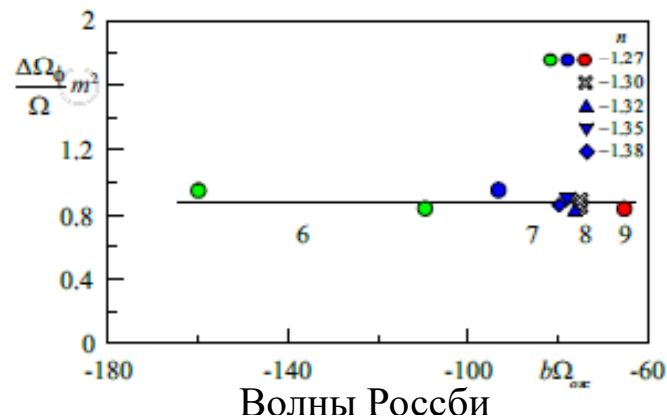


Пространственный спектр в развитом режиме

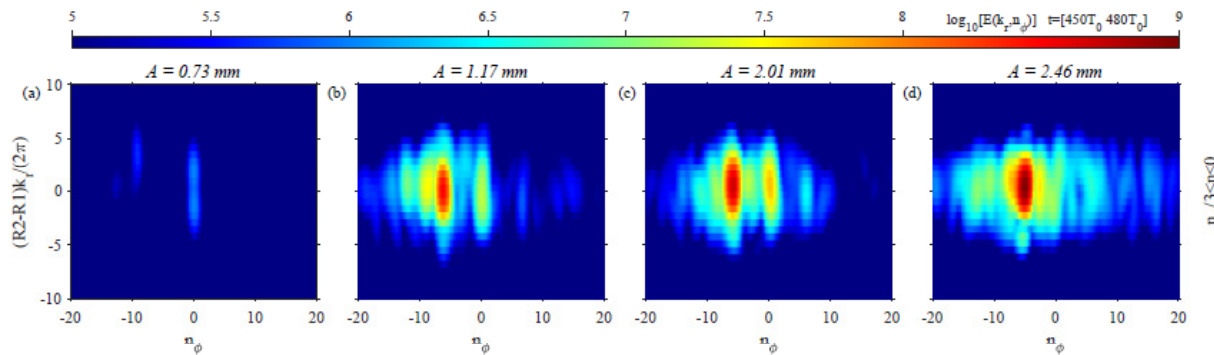




Картины вторичных структур в потоке при различных частотах возмущения



Колоннообразная структура волн Россби (пятна завихренности), профиль средней азимутальной скорости, лучевой скелет аттрактора в аксиальной плоскости



Спектральный состав волнового поля, сигнал отфильтрован с помощью фильтра низких частот.

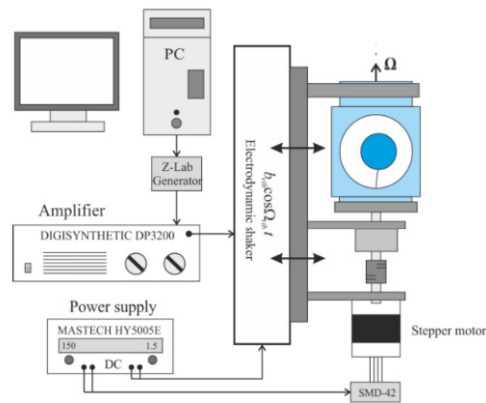
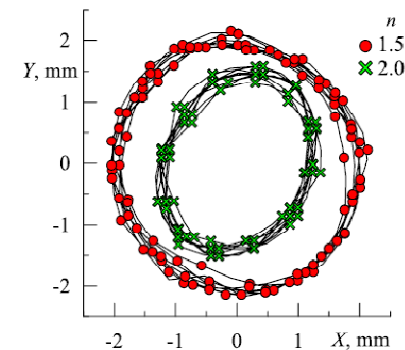
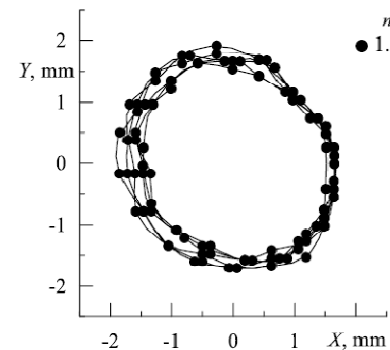
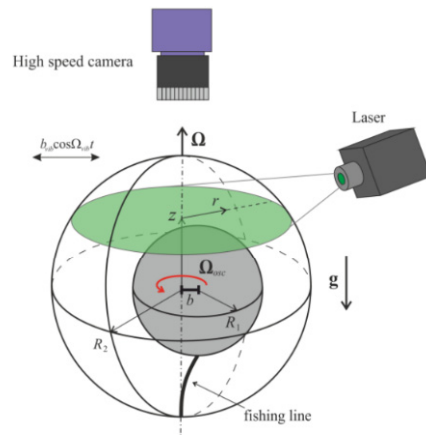
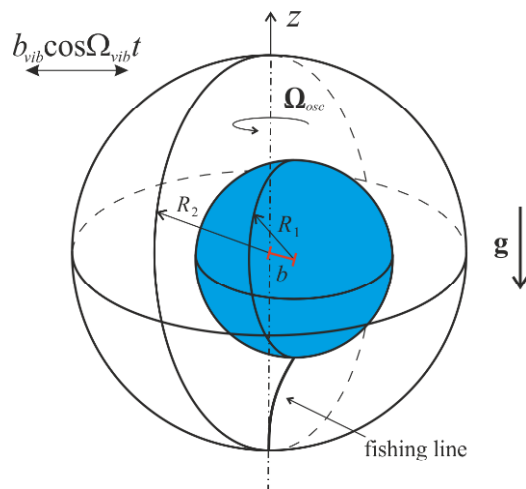


