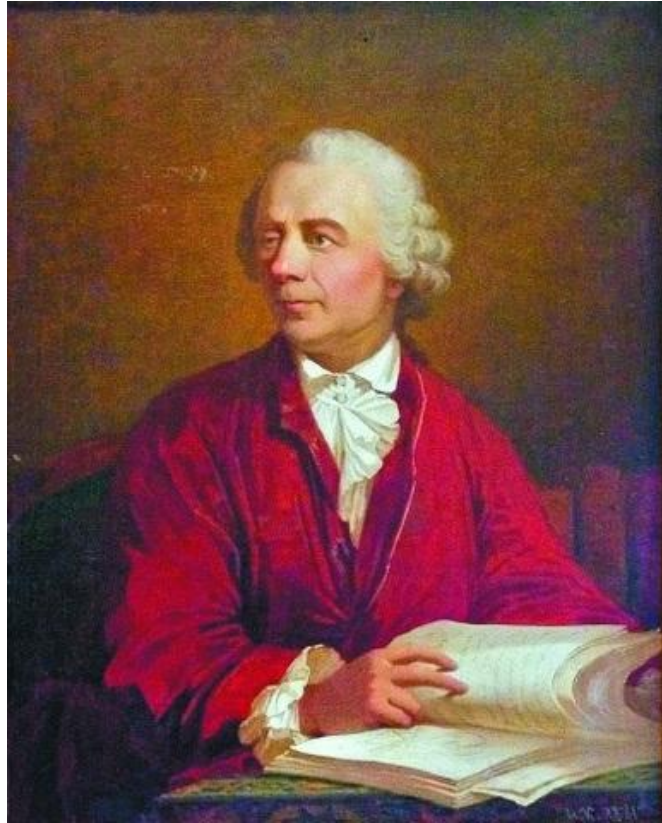


Вихревые волны на воде: обобщение потенциальных моделей в рамках лагранжевого подхода

А.А. Абрашкин, Е.Н. Пелиновский



ДВА СПОСОБА ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

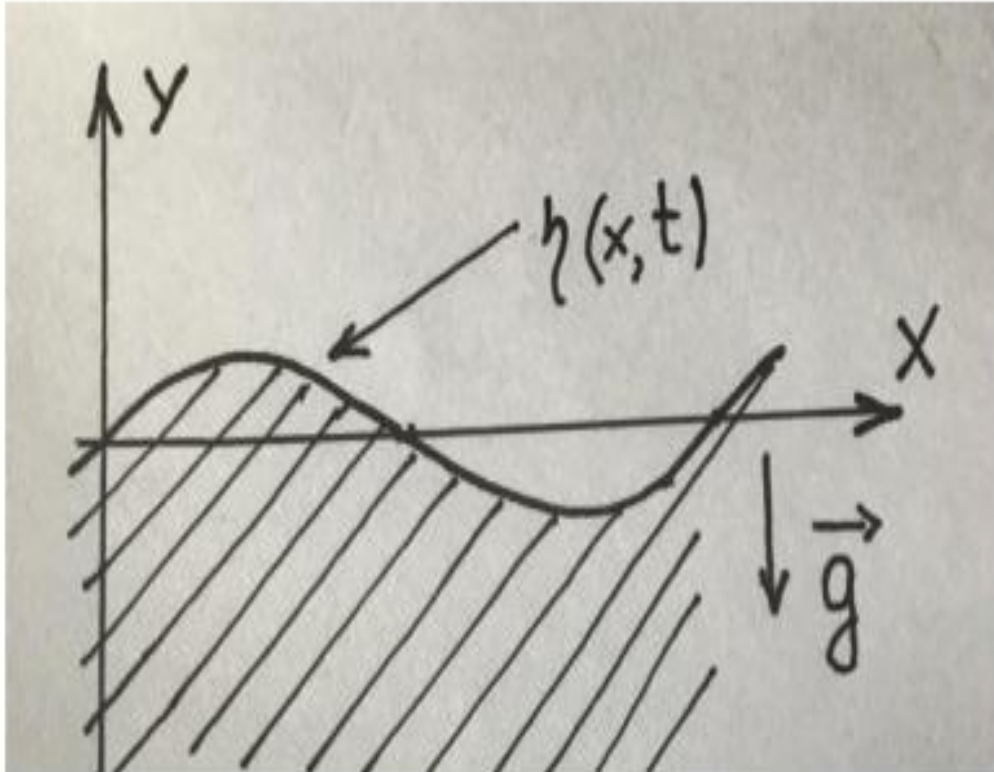


Леонард Эйлер (1707-1783) и Жозеф Луис Лагранж (1736-1813)

Поле скорости в точке (x,y,z) в момент времени t – эйлеров способ;

Координаты жидкой частицы $X(a,b,c,t)$, $Y(a,b,c,t)$, $Z(a,b,c,t)$ – лагранжев.