Схема эксперимента

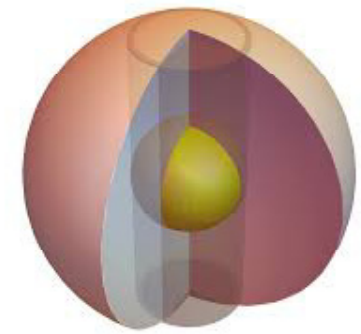
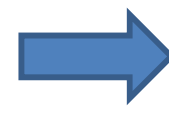
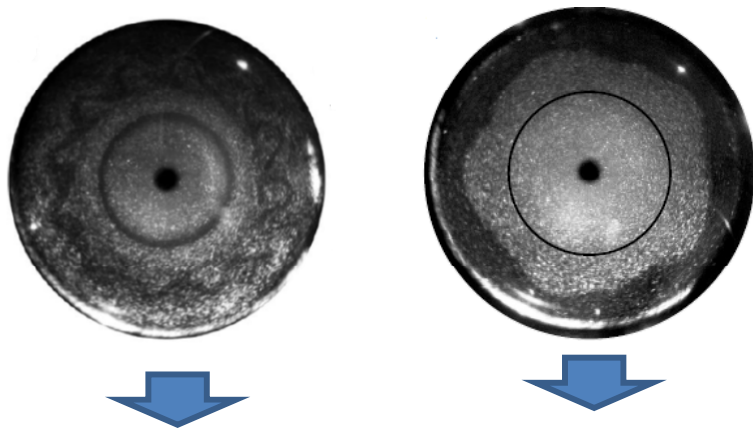


Примеры траектории центра ядра

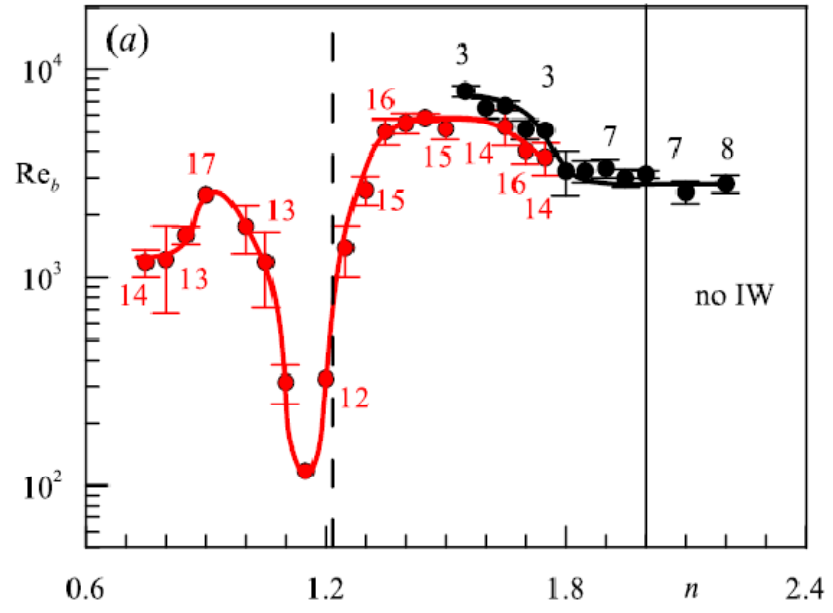
Возмущение с помощью инерционных колебаний ядра эксперимент в Перми