Волны на воде (эйлеров подход)



$\vec{v} = \nabla\varphi$; $\varphi(x, y, t)$ – потенциал;

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \rightarrow \Delta\varphi = 0;$$

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -\varphi_t - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - gy;$$

$$y = \eta(x, t): \begin{cases} \varphi_y = \eta_t + \varphi_x \eta_x \\ p = p_0 \end{cases}$$

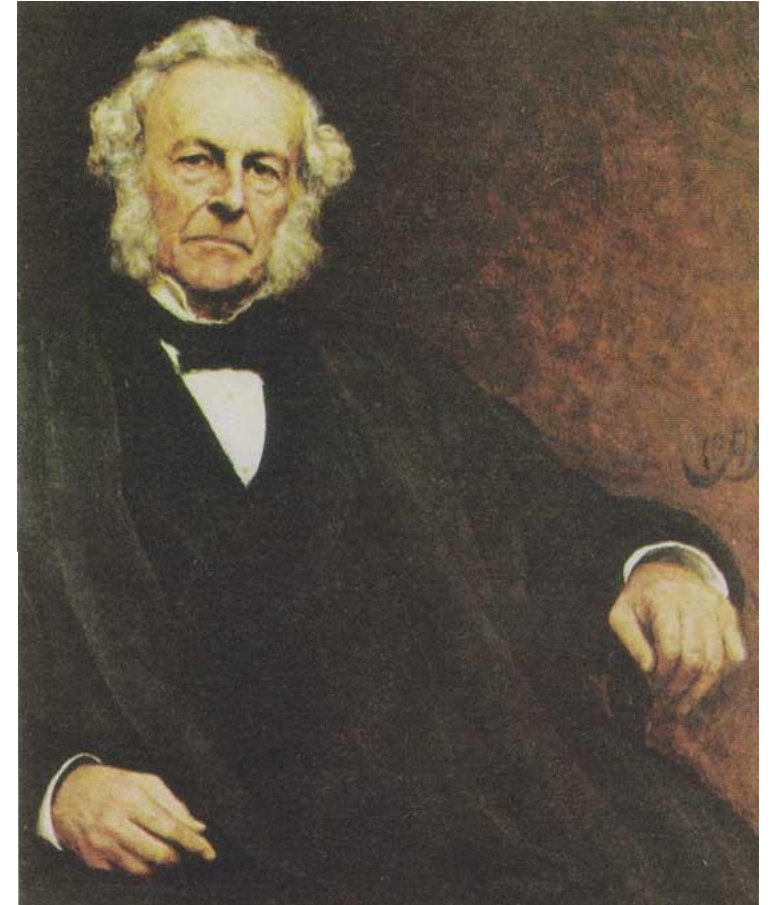
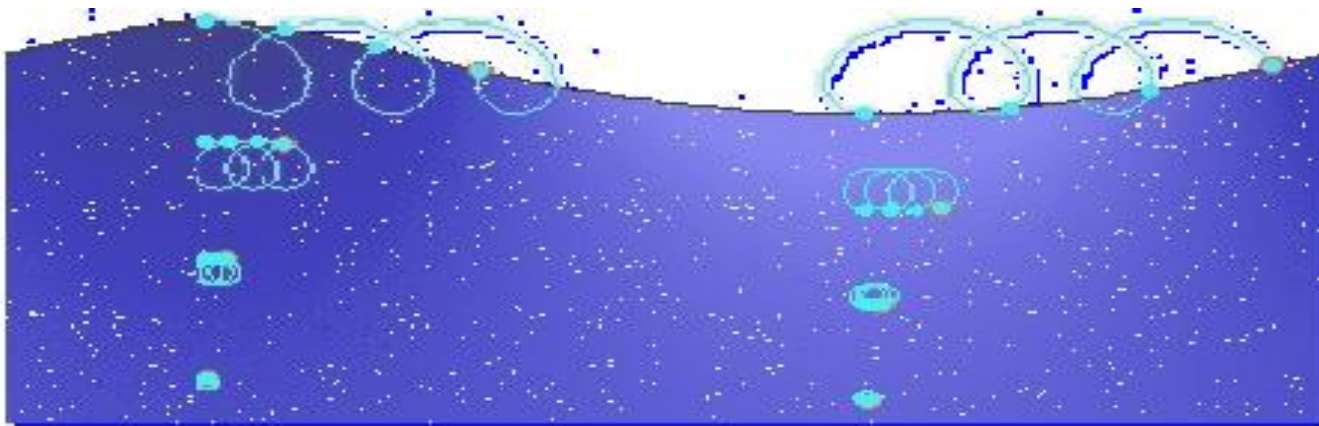
Нелинейная волна Стокса (1847)

$$\eta(x, t) = A \left[\cos \vartheta + \frac{1}{2} kA \cos 2\vartheta + \frac{3}{8} (kA)^2 \cos 3\vartheta \right] + O((kA)^4);$$

$$\varphi(x, y, t) = \frac{\omega}{k} e^{ky} \sin \vartheta + O((kA)^4); \quad \vartheta = kx - \omega t;$$

$$c = \frac{\omega}{k} = c_0 \left(1 + \frac{1}{2} (kA)^2 \right) + O((kA)^4); \quad c_0 = \frac{\omega_0}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}.$$

$$\langle \varphi_x \rangle = u_s = \omega_0 k A^2 e^{2ky} - \text{дрейф Стокса.}$$