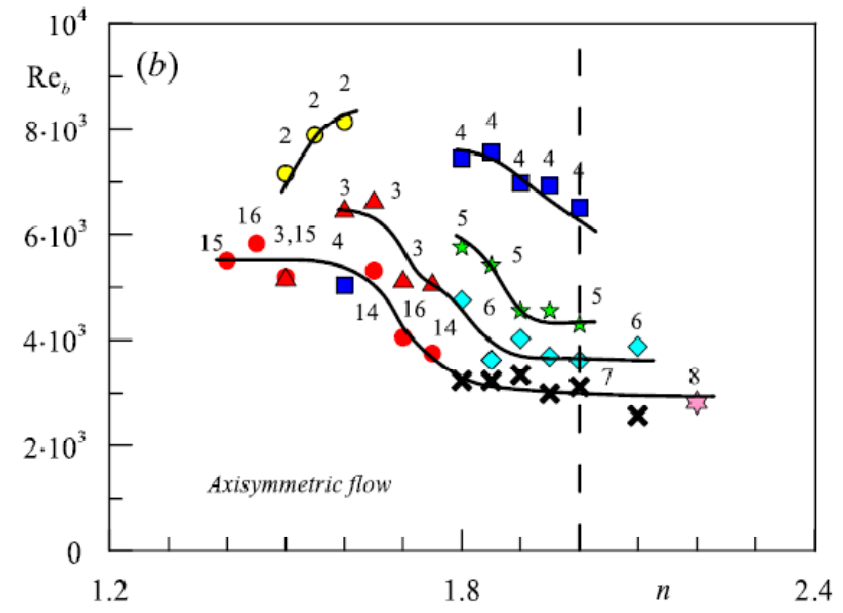
Parameter	Value
Core radius	$R_1 = 17.7 \text{ mm}$
Cavity radius	$R_2 = 36.0 \text{ mm}$
Aspect ratio	$R_1 / R_2 = 0.49$
Cavity rotation rate	$\Omega = 62.8 \text{ s}^{-1}$
Cavity vibration frequency (Lab. frame)	$\Omega_{vib} = 109.9 - 201.0 \text{ s}^{-1}$
Cavity vibration amplitude (Lab. frame)	$b_{vib} = 0 - 2 \text{ mm}$
Amplitude of the core oscillations relative to the cavity radius	$b / R_1 < 0.18$
Frequency of the core oscillations relative to the cavity	$\Omega_{osc} = \Omega_{vib} - \Omega = 47.1 - 138.2 \text{ s}^{-1}$
Dimensionless frequency of the core oscillations	$n = \Omega_{osc} / \Omega = 0.75 - 2.2$
Kinematical viscosity of the liquid	$\nu = 1.7 - 5.7 \text{ mm}^2/\text{s}$
Relative average core density	$\rho = \rho_C / \rho_L = 0.19 - 0.21$
Reynolds number	$\text{Re}_b = b^2 / R_1 \delta E < 10^4$
Thickness of the viscous boundary layer	$\delta = \sqrt{2\nu / \Omega_{osc}} = 0 - 0.4 \text{ mm}$
Vibrational analog of the Rossby number	$\text{Ro}_b = b^2 / R_1 \delta = 0 - 1.6$
Ekman number	$E = \nu / \Omega R_1^2 = 8.6 \cdot 10^{-5} - 2.9 \cdot 10^{-4}$
Azimuthal wave number for the Stewartson layer instability	m_{St}
Azimuthal wave number for steady cogwheel-like structures	m_c
Azimuthal wave number for instantaneous flow	m_ϕ
Wave vector	k_r



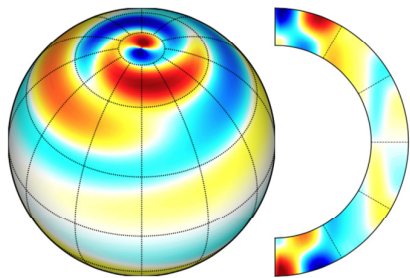
$$Re_b = \frac{b^2}{R_1 \delta} E^{-1}$$



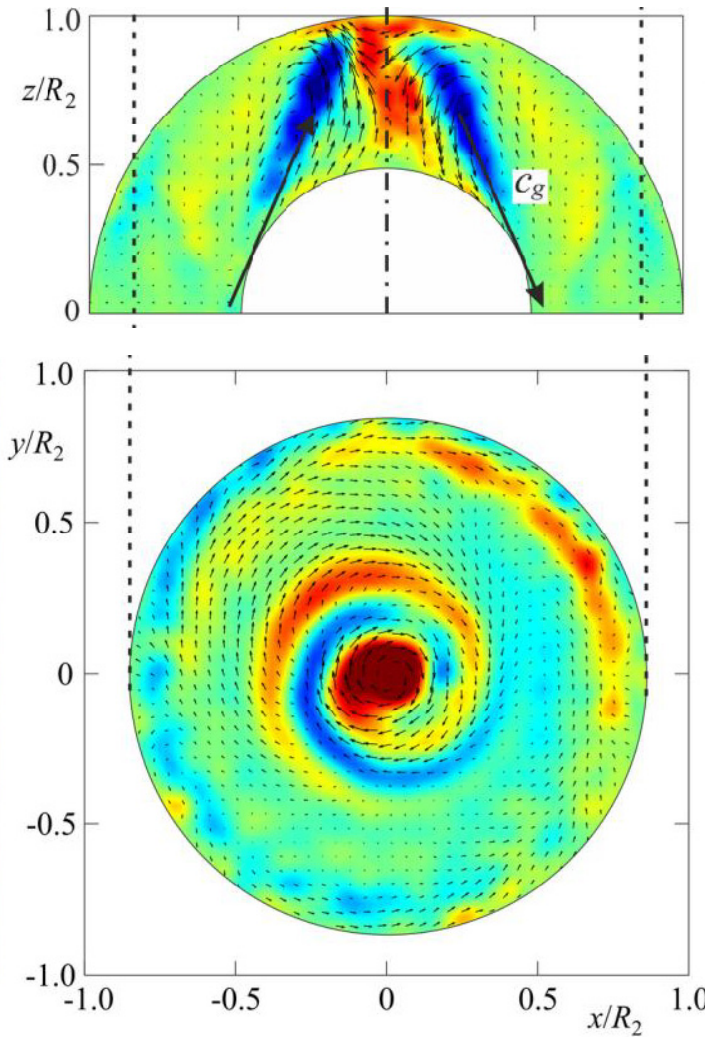
Критическое значение числа Рейнольдса, характеризующего вносимое возмущение, соответствующее порогу неустойчивости осесимметричного режима.



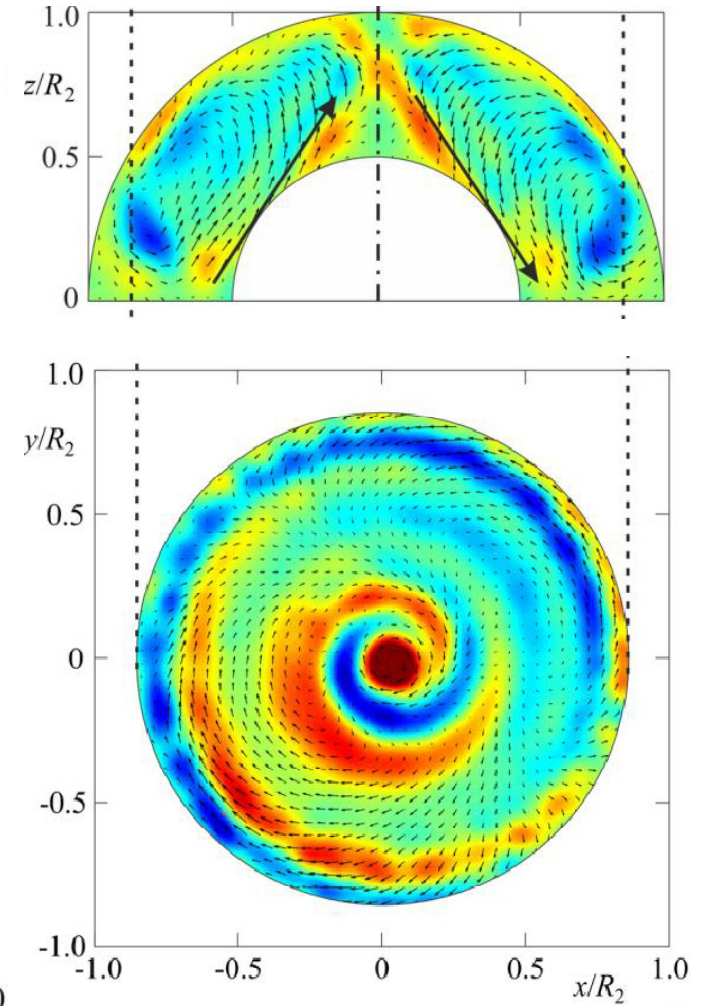
Карта режимов. Зависимость азимутальных чисел от амплитуды возмущения при различных частотах колебаний.