Лагранжев подход (2-D описание)

$$\frac{J(X, Y)}{J(a, b)} = J_0(a, b); \quad (1)$$

$$X_{tt} = -\frac{1}{\rho} p_X; \quad Y_{tt} = -\frac{1}{\rho} p_Y - g \quad \text{— II закон Ньютона}$$

$$X_{tt}X_a + (Y_{tt} + g)Y_a = -\frac{1}{\rho} p_a; \quad (2)$$

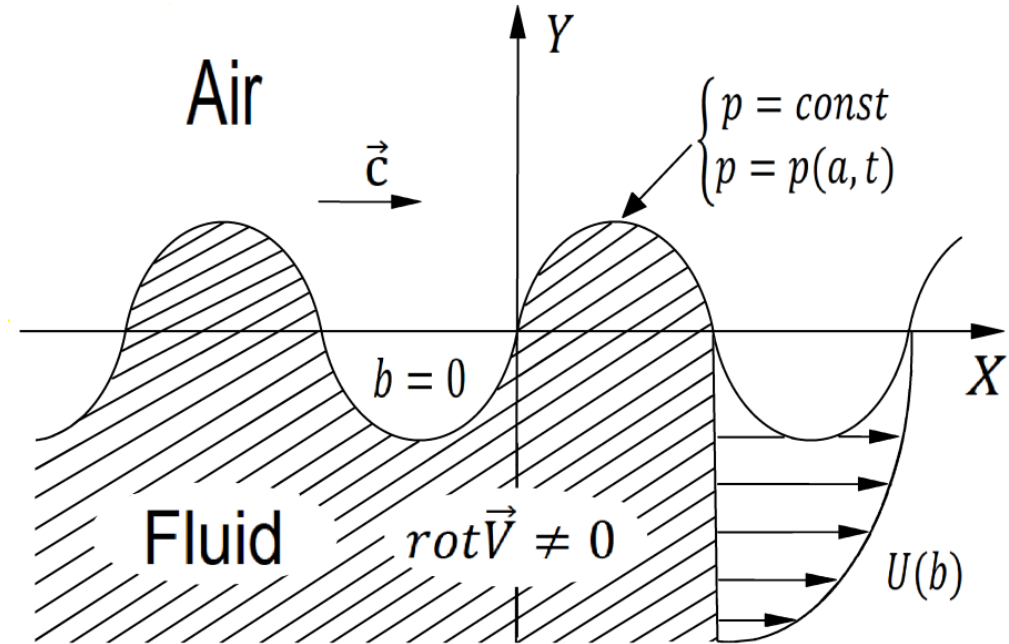
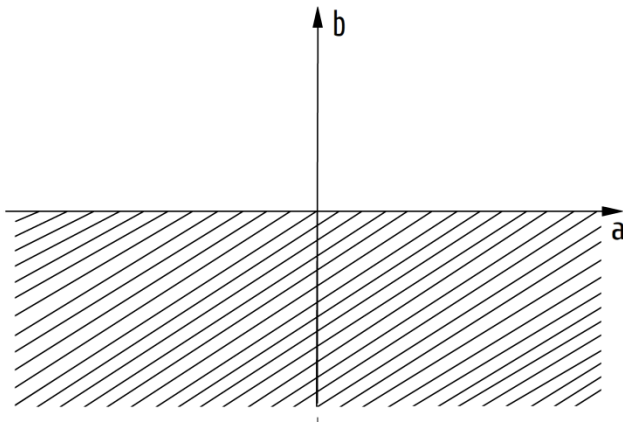
$$X_{tt}X_b + (Y_{tt} + g)Y_b = -\frac{1}{\rho} p_b; \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial a} (3) - \frac{\partial}{\partial b} (2) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{J(X_t, X)}{J(a, b)} + \frac{J(Y_t, Y)}{J(a, b)} \right] = 0;$$

$$\frac{J(X_t, X)}{J(a, b)} + \frac{J(Y_t, Y)}{J(a, b)} = J_0 \Omega(a, b), \quad \Omega \text{ — завихренность.} \quad (4)$$

Достоинства лагранжевого описания

1. Свободная поверхность задается условием $b=0$



Действие ветра задается как неоднородное давление на свободной поверхности

2. Завихренность является интегралом движения и может выступать как начальное условие

Волна Герстнера (1802) – первое точное решение в нелинейной теории волн

$$X = a - Ae^{kb} \sin(ka - \omega t); \quad b \leq 0,$$

$$Y = b + Ae^{kb} \cos(ka - \omega t); \quad A \leq k^{-1},$$

$$\omega^2 = gk, \quad c = \frac{\omega}{k}, \quad \Omega_G = \frac{2k^3 A^2 c \exp(2kb)}{1 - k^2 A^2 \exp(2kb)}.$$

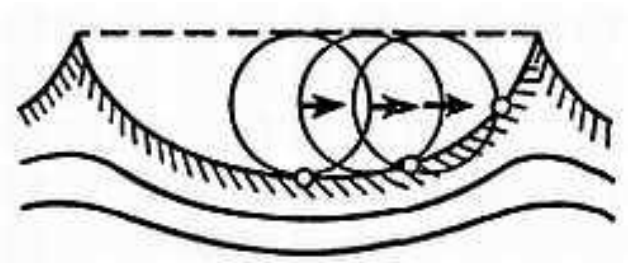
!!! : а) $X(t = 0) \neq a$, $Y(t = 0) \neq b$;

б) Дрейф частиц отсутствует.

Monismith et al. *J. Fluid Mech.* (2007) – “проклятие” снято!



Пражский инженер и механик Франц Йозеф Герстнер (1756-1832)



Волна Стокса в лагранжевом представлении

$$X = a - \varepsilon k^{-1} \exp(kb) \sin k(a - ct) + \varepsilon^2 ct \exp(2kb);$$

$$Y = b + \varepsilon k^{-1} \exp(kb) \cos k(a - ct); \quad \varepsilon = kA.$$

$$\Omega_{G2} = 2k\varepsilon^2 c \exp(2kb) + O(\varepsilon^4);$$

В квадратичном приближении (А., Пелиновский, 2018):

Волна Стокса = волна Герстнера + дрейф Стокса; $\Omega_{G2} = -\Omega_S$.

Волна Герстнера **не испытывает** модуляционной неустойчивости.