Инерционная мода
в конвекционном слое
Солнца
Bekki et al. A&A 2021

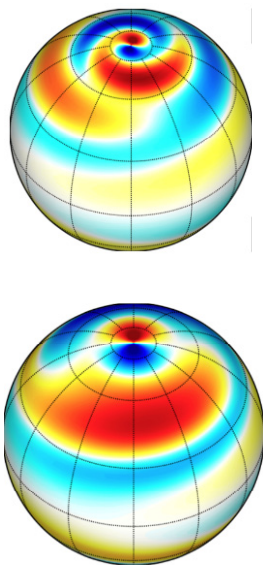


$n = 0.80$

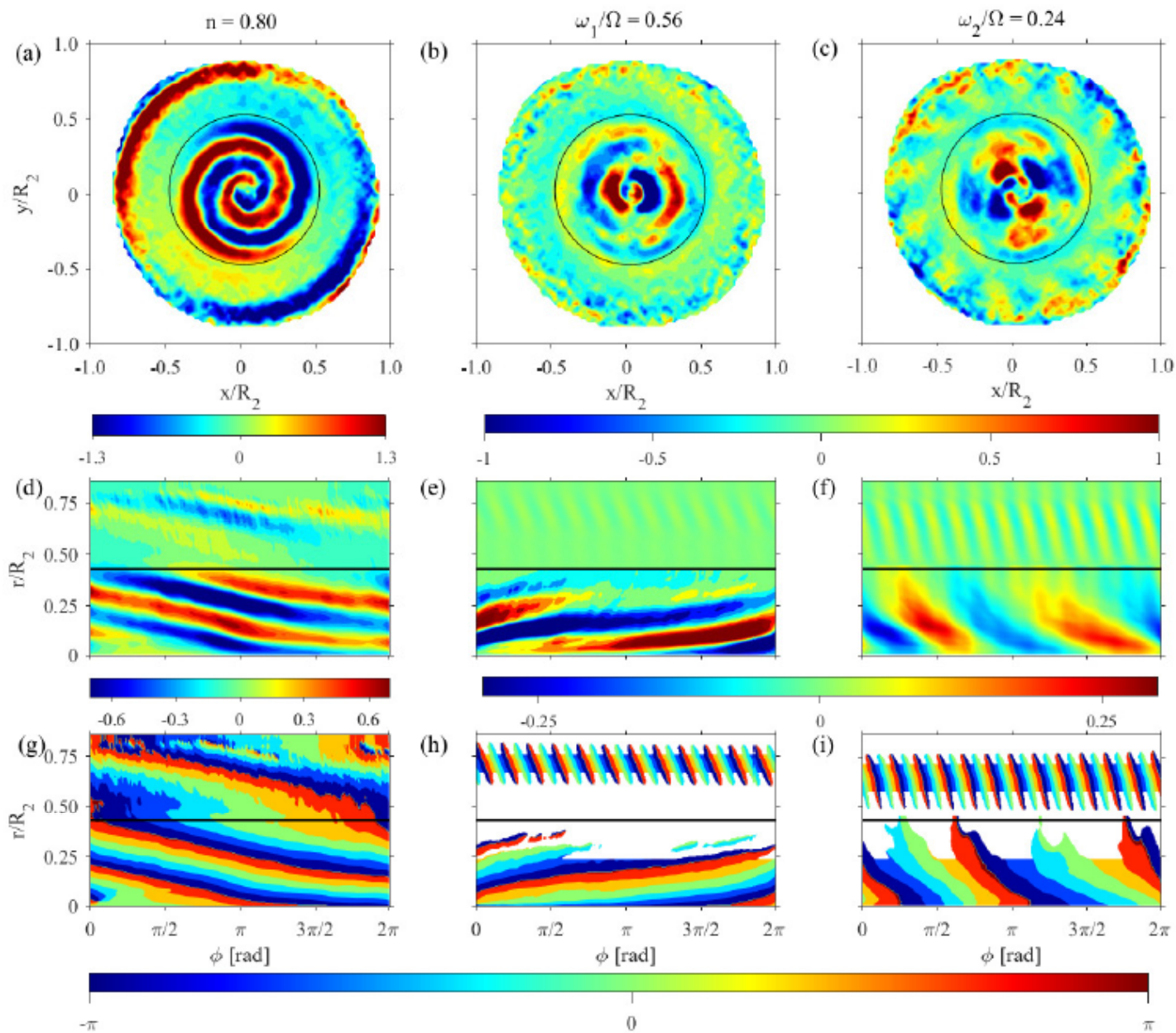


$n = 1.10$

Аттрактороподобные структуры инерционных волн



Инерционные моды
в конвекционном слое
Солнца
Bekki et al. A&A 2021



Поля вертикальной завихренности, соответствующие
фундаментальной и двум дочерним волнам (первый ряд),
амплитуда и фаза после преобразования Гильберта

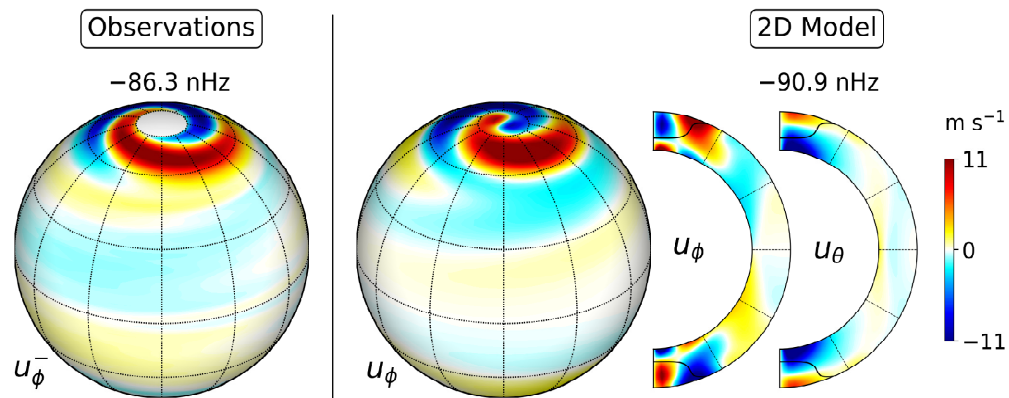
Недавние открытия в области гидродинамики Солнца:

Экваториальные волны Россби: Lortien et al (Nature Astronomy 2018),

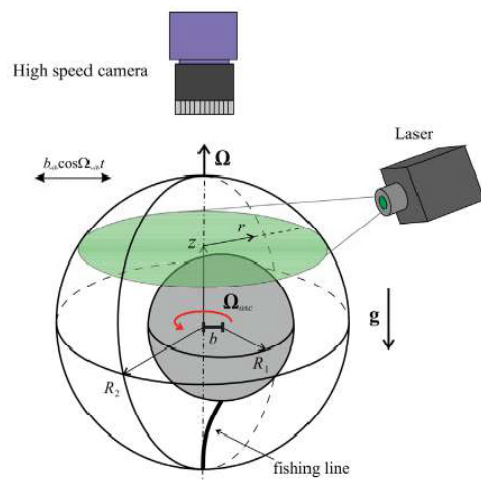
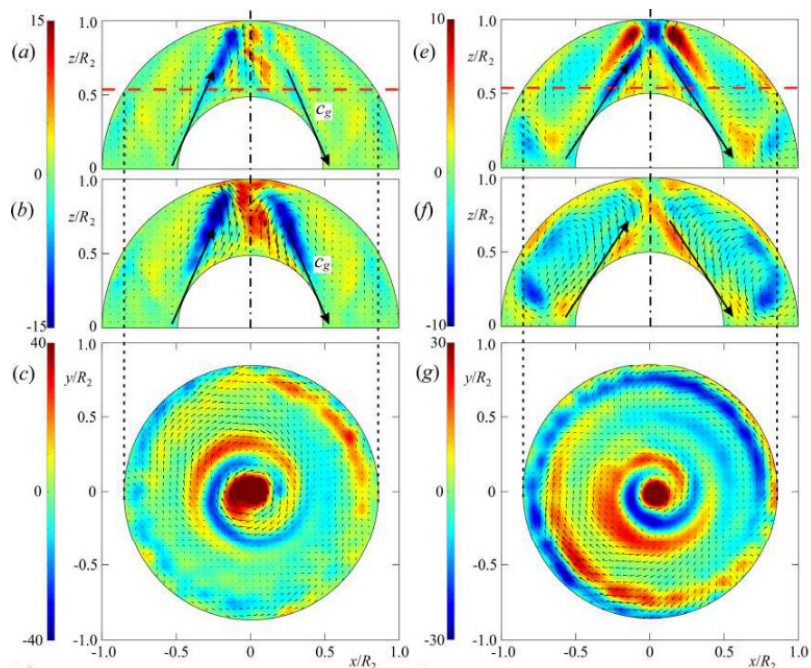
Конвективный слой Солнца – одна ячейка в каждом полушарии: Gizon et al (Science 2020)

Инерционные волны в конвективном слое Солнца: Gizon et al (A&A, 2021)

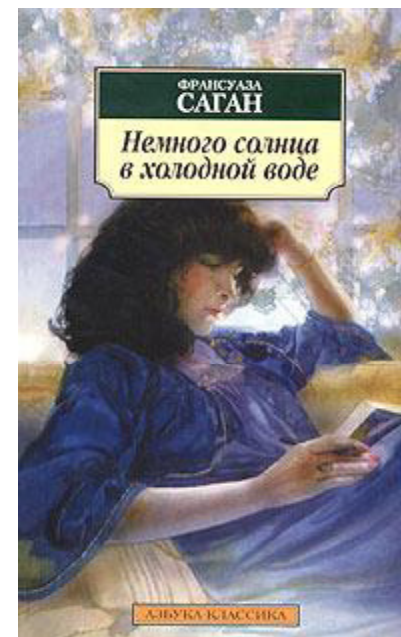
Bekki, Cameron, Gizon (A&A, 2022)