Задача – обобщить волну Герстнера!?

Вихревые стационарные волны

Обобщение волны Герстнера:

$$\Omega(\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \Omega_n(\psi), \quad \psi - \text{функция тока};$$

Гуйон (1958) – теория возмущений в переменных x, ψ для $n = 2$.

$$c^2 = \frac{g}{k} \left[1 - \varepsilon \int_{-\infty}^0 \Omega_1(s)(1 - s^2) ds \right], \quad s = \exp\left(-\sqrt{\frac{k^3}{g}} \psi\right).$$

Свойства триады волн в линейном приближении

Тип волны / Свойство	Волна Стокса	Волна <u>Герстнера</u>	Волна <u>Гуйона</u>
<u>Завихренность</u>	= 0	= 0	≠ 0
Дрейфовое течение	= 0	= 0	≠ 0
Траектория частиц в лабораторной системе	Окружность	Окружность	Петлеобразная линия

Волны Гуйона в кубичном приближении, $n=3$: лагранжево описание (А., Пелиновский; 2021)

$$\Omega(b) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \Omega_n(b), \text{ изолинии } b \text{ и } \psi \text{ совпадают};$$

$q = a + \sigma(b)t$, b – модифицированные лагранжевы координаты;

$\sigma(b)$ – неоднородный дрейф вдоль линии тока.

$$\frac{J(X, Y)}{J(q, b)} = 1; \quad \sigma \left[\frac{J(X_q, X)}{J(q, b)} + \frac{J(Y_q, Y)}{J(q, b)} \right] - \sigma'(X_q^2 + Y_q^2) = \Omega(b).$$

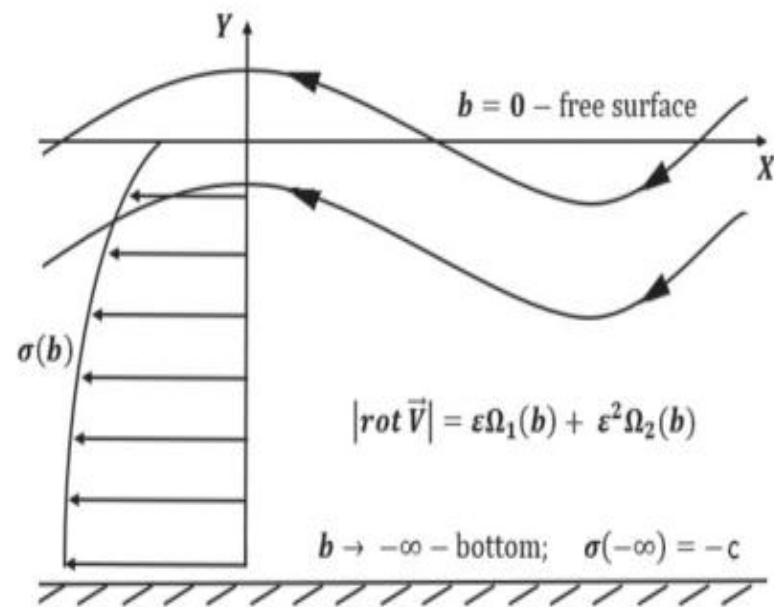


Figure 1. The picture of a stationary flow in the frame of reference associated with the wave: periodic disturbances of the flow with a profile $\sigma(b)$.

Нелинейное дисперсионное уравнение и нелинейное уравнение Шредингера

$$c = c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + O(\varepsilon^3); \quad c_0 = \sqrt{\frac{g}{k}},$$

$$c_2 = \frac{1}{2} c_0 - \int_{-\infty}^0 \Omega_2 (1 - e^{2kb}) db.$$

Волна с “квадратичной” завихренностью ($\Omega_1 = 0$):

$$\omega = \omega_0 (1 + \gamma k^2 A^2); \quad \omega_0 = \sqrt{gk},$$

$$\gamma = c_2 c_0^{-1} = \begin{cases} 1/2 & \text{(волна Стокса)} \\ 0 & \text{(волна Герстнера)} \\ \neq 0, 1/2 & \text{(волна Гуйона), } \forall \text{ знака} \end{cases}$$

Волновой пакет ($\omega - \omega_0 = \omega' \ll \omega_0$; $k - k_0 = k' \ll k_0$):

$$\omega' - \frac{\omega_0}{2k_0} k' + \frac{\omega_0}{8k_0^2} k'^2 - \frac{1}{2} \gamma \omega_0 k_0^2 A^2 = 0,$$

$$-i\omega' \rightarrow \partial/\partial t, \quad ik' \rightarrow \partial/\partial q,$$

$$i \left(A_t^* + \frac{\omega_0}{2k_0} A_q^* \right) - \frac{\omega_0}{8k_0^2} A_{qq}^* - \gamma \omega_0 k_0^2 |A^*|^2 A^* = 0.$$

Комплексные уравнения 2-D гидродинамики

$$W = X + iY, \quad \bar{W} = X - iY;$$

$$\chi = a + ib, \quad \bar{\chi} = a - ib;$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{J(W, \bar{W})}{J(\chi, \bar{\chi})} = 0,$$

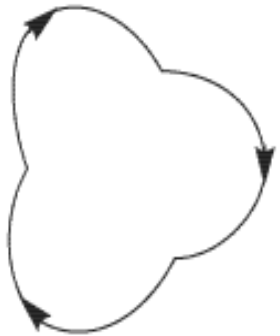
$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{J(W_t, \bar{W})}{J(\chi, \bar{\chi})} = 0.$$

Птолемеевские течения (А., Якубович, 1984)

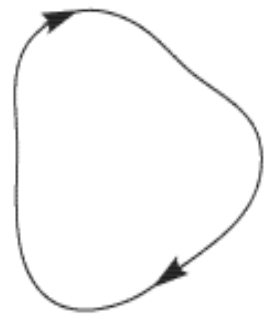
$$W = W_0(t) + G(\chi) \exp(i\lambda t) + F(\bar{\chi}) \exp(i\mu t)$$

$$\Omega = 2 \frac{\lambda |G'|^2 - \mu |F'|^2}{|G'|^2 - |F'|^2}$$

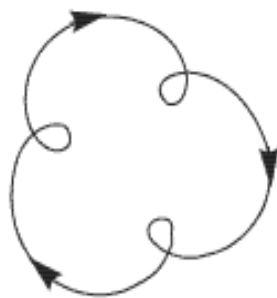
Эпициклоиды с 3 выступами $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = 4$



1. Эпициклоида



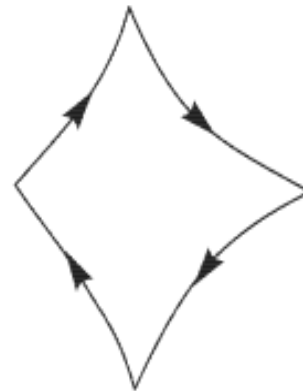
2. Укороченная



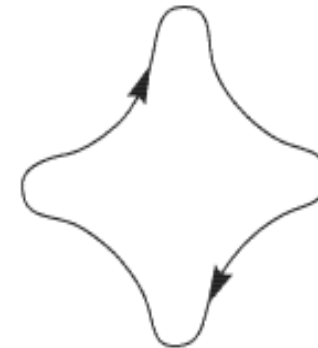
3. Удлиненная

$$W_0 = 0$$

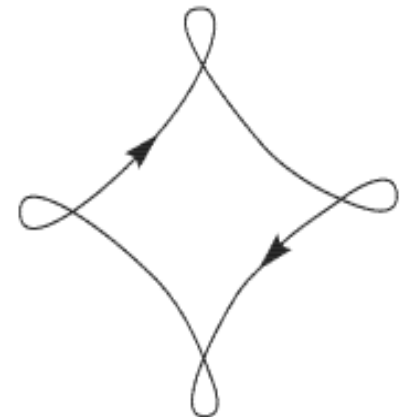
Гипоциклоиды с 4 выступами $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = -3$



1. Гипоциклоида



2. Укороченная



3. Удлиненная

Об уникальности птолемеевских течений

Теорема (А., Якубович, 2015):

Представления вида

$$W = \sum_{n=1}^N W_n(\chi, \bar{\chi}) \exp(i\lambda_n t), \quad \lambda_n = \text{const},$$

могут быть решениями уравнений идеальной несжимаемой жидкости только в случае $N = 1$ или $N = 2$.

Волна Герстнера:

$W = \chi + iA \exp i(k\bar{\chi} - \omega t), \quad \text{Im } \chi \leq 0$ –
частный случай птолемеевских течений.

**Волны, генерируемые неоднородным,
гармоническим по времени давлением
(обобщенные волны Герстнера)**

$$W = G(\chi) + F(\bar{\chi}) \exp(-i\omega t).$$

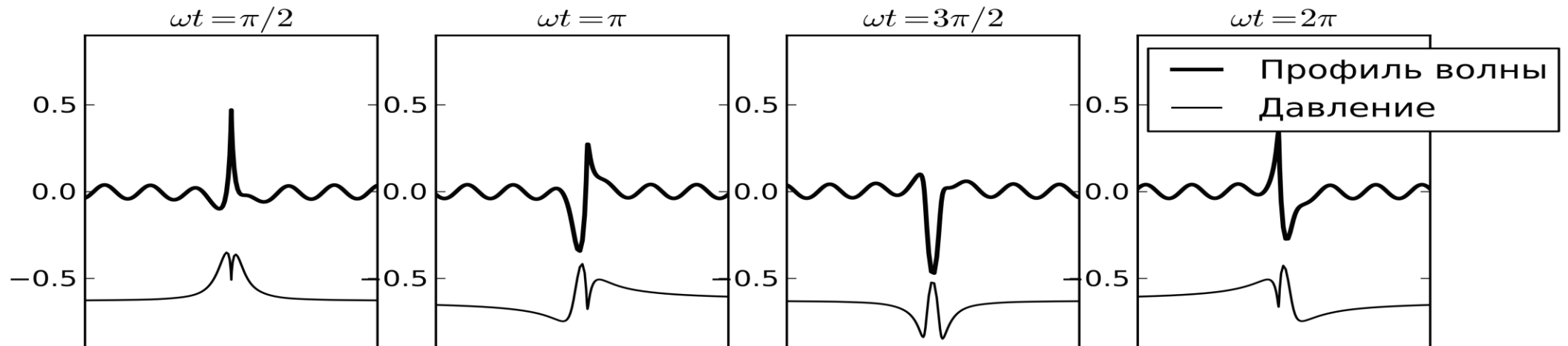
Траектории жидких частиц – окружности,
как в волне Герстнера (Gerstner-like waves!)