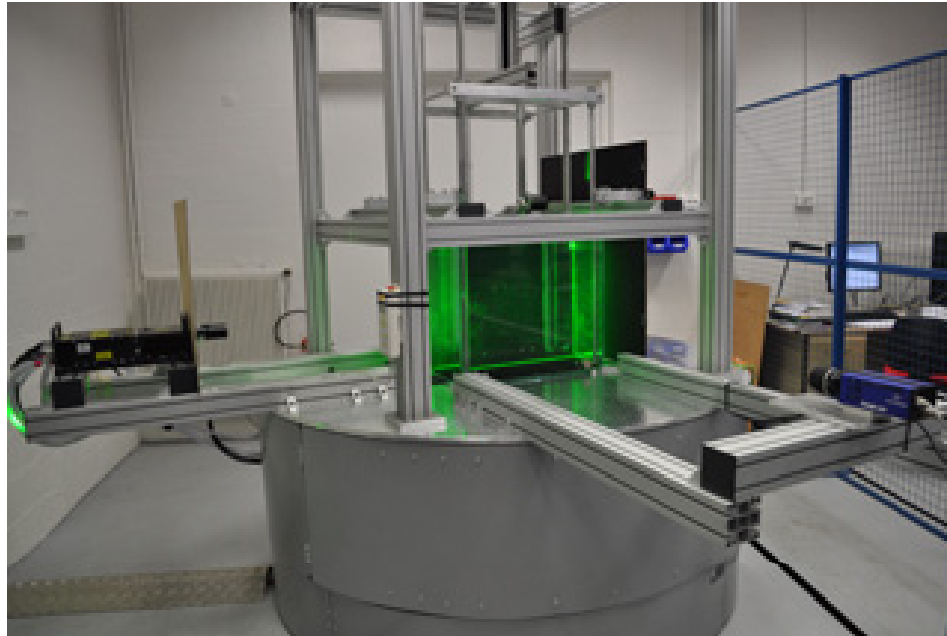


Инерционные волны во вращающемся сферическом слое (эксперимент)



Subbotin, Shmakova, Ermanyuk, Kozlov
(Phys Fluids, 2022)





Близкий аналог сооружаемой в ИГиЛ СО РАН платформы.

Диаметр платформы 2 м.

Несущая способность 1 тонна

Скорость вращения до 20 оборотов в минуту

**Визуализация течения в двух плоскостях с
программируемым перемещением световых ножей**

SPARSE NONLINEAR MODELS OF FLUID DYNAMICS

The slide displays several key concepts in fluid dynamics modeling:

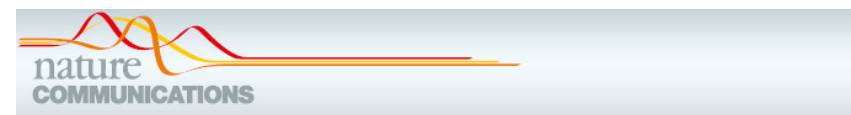
- Vortex Tube:** A 3D visualization of a vortex tube with a color gradient from blue to red.
- Vortex Pair:** A 3D visualization of two interacting vortices.
- Charge Void Region:** A schematic diagram showing a yellow region labeled 'Charge Void Region' and a red region labeled 'Vortex pair'.
- MHD simulation:** A 3D visualization of a magnetic field simulation.
- Vorticity Components:** Three 3D plots showing the evolution of vorticity components $C_1^{(2)}$, $C_2^{(2)}$, and $C_3^{(2)}$.
- Principal Components:** Three 3D plots showing the evolution of principal components a_1 , a_2 , and a_3 .
- Comparison:** A legend at the bottom right compares DNS (Direct Numerical Simulation) and SINDy (Sparse Identification of Nonlinear Dynamics) results, showing that SINDy can accurately capture the dominant physical processes.