Давление на свободной поверхности ($b = 0$):

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -g \operatorname{Im} W + \frac{1}{2} \omega^2 |F|^2 + \operatorname{Re} \left(e^{i\omega t} \int_{-\infty}^a G' \bar{F} d\chi \right)$$

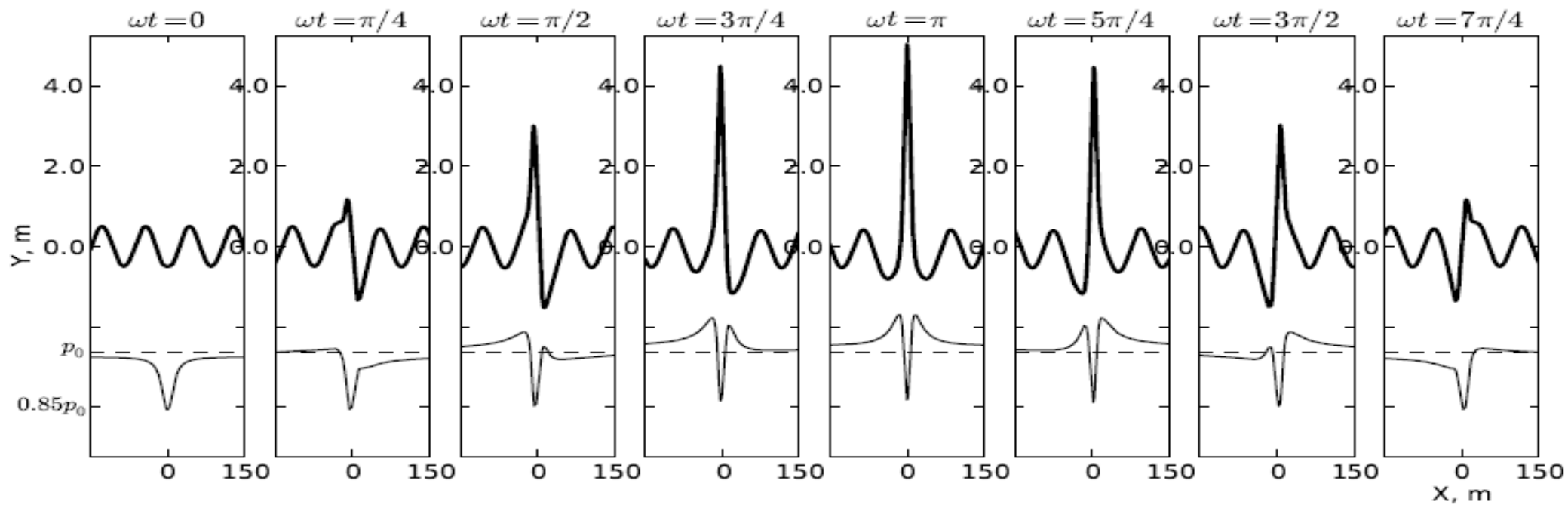
Бризер на фоне волны Герстнера (А., Соловьев, 2012)

$$W = \chi + \left[iA \exp(ik\bar{\chi}) + \frac{\beta}{(\bar{\chi} + i)^n} \right] \exp(-i\omega t)$$



Модель волны-убийцы (А., Соловьев, 2013)

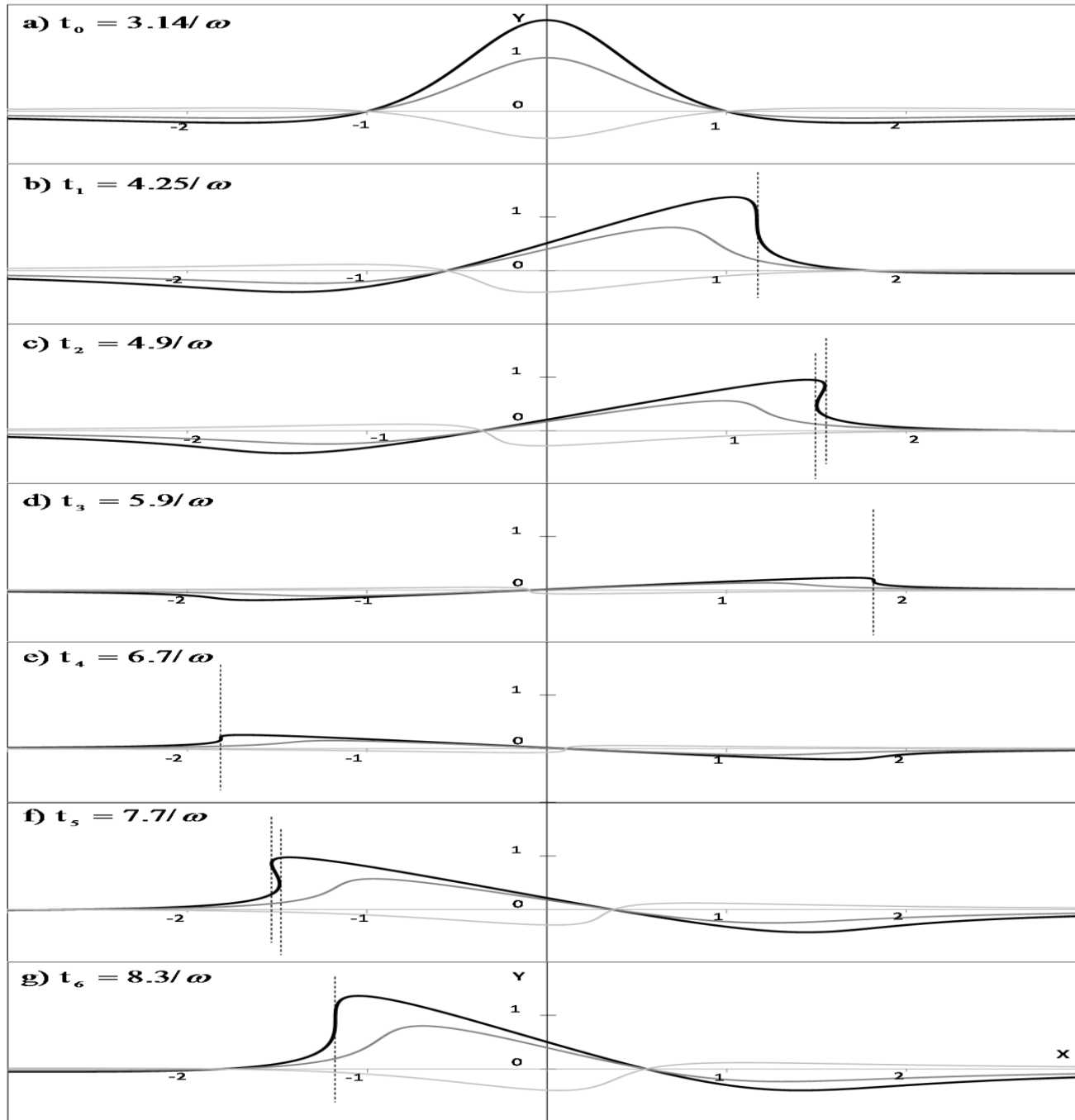
$$W = \chi - \frac{\beta i}{(\chi - i)^2} + \left[iA \exp(ik\bar{\chi}) + \frac{\beta i}{(\bar{\chi} + i)^2} \right] \exp(-i\omega t)$$