1:29 / 38:27 • Introduction >

Annual Review of Fluid Mechanics

Machine Learning for Fluid Mechanics

Steven L. Brunton,¹ Bernd R. Noack,^{2,3} and Petros Koumoutsakos^{4,5}

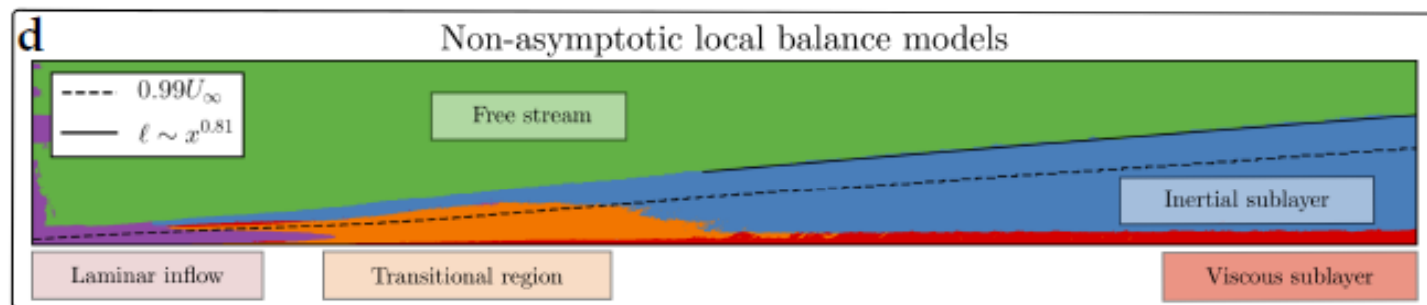
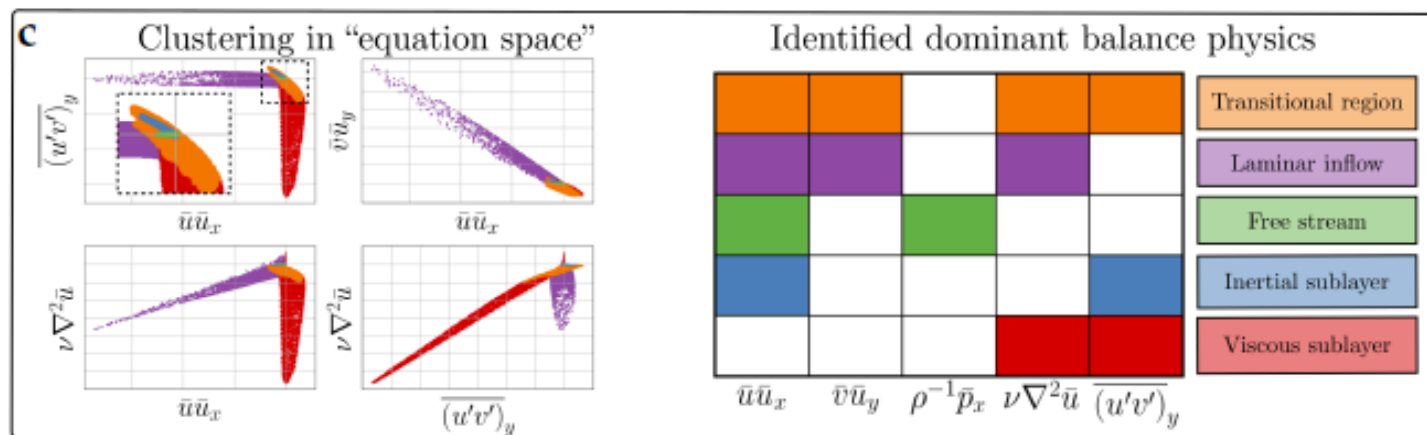
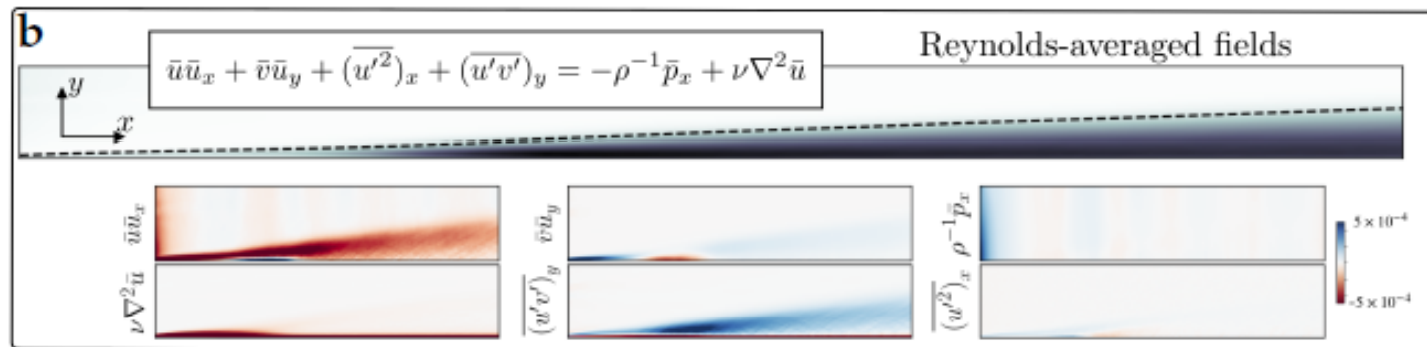
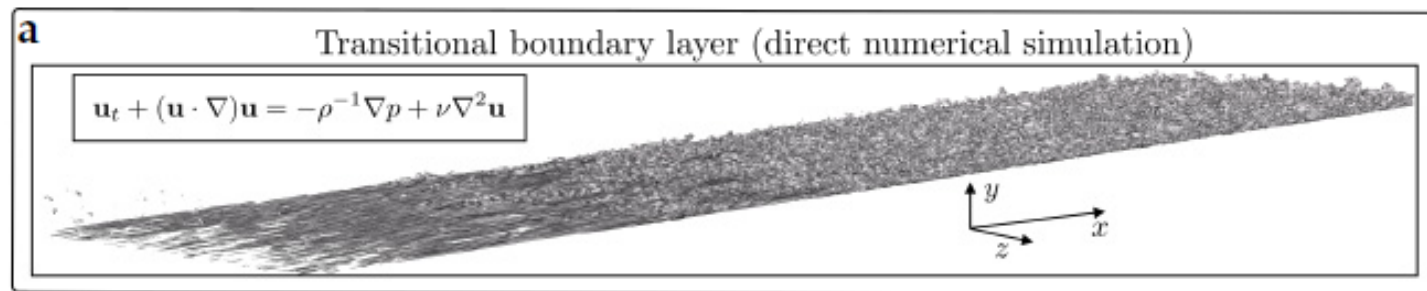


ARTICLE

<https://doi.org/10.1038/s41467-021-21331-z> OPEN

Learning dominant physical processes with data-driven balance models

Jared L. Callahan¹, James V. Koch², Bingni W. Brunton³, J. Nathan Kutz⁴ & Steven L. Brunton¹





И.Н. Сибгатуллин



Н. Д. Шмакова



В.Г. Козлов



С.В. Субботин



А. К. Хе

З.В. Макридин

Спасибо за внимание!