Параметры волны

для перепада давления – 100 мм ртутного столба

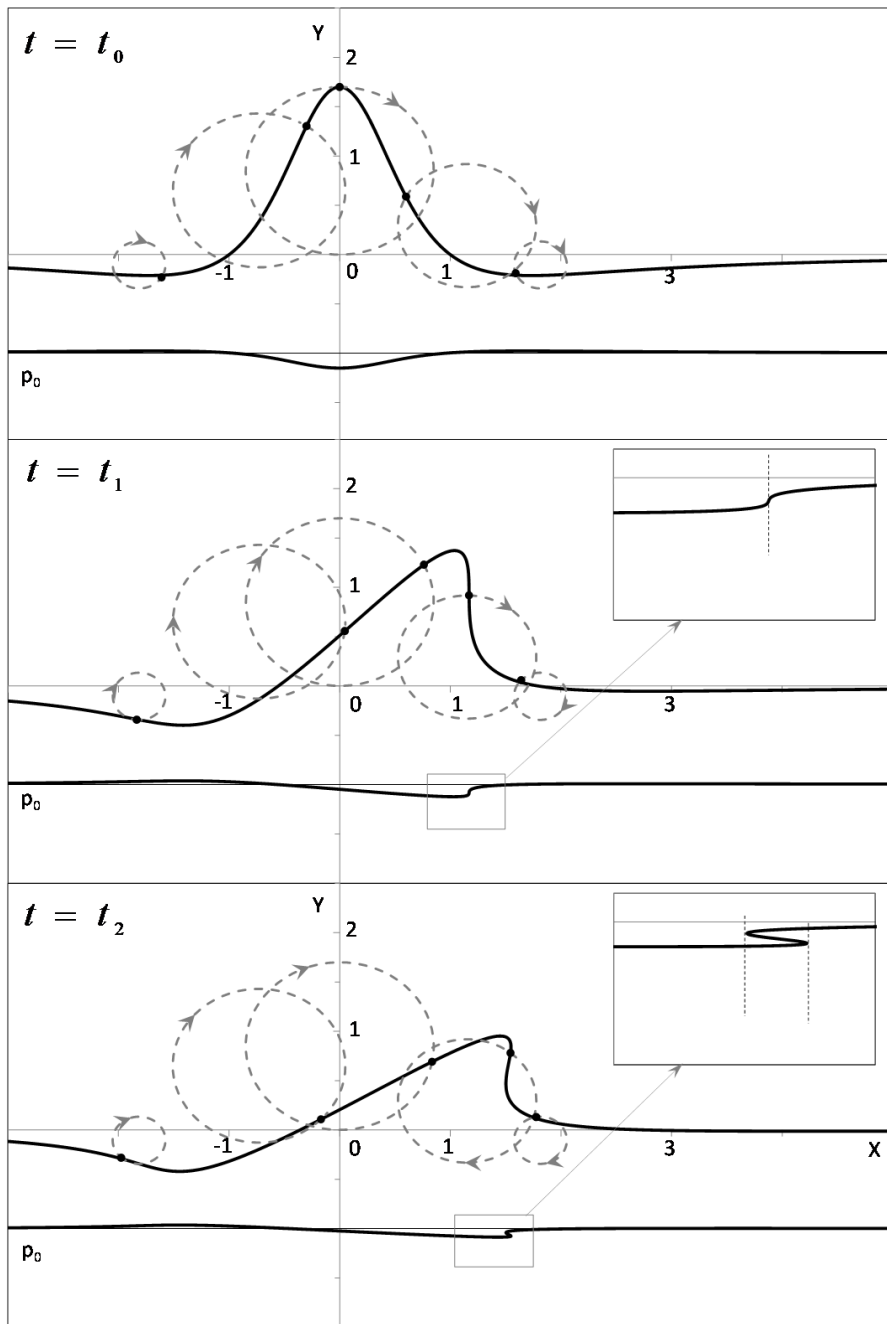
$A, \text{ м}$	kA	$\lambda, \text{ м}$	$h, \text{ м}$
0,5	0,134	23,5	5,36
1,0	0,224	28,0	6,61
2,0	0,330	38,0	8,78
3,0	0,393	48,0	10,88



Динамика бризера (А., Ошмарина, 2013)

$$W = \chi - \frac{i\beta}{(\chi - i)^2} + \frac{i\beta}{(\bar{\chi} + i)^2} e^{-i\omega t}$$

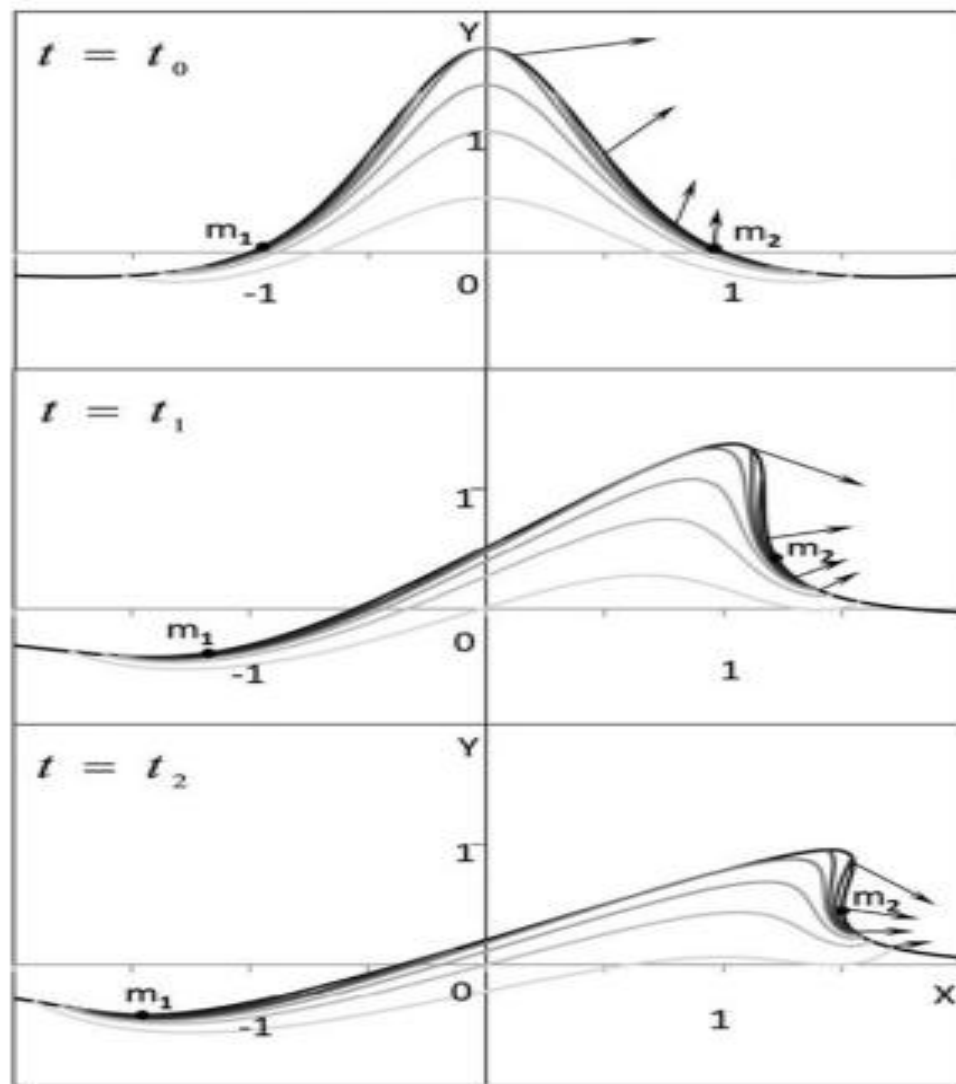
**Профиль бризера и давление
(жирные кривые)
и траектории жидких частиц
(пунктирные окружности)**



Условие опрокидывания:

$$\left. \frac{dY}{dX} \right|_{b=0} = \frac{Y'(a)}{X'(a)} \rightarrow X'(a) = 0; Y'(a) \neq 0;$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial X} \right|_{b=0} = \left. \frac{p_a}{X_a} \right|_{b=0} = - \left[X_{tt} + (Y_{tt} + g) \frac{Y_a}{X_a} \right] \Big|_{b=0}$$



Вектора скорости в зоне опрокидывания и изолинии завихренности. Более темные линии соответствуют большей завихренности; в точках m_1 , m_2 – ее максимумы

Для более детального знакомства:

А.А. Абрашкин, Е.Н. Пелиновский (2018),
О связи дрейфа Стокса и волны Герстнера,
УФН, 188, №3;

А.А. Абрашкин, Е.Н. Пелиновский (2022),
Волны Герстнера и их обобщения в гидро-
*динамике и геофизике, **УФН, 192, №5.***

Заключение и перспективы...

В рамках лагранжевого подхода:

- Развита теория слабозавихренных волн на воде. Проведено их сопоставление с волной Стокса;
- Получены точные решения, демонстрирующие сложную динамику нелинейных вихревых волн под действием внешнего давления: колебания бризера на фоне однородного волнения, формирование волны – убийцы, процесс обрушения волны.

Пути развития?

- Численные вычисления в лагранжевых переменных;
- Учет взаимодействия волн (аналог уравнения Захарова).

Спасибо за внимание!

